ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXV, № 2, 1990 Математика

УДК 517.53

Г. В. МИКАЕЛЯН

О РОСТЕ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННО-ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

1. Пусть $f(z)$ $(f(0)\neq\infty)$ — мероморфная в **C** функция. В добавление к общеизвестным характеристическим функциям Р. Неванлинны

$$T(r,f)\equiv m(r,f)+N(r,f)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta+$$

$$+\int\limits_0^r\frac{n(t,f)}{t}\,dt\,(0<r<+\infty),$$

где $n(t,f)$ — считающая функция полюсов, введем в рассмотрение также функцию

$$m_2(r,f)\equiv\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[\log|f(re^{i\vartheta})|]^2\,d\vartheta\right\}^{1/2}.$$

Майлс и Шиа [1] для целой мероморфной функции f порядка λ получили точную оценку следующего вида:

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{N(r,f)+N(r,1/f)}{m_2(r,f)}\geqslant c(\lambda), \tag{1}$$

где $c(\lambda)>0$ зависит только от λ.

Используя оценку (1) они уточнили установленную в работе [2] Эдрея и Фукса оценку снизу для величины

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N(r,f)+N(r,1/f)}{T(r,f)}.$$

Сонс [3], [4] получил аналогичные результаты в случае круга для семейства произведений $\pi_\alpha(z)$ $(-1<\alpha<+\infty)$ М. М. Джрбашяна [5], [6] при натуральных значениях параметра α (оценка вида (1) была получена лишь в случае $\alpha=1$). При этом эти произведения, по-видимому, ввиду отсутствия надлежащей научной информации, приписывались Цудзи [7].

Настоящая статья посвящена установлению оценки типа (1) для одного семейства классов мероморфных в полуплоскости функций обобщенно-ограниченного вида, введенных А. М. Джрбашяном в [8]. При этом, в основе результатов статьи лежат характеристические функции, восходящие к Цудзи (см., например, [9]).

2. Прежде чем сформулировать основные результаты статьи приведем ряд результатов, лежащих в их основе и введем некоторые обозначения.

Пусть последовательность комплексных чисел $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty$ лежит в нижней полуплоскости $G^{(-)} = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$, и такова, что при некотором $\alpha\ (-1 < \alpha < +\infty)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^{1+\alpha} < +\infty. \tag{2}$$

Тогда бесконечное произведение типа Бляшке А. М. Джрбашяна [10], [11]

$$B_\alpha(w) \equiv \prod_{k=1}^{\infty} b_\alpha(w;\ w_k), \tag{3}$$

где

$$b_\alpha(w;\ w_k) \equiv \exp\Big\{-\int_0^{|v_k|} \big([\tau + i(w - w_k)]^{-1-\alpha} +$$

$$+ [i(w - \overline{w}_k) - \tau]^{-1-\alpha}\big)\, \tau^\alpha\, d\tau\Big\}, \tag{4}$$

сходится в полуплоскости $G^{(-)}$, определяя там аналитическую функцию с нулями $\{w_k\}_1^\infty$.

В частном случае $\alpha = 0$ функция $B_\alpha(w)$ принимает вид

$$B_0(w) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{w - w_k}{w - \overline{w}_k}.$$

Ряд сущетсвенных свойств функции $B_\alpha(w)$ описывается посредством применения оператора интегро-дифференцирования $W^{-\alpha}$ Вейля.

Пусть $f(w) \equiv f(u + iv)$ — произвольная функция, определенная почти всюду в $G^{(-)}$. Оператор $W^{-\alpha}$ формально определяется следующим образом:

$$W^{-\alpha} f(u + iv) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{v} (v - t)^{\alpha - 1} f(u + it)\, dt \quad (0 < \alpha < +\infty),$$

$$W^{0} f(u + iv) \equiv f(u + iv),$$

$$W^{-\alpha} f(u + iv) \equiv W^{-(1+\alpha)} \frac{\partial}{\partial v} f(u + iv) \quad (-1 < \alpha < 0),$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

Следуя [8] обозначим через N_α^m $(0 < \alpha < +\infty)$ множество аналитических в нижней полуплоскости $G^{(-)}$ функций $f(w)$, подчиненных следующим условиям:

(а) Для любого $\rho < 0$ в полуплоскости $G_\rho^{(-)} = \{w : \operatorname{Im} w < \rho\}$ лежит не более чем конечное число нулей функции $f(w)$.

4—163

(б) Существует угловой сектор вида $\Lambda(\delta_0, R_0) = \left\{ w : \left| \frac{\pi}{2} + \arg w \right| \leqslant \delta_0,\ |w| \geqslant R_0 \right\}$ $\left(\text{где } 0 < \delta_0 < \frac{\pi}{2},\ 0 < R_0 < +\infty \right)$, такой, что для любого компакта $K \subset \Lambda(\delta_0, R_0)$

$$\sup_{w \in K} \left\{ \int_1^{\infty} \sigma^{p-1} |\log |f(w - i\sigma)|\, |\, d\sigma \right\} < +\infty,$$

где $p > 0$ — целое число такое что $p - 1 < \alpha \leqslant p$.

(в)

$$\sup_{v < 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log |f(u + iv)||\, du < +\infty.$$

В работе [8] установлено параметрическое представление классов N_α^m. Классы N_α^m совпадают с множествами аналитических в полуплоскости $G^{(-)}$ функций, допускающих факторизации

$$f(w) = B_\alpha(w) \exp\left\{ \Gamma(1+\alpha) \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{(w-t)^{1+\alpha}} + ic \right\}, \tag{5}$$

где $B_\alpha(w)$ — сходящиеся произведения типа Бляшке (3), (4), с нулями, подчиненными условию (2), c — вещественная постоянная, а функция $\mu(t)$ ограниченной вариации на оси $-\infty < t < +\infty$.

Пусть $f(w)$ — мероморфная в $G^{(-)}$ функция с нулями $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty$ и полюсами $\{z_k\}_1^\infty = \{t_k + i\rho_k\}_1^\infty$ $(\lim\limits_{k\to\infty} v_k = \lim\limits_{k\to\infty} \rho_k = 0)$. Для любого v $(-\infty < v < 0)$ введем в рассмотрение следующие величины:

$$E(v, f) \equiv \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} [W^{-\alpha} \log |f(u + iv)|]^2\, du \right\}^{1/2},$$

$$n(v, f) \equiv \sum_{v_k, \rho_k \leqslant v} 1,$$

$$N(v, f) \equiv \int_{-\infty}^{v} n(t, f)\, dt \equiv \sum_{v_k < v} (v - v_k) + \sum_{\rho_k < v} (v - \rho_k).$$

Будем говорить, что функция $N(v, f)$ имеет порядок λ, если

$$\varlimsup_{v \to -0} \frac{\log N(v, f)}{|\log |v||} = \lambda.$$

3. Приведем теперь основные результаты статьи. Они относятся к произведениям типа Бляшке $B_\alpha(w)$ и классам аналитических функций N_α^m обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости. Однако следует особо отметить, что аналогичные примененным в статье ме-

тоды в круге приводят к подобным результатам для произведений типа Бляшке $\pi_\alpha(z)$ и классов мероморфных функций N_α обобщенно-ограниченного вида М. М. Джрбашяна [5], [6], [12] (гл. IX).

Теорема 1. *Пусть последовательности комплексных чисел* $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty$ *и* $\{z_k\}_1^\infty \equiv \{t_k + i\rho_k\}_1^\infty$ *лежат в полуплоскости* $G^{(-)}$, *для фиксированного значения параметра* $\alpha\,(0 < \alpha < +\infty)$ *удовлетворяют условиям*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^{1+\alpha} < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\rho_k|^{1+\alpha} < +\infty, \tag{6}$$

и для какой-либо из функций

$$f_\alpha^{(1)}(w) \equiv B_\alpha(w; \{w_k\}) \equiv \prod_{k=1}^{\infty} b_\alpha(w; w_k),\ f_\alpha^{(2)}(w) \equiv \frac{B_\alpha(w; \{w_k\})}{B_\alpha(w; \{z_k\})},$$

$N(v, f_\alpha^{(1,2)})$ *имеет порядок* λ. *Тогда при* $\alpha - 1 < \lambda < \alpha$:

1°. *Справедлива оценка*

$$\varlimsup_{v \to -0} \frac{|v|^{\alpha-1/2} N(v, f_\alpha^{(1,2)})}{E(v, f_\alpha^{(1,2)})} \geqslant c_1(\alpha, \lambda), \tag{7}$$

где $c_1(\alpha, \lambda) > 0$ — *постоянная, зависящая лишь от* α *и* λ.

2°. *Если для некоторой последовательности* $v_n \to -0$.

$$E(v_n, f_\alpha^{(1,2)}) \geqslant |v_n|^{-\beta}, \text{ то } \beta \leqslant \lambda - \alpha + \frac{1}{2}.$$

Теорема 2. 1°. *Если функция* $f(w) \in N_\alpha^m$ *и* $\{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ *ее нули, то для функции* $g_\alpha(w) \equiv f(w)/B_\alpha(w; \{w_k\}) \in N_\alpha^m$ *справедлива формула*

$$[E(v, g_\alpha)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|x|v} |\hat{\mu}(x)|^2 dx, \tag{8}$$

где $\hat{\mu}(x)$ — *преобразование Фурье меры* $\mu(x)$ *из представления* (5)

$$\hat{\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} d\mu(t).$$

2°. *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ *удовлетворяет условию* (2) *при некотором* $\alpha\,(0 < \alpha < +\infty)$, *и функция* $N(v, B_\alpha(w; \{w_k\}))$ *имеет порядок* $\lambda\,(\alpha - 1 < \lambda < \alpha)$. *Тогда существуют функции* $f(w) \equiv B_\alpha(w; \{w_k\}) \times g_\alpha(w) \in N_\alpha^m$, *для которых*

$$\lim_{v \to -0} \frac{|v|^{\alpha-1/2} N(v, f)}{E(v, f)} = 0. \tag{9}$$

Теорема 3. *Если нули B_α лежат на конечном числе вертикальных полупрямых из $G^{(-)}$ и выполняется одно из следующих двух условий*

$$\text{а) } \alpha > 1, \text{ б) } \lim_{v \to -0} \frac{|v| \, n(v, B_\alpha)}{N(v, B_\alpha)} = \lambda, \ 0 < \lambda < \alpha, \text{ то}$$

$$\overline{\lim_{v \to -0}} \frac{|v|^{\alpha - 1/2} N(v, B_\alpha)}{E(v, B_\alpha)} \leqslant c_2(\alpha, \lambda). \tag{10}$$

Замечание 1. В теореме 3 по существу доказана точность выбора степени $\alpha - \dfrac{1}{2}$ величины $|v|$ в оценке (7). Вопрос об уточнении констант $c_{1,2}(\alpha, \lambda)$ в оценках (7) и (10) остается открытым, что, впрочем, имеет место в работах Сонс [5], [6] (оценки типа (10) у Сонса не имеется).

Замечание 2. Если при $-1 < \alpha \leqslant 0$ выполняются условия (6), то как нетрудно проверить

$$\lim_{v \to -0} N(v, f_\alpha^{(1,2)}) = N(0, f_\alpha^{(1,2)}) < +\infty,$$

поэтому, мы рассматриваем только положительные значения α.

4. Доказательства теорем 1—3 основаны на леммах этого и следующего пунктов.

Для мероморфной в полуплоскости $G^{(-)}$ функции $f(w) \equiv f(u + iv)$ формально обозначим

$$\Omega(x, v, f) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} W^{-\alpha} \log |f(u + iv)| \, du$$

$$(-\infty < x < +\infty, \ -\infty < v < 0, \ -1 < \alpha < +\infty).$$

Следующие две леммы доказаны в работе автора [13], где исследован вопрос об ограниченности величины $E(v, B_\alpha)$ при $v \to -0$.

Лемма 1. *Пусть последовательность комплексных чисел $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ удовлетворяет условию (2). Тогда для любых v $(-\infty < v < 0)$ и α $(-1 < \alpha < +\infty)$ преобразование Фурье $\Omega(x, v, B_\alpha(w; \{w_k\}))$ существует и определяется по формуле*

$$\Omega(x, v, B_\alpha(w; \{w_k\})) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ixu_k} \int_{-|v_k|}^{|v_k|} (|v_k| - |\tau|)^\alpha e^{-|x(\tau + v)|} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{sgn}(\tau + v) \, d\tau \ (-\infty < x < +\infty). \tag{11}$$

Лемма 2. *В условиях леммы 1, если $-\dfrac{1}{2} < \alpha < +\infty$, то для всех v $(-\infty < v < 0)$*

$$W^{-\alpha} \log |B_\alpha(u + iv; \{w_k\})| \in L_2(-\infty, +\infty),$$

ми справедливо равенство Парсеваля

$$[E(v, B_\alpha)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega(x, v, B_\alpha)|^2\, dx.$$

Отметим, что функция $W^{-\alpha} \log |b_\alpha(u+iv_k;\ w_k)|$ при $-1<\alpha\leqslant-\frac{1}{2}$ в класс $L_2(-\infty, +\infty)$ не входит (см. [13]).

Пусть последовательность $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k+iv_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ при некотором $\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ удовлетворяет условию (2). При $-\infty<x<$ $<+\infty$, $-\infty<v<0$ введем следующие обозначения:

$$K(x, v, B_\alpha) \equiv -\sum_{v_k<v} e^{-ixu_k} \int_{-|v_k|}^{|v_k|} (|v_k|-|\tau|)^\alpha e^{-|x(\tau+v)|}\, \mathrm{sgn}\,(\tau+v)\, d\tau, \quad (12)$$

$$L(x, v, B_\alpha) \equiv e^{|x|u} \sum_{v_k>v} e^{-ixu_k} \int_{-|v_k|}^{|v_k|} (|v_k|-|\tau|)^\alpha e^{|x|\tau}\, d\tau. \quad (13)$$

В силу формулы (11) имеем

$$\Omega(x, v, B_\alpha) \equiv -\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)}[K(x, v, B_\alpha)+L(x, v, B_\alpha)]. \quad (14)$$

Лемма 3. *Пусть последовательности $\{w_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ и $\{z_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$ при некотором $\alpha\left(-\frac{1}{2}<\alpha<+\infty\right)$ удовлетворяют условиям (6) Тогда если $f_\alpha^{(2)}$ — функция из теоремы 1, а функция F_α имеет вид.*

$$F_\alpha(w) \equiv B_\alpha(w;\ \{i\,\mathrm{Im}\, w_k\})\, B_\alpha(w;\ \{i\,\mathrm{Im}\, z_k\}),$$

то при любом $v\ (-\infty<v<0)$

$$E(v, f_\alpha^{(2)}) \leqslant E(v, F_\alpha). \quad (15)$$

Доказательство. Отметим сначала (см. [13]), что при $v_k\leqslant v$

$$\int_{-|v_k|}^{|v_k|} (|v_k|-|\tau|)^\alpha e^{-|x(\tau+v)|}\, \mathrm{sgn}\,(\tau+v)\, d\tau \leqslant 0.$$

Поэтому в силу формул (12)—(14)

$$|\Omega(x, v, f_\alpha^{(2)})| = |\Omega(x, v, B_\alpha(w;\ \{w_k\})) -$$
$$-\Omega(x, v, B_\alpha(w;\ \{z_k\}))| \leqslant |\Omega(x, v, B_\alpha(w;\ \{i\,\mathrm{Im}\, w_k\}))| +$$
$$+|\Omega(x, v, B_\alpha(w;\ \{i, \mathrm{Im}\, z_k\}))| = -\Omega(x, v, F_\alpha) = |\Omega(x, v, F_\alpha)|.$$

Отсюда и из леммы 2 следует (15).

5. Для удобства изложения условимся обозначать

$$K_\alpha(x, v) \equiv K(x, v, B_\alpha(w;\ \{i\,\mathrm{Im}\, w_k\})) + K(x, v, B_\alpha(w;\ \{i\,\mathrm{Im}\, z_k\})),$$

$$L_\alpha(x, v) \equiv L(x, v, B_\alpha(w; \{i \operatorname{Im} w_k\})) + L(x, v, B_\alpha(w; \{i \operatorname{Im} z_k\})),$$

и всюду писать $\Omega_\alpha(x, v)$, $N(t)$, $n(t)$, соответственно, вместо $\Omega(x, v, f_\alpha^{(1,2)})$, $N(t, f_\alpha^{(1,2)})$, $n(t, f_\alpha^{(1,2)})$.

Лемма 4. *При выполнении условий* (6)

$$\lim_{t\to -0} |t|^{1+\alpha} n(t) = 0 \ (-1 < \alpha < +\infty), \tag{16}$$

$$\lim_{t\to 1-0} |t|^{\alpha} N(t) = 0 \ (0 < \alpha < +\infty). \tag{17}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{0} (-t)^{1+\alpha} dn(t) < +\infty, \tag{18}$$

$$\lim_{v\to -0} \int_{v}^{0} (-t)^{1+\alpha} dn(t) = 0. \tag{19}$$

Для любого $\varepsilon < 0$, в силу (18)

$$+\infty > \int_{-\infty}^{\varepsilon} (-t)^{1+\alpha} dn(t) = (-\varepsilon)^{1+\alpha} n(\varepsilon) +$$

$$+ (1+\alpha) \int_{-\infty}^{\varepsilon} (-t)^{\alpha} n(t)\, dt \geqslant (1+\alpha) \int_{-\infty}^{\varepsilon} (-t)^{\alpha} n(t)\, dt,$$

тем самым

$$\int_{-\infty}^{0} (-t)^{\alpha} n(t)\, dt < +\infty.$$

Ввиду (19)

$$\lim_{v\to -0} \{ \lim_{t\to -0} (-t)^{1+\alpha} n(t) - (-v)^{\alpha} n(v) +$$

$$+ (1+\alpha \int_{v}^{0} (-t)^{\alpha} n(t)\, dt\} = 0,$$

и поскольку

$$(1+\alpha) \int_{v}^{0} (-t)^{\alpha} n(t)\, dt \geqslant (-v)^{1+\alpha} n(v),$$

то справедливо соотношение (16).

Применяя правило Лопиталя из (16) при $0 < \alpha < +\infty$ получим

$$\lim_{t\to -0} |t|^{\alpha} N(t) = \lim_{t\to -0} \frac{1}{\alpha} |t|^{1+\alpha} n(t) = 0.$$

Замечание. В силу леммы 4, если при $\alpha > 0$ выполнены условия (6) и $N(t)$ имеет порядок λ, то $\lambda \leqslant \alpha$.

Для оценивания $N(t)$ мы воспользуемся нижеприведенной леммой роста Пойа (см., напр., [14], лемма 4.7).

Лемма 5. *Предположим, что $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные положительные функции от t при $t \geqslant t_0$, $\psi(t)$ — неубывающая функция и далее, что*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \varphi(t) = +\infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = 0.$$

Тогда существуют сколь угодно большие значения r такие, что одновременно выполняются неравенства

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(r) \quad (t_0 \leqslant t < r)$$

и

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \leqslant \frac{\varphi(r)}{\psi(r)} \quad (r < t).$$

Пусть функция $N(t)$ имеет порядок λ. Полагая $\varphi(t) = N\left(-\frac{1}{t}\right) \Big/ t^{\lambda-\varepsilon}$, $\psi(t) = t^{2\varepsilon}$, где ε — малое положительное число, применим лемму 5. Это дает

$$N\left(-\frac{1}{t}\right) \Big/ t^{\lambda-\varepsilon} \leqslant N\left(-\frac{1}{r}\right) \Big/ r^{\lambda-\varepsilon} \quad (t < r),$$

$$N\left(-\frac{1}{t}\right) \Big/ t^{\lambda+\varepsilon} \leqslant N\left(-\frac{1}{r}\right) \Big/ r^{\lambda+\varepsilon} \quad (t \geqslant r).$$

Отсюда получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $t_n \to -0$ такая, что

$$N(t) \leqslant \left|\frac{t_n}{t}\right|^{\lambda-\varepsilon} N(t_n) \quad (-\infty < t \leqslant t_n), \tag{20}$$

$$N(t) \leqslant \left|\frac{t_n}{t}\right|^{\lambda+\varepsilon} N(t_n) \quad (t_n \leqslant t < 0). \tag{21}$$

6. **Доказательство теоремы 1.** Введем следующие обозначения:

$$\varphi_\alpha(t, v) \equiv -\int_t^{-t} (-t - |\tau|)^\alpha e^{-|x(\tau+v)|} \operatorname{sgn}(\tau + v)\, d\tau \quad (-\infty < t \leqslant v < 0),$$

$$\psi_\alpha(t, v) \equiv e^{|x|v} \int_t^{-t} (-t - |\tau|)^\alpha e^{|x|\tau}\, d\tau \quad (v \leqslant t < 0).$$

Нетрудно проверить (см. [13]), что при $\alpha \geqslant 0$

$$0 \leqslant \varphi_\alpha(t, v) \leqslant \frac{1 - e^{2|x|v}}{|x|} (-t)^\alpha, \tag{22}$$

$$\psi_\alpha(t, v) \leqslant e^{|x| v} \frac{e^{-|x| t} - e^{|x| t}}{|x|} (-t)^\alpha. \tag{23}$$

Это следует из очевидных равенств

$$\varphi_\alpha(t, v) = e^{|x|(v-t)} \int\limits_{v-t}^{-t} \tau^\alpha e^{-|x|\tau} d\tau +$$

$$+ e^{|x|(v+t)} \int\limits_0^{-t} \tau^\alpha e^{|x|\tau} d\tau - e^{|x|(t-v)} \int\limits_0^{v-t} \tau^\alpha e^{|x|\tau} d\tau,$$

$$\psi_\alpha(t, v) = e^{|x| v} \left\{ e^{-|x| t} \int\limits_v^{-t} \tau^\alpha e^{-|x|\tau} d\tau + e^{|x| t} \int\limits_0^{-t} \tau^\alpha e^{|x|\tau} d\tau \right\}. \tag{24}$$

Далее ,в силу формул (12), (13) и оценок (22), (23) имеем

$$K_\alpha(x, v) = \int\limits_{-\infty}^{v} \varphi_\alpha(t, v)\, dn(t) \leqslant \frac{1 - e^{2|x| v}}{|x|} \int\limits_{-\infty}^{v} (-t)^\alpha dn(t), \tag{24}$$

$$L_\alpha(x, v) \leqslant \int\limits_v^0 \psi_\alpha(t, v)\, dn(t) \leqslant \frac{e^{|x| v}}{|x|} \int\limits_v^0 (-t)^\alpha (e^{-|x| t} - e^{|x| t})\, dn(t). \tag{25}$$

Так как дробь $\dfrac{e^{-|x| t} - e^{|x| t}}{-t}$ $(v \leqslant t < 0)$ — невозрастающая функция от t, то из (25) следует также оценка

$$L_\alpha(x, v) \leqslant \frac{1 - e^{2|x| v}}{|x|\,|v|} \int\limits_v^0 (-t)^{1+\alpha} dn(t). \tag{26}$$

Произведя в интегралах (24) и (26) дважды интегрирование по частям, ввиду соотношений (16) и (17) получим

$$K_\alpha(x, v) \leqslant \frac{1 - e^{2|x| v}}{|x|} \Big\{ |v|^\alpha n(v) + \alpha |v|^{\alpha-1} N(v) +$$

$$+ \alpha(\alpha - 1) \int\limits_{-\infty}^{v} (-t)^{\alpha-2} N(t)\, dt \Big\}, \tag{27}$$

$$L_\alpha(x, v) \leqslant \frac{1 - e^{2|x| v}}{|x|} \Big\{ - |v|^\alpha n(v) - (1 + \alpha) |v|^{\alpha-1} N(v) +$$

$$+ \frac{\alpha(1 + \alpha)}{|v|} \int\limits_v^0 (-t)^{\alpha-1} N(t)\, dt \Big\}. \tag{28}$$

Для оценки интегралов в (27) и (28) воспользуемся неравенствами (20), (21). Это дает

$$\int\limits_{-\infty}^{t_n} (-t)^{\alpha-2} N(t)\, dt \leqslant \frac{N(t_n) |t_n|^{\alpha-1}}{\lambda - \alpha + 1 - \varepsilon}, \quad \text{при } \lambda > \alpha - 1,$$

$$\int_{t_n}^{0}(-t)^{\alpha-1} N(t)\, dt \leqslant \frac{N(t_n)\,|t_n|^{\alpha}}{\alpha-\lambda-\varepsilon}, \text{ при } \lambda<\alpha.$$

Остается заметить, что последние оценки ввиду лемм 2, 3, формул (14) и

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-e^{2|x|\,t_n}}{|x|}\right)^2 dx = 2\,|t_n| \int_{0}^{+\infty}\left(\frac{1-e^{-2x}}{x}\right)^2 dx,$$

приводят к утверждению 1° теоремы.

Доказательство 2° также получается из оценок (27) и (28). Так как $N(t)$ имеет порядок λ, то существует постоянная $c_0>0$ такая, что для любого малого $\varepsilon>0$ при $v\to-0$

$$\int_{-\infty}^{v}(-t)^{\alpha-2} N(t)\, dt < c_0 + \frac{|v|^{\alpha-\lambda-1-\varepsilon}}{\lambda-\alpha+1+\varepsilon}\ (\lambda \geqslant \alpha-1),$$

$$\int_{v}^{0}(-t)^{\alpha-1} N(t)\, dt \leqslant \frac{|v|^{\alpha-\lambda-\varepsilon}}{\alpha-\lambda-\varepsilon}\ (\lambda<\alpha).$$

Следовательно существует постоянная $c(\alpha,\lambda)>0$ такая, что для любого малого $\varepsilon>0$ при $v\to-0$

$$E(v, f_\alpha^{(1,2)}) \leqslant c(\alpha,\lambda)\,|v|^{\alpha-\lambda-1/2-\varepsilon}.$$

Отсюда очевидным образом следует утверждение 2°.

Доказательство теоремы 2. 1°. Воспользуемся следующим представлением (см. [8]):

$$W^{-\varepsilon}\log|g_\alpha(w)| = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{w-t}\right\}.$$

Отсюда в силу формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ixu}}{u^2+a^2}\, du = \frac{\pi}{|a|}\, e^{-|ax|}\ (a\neq 0)$$

(см. [15], стр. 323) и теоремы Фубини следует, что

$$\Omega(x, v, g_\alpha) = -\frac{v}{\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ixu}}{(u-t)^2+v^2}\, du =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu}\, d\mu(t) = \widehat{\mu}(x).$$

Однако $W^{-\varepsilon}\log|g_\alpha(w)| \in L_1(-\infty,+\infty)\cap L_2(-\infty,+\infty)$ и поэтому справедлива формула (8).

2°. Для любого β $(0<\beta<1)$ положим

$$\mu(t)=\begin{cases} 0, & \text{при } t\leqslant 0\\ -t^{1-\beta}, & \text{при } 0<t<1\\ 0, & \text{при } t\geqslant 1.\end{cases}$$

Тогда при $x>0$

$$\hat{\mu}(x)=(\beta-1)\int\limits_0^1 \frac{e^{-ixt}}{t^\beta}\,dt=(\beta-1)\,x^{\beta-1}\int\limits_0^x \frac{e^{-it}}{t^\beta}\,dt.$$

Поскольку

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-it}}{t^\beta}\,dt=\Gamma(1-\beta)\,e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\beta)}$$

(см. [15], стр. 322), то при $x>x_0$ 0

$$|\hat{\mu}(x)|>\frac{\Gamma(2-\beta)}{2}\,x^{\beta-1}.$$

Из последнего неравенства получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{|x|v}\,|\hat{\mu}(x)|^2\,dx>\frac{[\Gamma(2-\beta)]^2}{4}\int\limits_{x_0}^{+\infty} e^{xv}\,x^{2\beta-2}\,dx=$$

$$=\frac{[\Gamma(2-\beta)]^2}{4}\,|v|^{1-2\beta}\int\limits_{x_0|v|}^{+\infty} e^{-x}x^{2\beta-2}\,dx>c(\beta)\,|v|^{1-2\beta}, \qquad (29)$$

где $c(\beta)>0$ постоянная.

Так как при $\alpha\geqslant 0$ $W^{-\alpha}\log|B_\alpha(w)|\leqslant 0$ (см. [10], [11]) и $W^{-\alpha}\log|g_\alpha(w)|\leqslant 0$ по выбору $\mu(t)$, то для функции (5) в силу оценки (29) и представления (8) имеем

$$E(v,f)\geqslant E(v,\,g_\alpha)>\sqrt{c(\beta)}\,|v|^{1/2-\beta}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует $v_0<0$ такое, что при $v>v_0$

$$\frac{|v|^{\alpha-1/2}N(v,f)}{E(v,f)}<[c(\beta)]^{-1/2}\,|v|^{\alpha+\beta-1}N(v,f)\leqslant[c(\beta)]^{-1/2}\,|v|^{\alpha+\beta-1-\lambda-\varepsilon}.$$

Выбрав $\beta>\lambda-\alpha+1$, получаем (9).

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим сначала случай, когда нули B_α лежат на одной полупрямой, т. е. $\{w_k\}_1^\infty\subset\{w=u_0+ih:\ -\infty<h<0\}$ $(-\infty<u_0<+\infty)$. Тогда в силу формул (12)—(14) справедливо неравенство

$$|\Omega(x,v,B_\alpha)|\geqslant\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)}\left\{\int\limits_{-\infty}^{v}\varphi_\alpha(t,v)\,dn(t)+\int\limits_{v}^{0}\psi_\alpha(t,v)\,dn(t)\right\}. \qquad (30)$$

Применнив дважды интегрирование по частям в последних интегралах, получим

$$\int_{-\infty}^{v} \varphi_\alpha(t, v)\, dn(t) = n(v)\, \varphi_\alpha(v, v) - N(v) \frac{\partial \varphi_\alpha(v, v)}{\partial t} + $$
$$+ \int_{-\infty}^{v} N(t) \frac{\partial^2 \varphi_\alpha(t, v)}{\partial t^2}\, dt, \tag{31}$$

$$\int_{v}^{0} \psi_\alpha(t, v)\, dn(t) = \lim_{t \to -0} n(t)\, \psi_\alpha(t, v) - \lim_{t \to -0} N(t) \frac{\partial \psi'_\alpha(t, v)}{\partial t} -$$
$$- n(v)\, \psi_\alpha(v, v) + N(v) \frac{\partial \psi_\alpha(v, v)}{\partial t} + \int_{v}^{0} N(t) \frac{\partial^2 \psi_\alpha(t, v)}{\partial t^2}\, dt. \tag{32}$$

Легко можно проверить, что

$$\varphi_\alpha(v, v) = \psi_\alpha(v, v) = \int_{0}^{-v} \tau^\alpha e^{-|x|\tau}\, d\tau + e^{2|x|v} \int_{0}^{-v} \tau^\alpha e^{|x|\tau}\, d\tau,$$

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(v, v)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_\alpha(v, v)}{\partial t} = -|x| \int_{0}^{-v} \tau^\alpha e^{-|x|\tau}\, d\tau +$$
$$+ |x|\, e^{2|x|v} \int_{0}^{-v} \tau^\alpha e^{|x|\tau}\, d\tau - 2(-v)^\alpha e^{|x|v}.$$

Замечая теперь, что в силу леммы 4

$$\lim_{t \to -0} n(t)\, \psi_\alpha(t, v) = \lim_{t \to -0} N(t) \frac{\partial \psi_\alpha(t, v)}{\partial t} = 0,$$

из (30)—(32) получаем

$$|\Omega(x, v, B_\alpha)| \geqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)} \left\{ \int_{-\infty}^{v} N(t) \frac{\partial^2 \varphi_\alpha(t, v)}{\partial t^2}\, dt + \right.$$
$$\left. + \int_{v}^{0} N(t) \frac{\partial^2 \psi_\alpha(t, v)}{\partial t^2}\, dt \right\}. \tag{33}$$

Далее, нетрудно проверить, что при $\alpha > 1$

$$\frac{\partial^2 \varphi_\alpha(t, v)}{\partial t^2} = |x|^2 \varphi_\alpha(t, v) + 2\alpha(-t)^{\alpha-1} e^{|x|v} - 2\alpha(v-t)^{\alpha-1},$$
$$\frac{\partial^2 \psi_\alpha(t, v)}{\partial t^2} = |x|^2 \psi_\alpha(t, v) + 2\alpha(-t)^{\alpha-1} e^{|x|v}, \tag{34}$$
$$\frac{\partial^2 \varphi_\alpha(t, v)}{\partial t^2} = \alpha(\alpha-1)\, \varphi_{\alpha-2}(t, v) > 0. \tag{35}$$

Из формул (33), (34) и неравенства (35) вытекают следующие оценки:

$$|\Omega(x, v, B_\alpha)| \geqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\alpha)} \int_v^0 (-t)^{\alpha-1} N(t)\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1+\alpha)} e^{|x| v} |v|^\alpha N(v) \quad (\alpha > 1).$$

Отсюда, в силу леммы 2 при $\alpha > 1$

$$E(v, B_\alpha) \geqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1+\alpha)} |v|^{\alpha-1/2} N(v).$$

Предположим теперь, что выполнено условие б). В силу очевидных оценок

$$|\Omega(x, v, B_\alpha)| \geqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_v^0 \psi_\alpha(t, v)\, dn(t),$$

$$\psi_\alpha(t, v) \geqslant \frac{(-t)^{1+\alpha}}{1+\alpha} e^{|x| v},$$

по лемме 2 будем иметь

$$E(v, B_\alpha) \geqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Gamma(2+\alpha)} |v|^{-1/2} \int_v^0 (-t)^{1+\alpha}\, dn(t).$$

Далее, применяя дважды интегрирование по частям в последнем интеграле, приходим к оценке

$$\frac{|v|^{\alpha-1/2} N(v)}{E(v, B_\alpha)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\Gamma(2+\alpha)|v|^\alpha N(v)}{\sqrt{2\pi}\left\{-|v|^{1+\alpha} n(v) - (1+\alpha)|v|^\alpha N(v) + \alpha(1+\alpha)\int_v^0 (-t)^{\alpha-1} N(t)\, dt\right\}}. \tag{36}$$

Заметим теперь, что

$$\lim_{v\to-0} \frac{\int_v^0 (-t)^{\alpha-1} N(t)\, dt}{|v|^\alpha N(v)} =$$

$$= \lim_{v\to-0} \frac{-(-v)^{\alpha-1} N(v)}{-\alpha(-v)^{\alpha-1} N(v) + (-v)^\alpha n(v)} = \frac{1}{\alpha-\lambda}.$$

Следовательно (36) переходит в неравенство

$$\overline{\lim_{v\to-0}} \frac{|v|^{\alpha-1/2} N(v)}{E(v, B_\alpha)} \leqslant \frac{2\Gamma 2+\alpha)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha-\lambda}{\lambda(\lambda+1)}.$$

Доказательство утверждений теоремы в общем случае, когда

$\{w_k\}_1^\infty \subset \bigcup_{m=1}^{N} \{w = u_0^m + ih: -\infty < h < 0\}$ $(-\infty < u_0^m < +\infty, m=1, 2, \cdots, N)$

приводится к рассмотренному посредством оценок

$$[E(v, B_\alpha)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{m=1}^{N} \sum_{u_\nu = u_0^m} W^{-\alpha} \log' b_\alpha (u + iv; w_k)\right|^2 du \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{u_\nu = u_0^m} W^{-\alpha} \log |b_\alpha (u + iv; w_k)| \right]^2 du; \; m = 1, 2, \cdots, N,$$

которые вытекают из неравенства

$$W^{-\alpha} \log |b_\alpha (w; \zeta)| \leqslant 0 \quad (w; \zeta \in G^{(-)}, \alpha \geqslant 0).$$

Ереванский государственный
университет

Поступила 16. II. 1988

Գ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. Կիսահարթությունում ընդհանրացված-սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների աճի մասին (ամփոփում)

Կիսահարթությունում անալիտիկ $f(w) \equiv f(u + iv)$ *ֆունկցիաների Ա. Մ. Ջրբաշյանի մտցրած* N_α^m $(0 < \alpha < +\infty)$ *դասի համար ուսումնասիրվում է*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [W^{-\alpha} \log |f(u + iv)|]^2 \, du$$

մեծության աճի կապը զրոների հաշվման $N(v, f)$ *ֆունկցիայի աճի հետ (երբ* $v \to -0$), *որտեղ* $W^{-\alpha}$*-ն Վեյլի ինտեգրալ օպերատորն է։*

G. V. MIKAELIAN. *On the growth of generalized bounded type functions in the half-plane* (summary)

The interplay between

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [W^{-\alpha} \log |f(u + iv)|]^2 \, du$$

and functions which count the numder of zeros of $f(w) \equiv f(u + iv)$ as $v \to -0$ is investigated, where $W^{-\alpha}$ is the Weyl integral operator for the A. M. Djerbashian classes of analytic functions in the half-plane.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Miles, D. F. Shea.* An extremal problem in value-distribution theory, Quart. J. Math., Oxford, 1973, v. 24, № 95, 377—383.
2. *A. Edrei, W. H. J Fuchs.* On the growth of meromorphic functions with several deficident values, Trans. Amer. Math. Soc., 1959, v. 93, № 2, 292—328.
3. *L. R. Sons.* Value distribution of canonical products in the unit disc, Math. Japonica, 1977, v. 22, № 1, 27—38.

4. *L. R. Sons*. Zeros of functions with slow growth in the unit disc, Math. Japonica 1979, v. 24, № 3, 271—282.
5. *М. М. Джрбашян*. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН Арм.ССР, 1945, 3, № 1, 3—9.
6. *М. М. Джрбашян*. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Инст. мат. и мех. АН Арм.ССР, 1948, вып. 2, 3—40.
7. *M. Tsuji*. Potential Theory in Modern Function Theory, Tokyo, Maruzen, 1959.
8. *А. М. Джрбашян*. Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1986. XXI, № 3, 213—279.
9. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский*. Распределение значений мероморфных функций, М.: Наука, 1970.
10. *А. М. Джрбашян*. Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 1979. 246, № 6, 1295—1298.
11. *А. М. Джрбашян*. Функции типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1983, XVIII, № 6, 409—440.
12. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М.: Наука, 1966.
13. *Г. В. Микаелян*. Исследование роста произведений типа Бляшке-Неванлинны методом преобразований Фурье, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1983, XVIII, № 3, 216—229.
14. *У. К. Хейман*. Мероморфные функции, М., Мир, 1966.
15. *А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев*. Интегралы и ряды, М., Наука, 1981.