ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXV, № 2, 1990 Математика

УДК 517.946

Г. Р. ОГАНЕСЯН

ВКБ-ОЦЕНКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть $Q(t, x, D_x)$ — эллиптический, классический, псевдодифференциальный оператор (ПДО) порядка $\frac{1}{2}$, определенный при $t \in]0, T]$, $x \in R^n$ (например, $Q = \sqrt[4]{d(t, x) - \Delta}$, $d > 0$, Δ — оператор Лапласа) с неограниченным при $t \to 0$ символом $q(t, x, \xi)$:

$$\lim_{t \to 0} q(t, x, \xi) = \infty, \text{ равномерно по } (x, \xi) \in R^n \times R^n.$$

Хорошо известно (см. [1]—[7]), что сингулярную при $t = 0$ задачу Коши для гиперболического уравнения

$$L_y := (\partial_t^2 + Q^4(t, x, D_x))\, y(t, x) = 0, \quad (t, x) \in]0, T[\times R^n \tag{1.1}$$

надо ставить в весовой постановке. Это объясняется тем, что уравнение (1.1) может иметь решения стремящиеся к нулю либо не имеющие предела при приближении к начальной гиперплоскости $t = +0$, что приводит к тому, что данные Коши для таких уравнений теряют смысл.

Например, общее решение сингулярного уравнения

$$(\partial_t + \lambda'(t)\, \partial_x)\, u = a'(t)\, u(t, x), \quad a = t^{-10}, \quad \lambda = t^{-20}, \tag{1.2}$$

имеет вид ($C(x)$ — произвольная функция):

$$u(t, x) = C(x - \lambda(t)) \exp\{a(t)\} = \Phi(t)\, C(x),$$

здесь, если $\lambda(t)$ — вещественная функция, оператор $\Phi(t) = \exp\{a(t) - \lambda(t)\, \partial_x\}$ является интегральным оператором Фурье. Из вида общего решения мы получаем формальное соотношение

$$C(x) = \Phi^{-1}(t)\, u(t, x) = \lim_{t \to 0} \Phi^{-1} u = \{\exp(\lambda\, \partial_x - a)\}\, u(t, x),$$

которое мы будем трактовать как обобщение начального условия Коши, имеющего смысл при всех t, в частности, и при $t = 0$. Отметим, что оператор $\Phi(t)$ можно найти, решая задачу Коши для (1.2) с данными при $t = T > 0$, где уже нет особенностей.

В настоящей работе предлагается весовая постановка задачи Коши для уравнения (1.1), в которой начальные данные при $t = 0$ задаются с помощью весовых интегральных операторов Фурье. Идея этой постановки та же, что и для уравнения (1.2). Именно, из теории интегральных операторов Фурье ([10], [11]) известно, что общее решение уравнения (1.1) записывается в виде

$y = \tilde{\Phi}_1(t)\, C_1(x) + \tilde{\Phi}_2(t)\, C_2(x)$, где $\tilde{\Phi}_{1,2}$ — некоторые интегральные операторы Фурье (ИОФ). Дифференцируя это соотношение по t получаем систему

$$y = \tilde{\Phi}_1 C_1 + \tilde{\Phi}_2 C_2,\ y_t = \tilde{\Phi}_{1t} C_1 + \tilde{\Phi}_{2t} C_2, \tag{1.3}$$

разрешая которую относительно функций $C_{1,2}(x)$ мы получаем формальные соотношения (см. § 3):

$$C_j(x) = O^j_{\tilde{\Phi}}\, y \equiv ((\tilde{\Phi}^{-1}_{3-j} \tilde{\Phi}_j)_t)^{-1} (\tilde{\Phi}^{-1}_{3-j}\, y)_t,\ j = 1,\ 2, \tag{1.4}$$

которые трактуем как начальные условия

$$\lim_{t\to 0} O_{\tilde{\Phi}}(y) = C(x),\ C(x) = (C_1,\ C_2),\ O_{\tilde{\Phi}}(y) = (O^1_{\tilde{\Phi}}(y),\ O^2_{\tilde{\Phi}}(y)) \tag{1.5}$$

для уравнения (1.1).

Замечание 1.1. В случае регулярного уравнения (1.1) эта постановка начальной задачи эквивалентна (см. замечание 3.2 ниже) обычной задаче Коши, а в случае, когда оператор Q не зависит от x совпадает с вронскианной постановкой начальной задачи, предложенной в [5], [6].

Доказательство основного результата статьи об однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.5) (см. теорему 3 ниже) основано на применении ВКБ-оценок для уравнения в частных производных (теоремы 1, 2). Ранее ВКБ-оценки были известны, по-видимому, лишь для обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [9]), поэтому теоремы 1, 2, как нам кажется, представляют самостоятельный интерес.

Для каждого вещественного числа m через $S^m_{\varrho,\delta}$ мы обозначим класс символов Хёрмандера, а через S^m_{C} — класс классических (полиоднородных символов (см. [10], [11]). Обозначим, далее, через $\Psi^m_{\varrho,\delta}$ (Ψ^m_C) множество всех собственных ПДО с символами класса $S^m_{\varrho,\delta}$ (S^m_C). Пусть $H^s = H^s(\mathrm{R}^n)$ — пространство Соболева с нормой $\|u\|_s^2 = \int |E_s u(x)|^2\, dx$, где E_s — ПДО с символом $(1 + |\xi|^2)^{1/2}$. Пусть $C([0,\ T],\ H^s)$ — пространство непрерывных отображений $[0,\ T]$ в H^s, а $L_1([0,\ T],\ H^s)$ — пространство интегрируемых отображений $[0,\ T]$ в H^s.

Обозначим через P множество вещественных, положительных непрерывно дифференцируемых на $]0, T]$ функций $p(t)$, удовлетворяющих условиям

$$p'(t) > 0,\ p'(t)\, p^{-\frac{5}{4}}(t) \in L_2[0,\ T],\ \lim_{t\to 0} \frac{p'(t)}{p^{3/2}(t)} = 0. \tag{1.6}$$

Пример 1.2. Функции $p(t) = t^{-\gamma}$, $\exp\left(\frac{1}{t}\right)$, $t^{-2}(-\ln t)^{\gamma}$, $t \in$ $\in]0,\ 1[$ принадлежат классу P при $\gamma > 2$.

Если ПДО Q обратим, то имеют смысл следующие вспомогательные ПДО первого порядка:

$$\Lambda_{1,2}(t, x, D_x) = \pm iQ^2 - Q^{-1} Q_t. \qquad (1.7)$$

Обозначим через $\Phi_j(t, T)$, $j=1, 2$ разрешающие операторы следующих гиперболических псевдодифференциальных уравнений первого порядка:

$$\partial_t \omega_j(t, x) = \Lambda_j(t, x, D_x)\, \omega_j(t, x), \; j=1, 2, \qquad (1.8)$$

переводящие $\omega_j(T,\cdot)$ в $\omega_j(t,\cdot)$, т. е.

$$\omega_j(t,\cdot) = \Phi_j(t, T)\, \omega_j(T,\cdot). \qquad (1.9)$$

Отметим также, что Φ_j являются точными решениями операторных задач Коши

$$\partial_t \Phi_j(t, T) = \Lambda_j(t, x, D_x)\, \Phi_j(t, T), \; \Phi_j(T, T) = I. \qquad (1.10)$$

Для краткости мы будем иногда писать Φ вместо $\Phi_1(t, T)$.

Замечание 1.3. Для существования операторов Φ_j, Φ_j^{-1} при $t>0$ достаточно предположить (см. лемму 2.1 в следующем параграфе или [10], [11]), что Q обратим

$$q(t,\cdot,\cdot) \in C^2(]0, T], C^\infty(R^{2n})), \qquad (1.11)$$

$\Lambda_j \in \Psi^1_c$ и главный символ $i\Lambda_j$ является вещественной функцией. (1.12)
Для наших целей нужны еще равномерные по $t \in [0, T]$ оценки нормы оператора $F = \Phi^{-1} \Phi_2$ (см. лемму 2.2 в следующем параграфе), поэтому мы накладываем более жёсткие ограничения на Q (см. условие iii) ниже).

Пусть

i). Оператор Q однозначно обратим в $H^{-\infty} = \bigcup\limits_s H^s$,

ii). $t \to q(t,\cdot,\cdot)$ является дважды непрерывно дифференцируемым отображением $]0, T]$ в $C^\infty(R^{2n})$, причём существует функция $p(t) \in P$ такая, что

$$p^{-\frac{1}{4}} Q \in \Psi^{\frac{1}{2}}, \; p^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{p(t)}{p'(t)}\right)^j \partial_t^j Q \in \Psi^0, \; j=1, 2, \qquad (1.13)$$

$$p^{\frac{1}{4}} Q^{-1} \in \Psi^0, \qquad (1.14)$$

$$\frac{1}{p'(t)}\, p^{\frac{3}{4}}(t)\, [Q, Q] \in \Psi^{-\frac{1}{2}}, \qquad (1.15)$$

где через [,] обозначен коммутатор

iii). $Q^2 - (Q^2)^* \in \Psi^0$, $[\Phi(T, t)\, Q^2\, \Phi(t, T), E_s] \in \Psi^s$ равномерно по $t \in [0, T]$.

Отметим, что условию i) удовлетворяет эллиптический ПДО Q, зависящий от параметра t. Это вытекает из следующего предложения (см. [8]):

Предложение 1.4. *Для любых* $C>0$, $\delta>0$ *и* $s>0$ *можно указать такие* $N>0$ *и* $\varepsilon>0$, *что если*

$$\delta(1+|\xi|)^m < p(x, \xi), \tag{1.16}$$

$$|p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leqslant \begin{cases} c(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|}, & |\beta|=0, \\ \varepsilon(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|}, & |\beta|\neq 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

для всех мультииндексов α, β *таких, что* $|\alpha+\beta|<N$, *то оператор* $P(x, D)$ *осуществляет изоморфизм между* H^{s+m} *и* H^s.

Сформулируем основные результаты настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* i), iii), (1.11), (1.12) *и существуют положительные функции* $\beta_{1,2}\in L_1[0, T]$ *такие, что для всех* $t\in[0, T]$

$$\frac{1}{\beta_1(t)} Q^{-2}(Q^{-1})_{tt} Q, \quad \frac{1}{\beta_2(t)} Q^{-3}[Q_t, Q]\, Q\in\Psi^0. \tag{1.18}$$

Тогда для произвольных $C_j(x)\in H^s$ *уравнение (1.1) имеет решения* $y_{1,2}$, *представимые в виде*

$$y_{1,2}(t, x)=\Phi_j(t, T)\{C_j(x)+\varepsilon_j(t, x)\}, \quad j=1, 2, \tag{1.19}$$

где

$$\lim_{t\to 0}\|\varepsilon_j(t,\cdot)\|_s=0, \quad j=1, 2. \tag{1.19'}$$

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1 и существует положительная функция* $\gamma(t)$ *такая, что*

$$\lim_{t\to 0}\gamma(t)=0, \quad \frac{1}{\gamma(t)} Q^{-3} Q_t\in\Psi^0, \quad t\in[0, T], \tag{1.20}$$

то существуют линейно независимые решения $y_{1,2}$ *уравнения* (1.1), *удовлетворяющие соотношениям* (1.19), (1.19′), *причем эту асимптотику можно дифференцировать по* t, т. е.

$$\partial_t y_j=\Phi_{jt}(t, T)\{C_j(x)+\varepsilon_{j+2}(t, x)\}, \quad j=1, 2, \tag{1.21}$$

или

$$\partial_t y_j=i^{2j-1} Q^2\Phi_j(t, T)\{C_j(x)+\varepsilon_{j+4}(t, x)\}, \quad j=1, 2, \tag{1.22}$$

где

$$\lim_{t\to 0}\|\varepsilon_j(t,\cdot)\|_s=0, \quad j=1,\cdots, 6. \tag{1.23}$$

Замечание. Теоремы 1,2 остаются справедливыми, если интервал $]0, T[$ заменить на $[T, \infty[$, а в соотношениях (1.19′), (1.23) заменить $t\to 0$ на $t\to\infty$.

Теорема 3. *В условиях* i) — iii) *уравнение* (1.1) *с начальными условиями*

$$\lim_{t\to 0}\{\Phi_j(T, t)(Q^{-2}\partial_t+i^{2j-1})\, y\}=C_j(x), \quad j=1, 2, \tag{1.24}$$

при $C_j(x)\in H^{s+\kappa}$ *имеет единственное решение* $y\in C^1(]0, T], H^s)$, *причём имеют место оценки*

$$\|\partial_t^k y\|_s < cp^{\frac{2k-1}{4}}(t)\{\|C_1\|_{s+\alpha} + \|C_2\|_{s+\alpha}\},\ k=0,\ 1,\ 2. \tag{1.25}$$

Здесь постоянная с зависит только от постоянных, фигурирующих в ii), а

$$\alpha = \begin{cases} 1/2, & k=0, \\ 1, & k=1, \\ 2, & k=2, \end{cases} \tag{1.25'}$$

§ 2. ВКБ-оценки для уравнения (1.1)

Уравнение (1.1) заменой

$$u_1 = \frac{1}{2i} Q^{-2}(\partial_t - \Lambda_2) y,\ u_2 = \frac{i}{2} Q^{-2}(\partial_t - \Lambda_1) y \tag{2.1}$$

сводится к системе

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Lambda_1) u_1 &= S(u_1 + u_2) + R(u_1 - u_2), \\ (\partial_t - \Lambda_2) u_2 &= -S(u_1 + u_2) - R(u_1 - u_2), \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$S = \frac{i}{2} Q^{-2}(Q^{-1})_{tt} Q,\ R \equiv \frac{1}{2} Q^{-3}[Q_t,\ Q]\, Q. \tag{2.3}$$

Отметим, что т. к. операторы S и R имеют нулевой порядок, а $\Lambda_{1,2}$ — ПДО первого порядка, то смысл преобразования (2.1) в том, что преобразованная система (2.2) является почти диагональной.

Обозначим через $\Phi_j^{-1} = \Phi_j(T,\ t)$ операторы, обратные к $\Phi_j = \Phi_j(t,\ T)$, которые будут существовать благодаря эллиптичности ИОФ Φ_j.

Преобразованием

$$u_j(t,\cdot) = \Phi(t,\ T)\, z_j(t,\cdot),\ \Phi \equiv \Phi_1,\ j = 1,\ 2, \tag{2.4}$$

из системы (2.2) получаем

$$\begin{aligned} z_{1t} &= S_\Phi(z_1 + z_2) + R_\Phi(z_1 - z_2), \\ z_{2t} + (\Lambda_1 - \Lambda_2)_\Phi z_2 &= -S_\Phi(z_1 + z_2) - R_\Phi(z_1 - z_2), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$S_\Phi = \Phi(T,\ t)\, S\, \Phi(t,\ T). \tag{2.6}$$

Далее заменой $z_2 = F(t,\ T)\, z_3$, где $F = F(t,\ T)$ — точное решение операторной задачи Коши

$$\partial_t F + (\Lambda_1 - \Lambda_2)_\Phi F(t,\ T) = 0,\ F|_{t=T} = I, \tag{2.7}$$

второе уравнение системы (2.2) примет вид

$$z_{3t} = -F(T,\ t)\,[S_\Phi(z_1 + z_2) + R_\Phi(z_1 - z_2)].$$

Интегрируя по t $[0, T]$ полученное уравнение и первое уравнение системы (2.5) получим систему интегродифференциальных уравнений

$$z_1(t)=C_1(x)+\int_0^t [S_\Phi(z_1+z_2)+R_\Phi(z_1-z_2)](\tau, x)\,d\tau,$$

$$z_2(t)=F(t, T)\,C_2(x)+\int_0^t F(t, T)\,F(T, \tau)\{R_\Phi(z_2-z_1)-S_\Phi(z_1+z_2)\}\,d\tau. \tag{2.8}$$

Из (2.7), обозначив

$$\rho(t)=F(t, T)\,\rho(T), \tag{2.9}$$

получим задачу Коши

$$\rho_t+2i\,\Phi(T, t)\,Q^2\,\Phi(t, T)\,\rho(t)=0, \ \rho|_{t=T}=1. \tag{2.10}$$

Рассмотрим вспомогательное ПД уравнение первого порядка

$$\sigma_\tau+a(\tau, x, D_x)\,\sigma(\tau, x)=0, \ \tau\in]\tau_1, \tau_2[. \tag{2.11}$$

Будем предполагать, что

а). Символ $a(\tau, x, \xi)$ принадлежит ограниченному множеству в $S^1(R^{2n})$ при $\tau\in[\tau_1, \tau_2]$,

б) $\tau\to a(\tau, x, \xi)$ является непрерывным отображением $[\tau_1, \tau_2]$ в $C^\infty(R^{2n})$,

в) $a\in S^1_c$ и главный символ a чисто мнимый.

Хорошо известна следующая (см. [11], теорема 23. 1.2)

Лемма 2.1. *В условиях* а), б), в) *для любого вещественного* s *и* $\sigma(\tau_j,\cdot)\in H^s$, $j=1, 2$ *существует единственное решение* $\sigma\in C([\tau_1, \tau_2], H^s)$ *уравнения* (2.11) *с начальными условиями*

$$\sigma(\tau,\cdot)|_{\tau=\tau_j}=\sigma(\tau_j,\cdot), \ j=1, 2,$$

причём любое решение σ *удовлетворяет оценкам*

$$\|\sigma(\tau_2)\,e^{-\lambda\tau_2}\|_s\leqslant\|\sigma(\tau)\,e^{-\tau\lambda}\|_s\leqslant\|\sigma(\tau_1)\,e^{-\tau_1\lambda}\|_s,$$

$$\|\sigma(\tau_1)\,e^{\lambda\tau_1}\|_s\leqslant\|\sigma(\tau)\,e^{\tau\lambda}\|_s\leqslant\|\sigma(\tau_2)\,e^{\lambda\tau_2}\|_s, \tag{2.12}$$

где λ — *достаточно большая постоянная, зависящая от символа* $a(\tau, x, \xi)$ *и* s *и не зависящая от* $\sigma(\tau)$, τ_1, τ_2.

Замечание. Из леммы 2.1 следует существование ИОФ Φ_j, Φ_j^{-1} при $t>0$. Уравнение (1.8) преобразованием

$$\tau=\int_t^T \sqrt{p(s)}\,ds, \ a=\pm\, ip^{-\frac{1}{2}}\Lambda_j(t, x, D_x)\circ t(\tau), \ \sigma(\tau)=\omega(t)\circ t(\tau), \tag{2.13}$$

сводится к (2.11) с $\tau_2 = \infty$. Применение оценок (2.12) к (2.11) приводит к экспоненциально растущей при $t \to 0$ норме оператора $F(T, t)$. Это делает невозможным обращение интегродифференциальных уравнений (2.8). Ужесточив требования леммы 2.1 в следующей лемме 2.2 мы добьёмся ограниченности нормы оператора F, что позволит получить утверждение теоремы 1.

Лемма 2.2. *Если равномерно по $t \in [0, T]$ выполнены условия*

$$Q^2 - (Q^2)^* \in \Psi^0, \tag{2.14}$$

$$E_{-s}[(Q^2)_\Phi, E_s] \in \Psi^0, \tag{2.15}$$

то для любой функции $v(T, \cdot) \in H^s$, непрерывно зависящей от параметра $T > O$, справедливы оценки

$$\frac{1}{c}\|v(T,\cdot)\|_s \leqslant \|F(t, T)\, v(T,\cdot)\|_s \leqslant c\,\|v(T,\cdot)\|_s, \tag{2.16}$$

где постоянная c зависит только от символа оператора Q и s.

Доказательство. Из (2.14) и теоремы Егорова (см. [12]) следует, что

$$\Phi(T, t)\,((Q^2)^* - Q^2)\,\Phi(t, T) \in \Psi^0.$$

Отметим, что здесь теорема Егорова применима, т. к. из условия $p^{-\frac{1}{4}} Q \in \Psi^{\frac{1}{2}}$ следует, что операторное уравнение $\Phi_t = \Lambda\Phi$ с особенностью при $t = 0$ сводится к уравнению без особенностей $\tilde{\Phi}_\tau = p^{-\frac{1}{2}}\,\bar{\Lambda}\,\bar{\Phi}$, $\bar{\Phi}(\tau) = \Phi(t) \circ t(\tau)$.

Далее, из уравнения (2.10) и равенства

$$-\partial_t(\rho, \bar{\rho}) = -(\rho_t, \bar{\rho}) - (\rho, \bar{\rho}_t) = 2i\,(((Q^2)_\Phi - (Q^2)^*_\Phi)\,\rho, \bar{\rho})$$

получаем оценку $\partial_t \|\rho\|^2 \leqslant c\,|\rho|^2$. Из этой оценки заменой $\rho \to E_s\rho$, $(Q^2)_\Phi \to E_s(Q^2)_\Phi\, E_{-s}$ ввиду (2.15), получаем оценки $-c \leqslant \frac{1}{\|\rho\|_s}\partial_t\|\rho\|_s \leqslant c$.

Интегрируя последние оценки по $[t, T]$ получим неравенства

$$e^{-cT}\|\rho(T,\cdot)\|_s \leqslant \|\rho(t,\cdot)\|_s \leqslant e^{cT}\|\rho(T,\cdot)\|_s, \tag{2.17}$$

из которых и вытекают (2.16).

Перейдем к оценке решений $z_{1,2}$ системы (2.8).

Из условий (1.18) и теоремы Егорова следует, что $\frac{1}{\beta_1} S_\Phi$, $\frac{1}{\beta_2} R_\Phi \in \Psi^0$, т. к. функция, зависящая только от t, очевидно, коммутирует с оператором $\Phi(t, T)$. Отсюда, в силу теоремы о непрерывности ПДО класса Ψ^0 в пространствах Соболева ([10]—[12]), получаем для любых $u \in H^s$ оценки

$$\frac{1}{\beta_1(t)}\|S_\Phi u\|_s,\ \frac{1}{\beta_2(t)}\|R_\Phi u\|_s \leqslant c\,\|u\|_s.$$

Применяя эти оценки и лемму 2.2 к системе (2.8) и обозначив $\beta = \beta_1 + \beta_2(\tau)$, получим

$$\|z_j(t,\cdot)\|_s \leqslant \|C_j\|_s + c\int_0^t \beta(\tau)(\|z_1\|_s + \|z_2\|_s)(\tau,\cdot)\,d\tau,\; j = 1, 2. \tag{2.24}$$

Сложив оценки (2.24) и применяя лемму Гронуолла ($\beta(\tau) \in L_1[0, T]$), получим

$$\|z_1(t,\cdot)\|_s + \|z_2(t,\cdot)\|_s \leqslant (\|C_1\|_s + \|C_2\|_s)\exp\left(2c\int_0^t \beta(s)\,ds\right).$$

Применив эти оценки ещё раз к (2.8) получим, что величины

$$\|z_1(t,\cdot) - C_1\|_s,\; \|z_2(t,\cdot) - F(t, T)\, C_2\|_s$$

мажорируются сверху выражением

$$\frac{1}{2}\left(-1 + \exp\left(2c\int_0^t \beta(s)\,ds\right)\right)(\|C_1\|_s + \|C_2\|_s).$$

Возвращаясь к обозначениям $z_j = \Phi^{-1} u_j$ получим

$$\|\Phi(T, t)\, u_1 - C_1\|,\; \|\Phi(T, t)\, u_2 - F(t, T)\, C_2\|_s \leqslant \frac{-1 + \exp\left(2c\int_0^t \beta(s)\,ds\right)}{2} \tag{2.25}$$

Доказательство теоремы 1. Обозначив через $y_{1,2}(t, x)$ решения уравнения (1.1), которые получаются из (2.8) при $C_2 \equiv 0$ и $C_1 \equiv 0$, соответственно, из (2.1) имеем

$$y = u_1 + u_2,\; y_t = \Lambda_1 u_1 + \Lambda_2 u_2, \tag{2.26}$$

поэтому при $C_2 \equiv 0$, ввиду (2.25), получаем

$$\|\Phi(T, t)\, y_1 - C_1\|_s \leqslant \|\Phi^{-1} u_1 - C_1\|_s + \|\Phi^{-1} u_2\|_s \leqslant$$

$$\leqslant \left\{-1 + \exp\left(2c\int_0^t \beta(s)\,ds\right)\right\}. \tag{2.27}$$

Аналогично при $C_1 \equiv 0$ получаем

$$\|\Phi(T, t)\, y_2 - FC_2\|_s \leqslant \|\Phi^{-1} u_1\|_s + \|\Phi^{-1} u_2 - FC_2\|_s \leqslant$$

$$\leqslant \left\{-1 + \exp\left(2c\int_0^t \beta\, ds\right)\right\}. \tag{2.28}$$

Из этих оценок, обозначив $\varepsilon_2 = F^{-1}(\Phi^{-1} y_2 - FC_2)$, $\varepsilon_1 = \Phi(T, t)\, y_1(t,\cdot) - C_1$, получим (1.19), (1.19′) и утверждение теоремы 1, учитывая, что

$$\Phi_2(t, T) = \Phi_1(t, T) F(t, T). \tag{2.29}$$

Последнее соотношение следует из того, что операторы $\Phi_2(t, T)$ и $\Phi_1 F$ являются решениями задачи Коши (1.10) при $j = 2$, которая, в силу леммы 2.1 имеет единственное решение.

Доказательство теоремы 2. Из предположения (1.20), оценок (2.25) и соотношения (2.29) имеем при $C_2 \equiv 0$:

$$\|\Phi^{-1} Q^{-2} y_{1t} - iC_1\|_s \leq \|(Q^{-2} \Lambda_2)_\Phi \Phi^{-1} u_2\|_s + \|(Q^{-2} \Lambda_1)_\Phi C_1 - iC_1\|_s +$$

$$+ \|(Q^{-2} \Lambda_1)_\Phi (\Phi^{-1} u_1 - C_1)\|_s \leq c\left(\gamma(t) - 1 + \exp\left(2c \int_0^t \beta\, ds\right)\right), \tag{2.30}$$

т. к. из (1.7), (1.20) следует, что $\Phi^{-1} Q^{-2} \Lambda_j \Phi \in \Psi$, $j = 1, 2$.
Аналогично, при $C_1 \equiv 0$ получаем

$$\|\Phi^{-1} Q^{-2} y_{2t} + iFC_2\|_s \leq \|(Q^{-2} \Lambda_2)_\Phi (\Phi^{-1} u_2 - FC_2)\|_s + \|(Q^{-2}\Lambda_1)_\Phi \Phi^{-1} u_1\|_s +$$

$$+ \|((Q^{-2} \Lambda_2)_\Phi + i) F C_2\|_s \leq c\left(\gamma(t) - 1 + \exp\left(2c \int_0^t \beta\, ds\right)\right). \tag{2.31}$$

Представление (1.22) получается из 2.30), (2.31), если ввести обозначения

$$\varepsilon_5 = - i\Phi^{-1} Q^{-2} y_{1t} - C_1, \quad \varepsilon_6 = iF^{-1}\{\Phi^{-1} Q^{-2} y_{2t} + iF C_2\}.$$

Формула (1.21) следует из (1.22).

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось показать линейную независимость решений y_1 и y_2, для чего достаточно показать, что из

$$y_1 + y_2 = \Phi_1 C_1 (1 + \varepsilon_1) + \Phi_2 C_2 (1 + \varepsilon_2), \tag{2.32}$$

для всех $(t, x) \in]0, T] \times R^n$ следует $C_1(x) = C_2(x) = 0$.
Ввиду (1.21) имеем также

$$y_{1t} + y_{2t} = \Lambda_1 \Phi_1 (1 + \varepsilon_3) + \Lambda_2 \Phi_2 C_2 (1 + \varepsilon_4) = 0. \tag{2.33}$$

Подействовав на (2.32) оператором Λ_1 слева и вычитая (2.33), получим

$$C_2 (1 + \varepsilon_1) = \Phi_2 (T, t) (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \{\Lambda_1 \Phi_1 C_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) +$$
$$+ \Lambda_2 \Phi_2 C_2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_4)\} = o(1), \; t \to 0, \; x \in R^n,$$

откуда следует, что $C_2(x) \equiv 0$. Аналогично, из (2.32), (2.33) следует $C_1(x) \equiv 0$.

§ 3. Упрощение начальных условий и энергетические оценки элементарных гиперболических уравнений

Из формулы (1.5) следуют формулы преобразования оператора $O_{\tilde\Phi}(y)$ относительно а) обратимого преобразования $B: y = Bv$, $\Phi_j^* = B^{-1}\tilde{\Phi}_j$,

$$O_{\tilde{\Phi}}(y) = O_{\Phi^*}(y),$$

б) преобразования подобия $v = A^{-1}yA$, $\Psi_j = A^{-1}\Phi_j A^{-1}$, где A — обратимый оператор, не зависящий от t:

$$O_{\Psi}(v) = A^{-1}O_{\tilde{\Phi}}(y)A,$$

в) преобразования $f: \tau \to t$, $x \to x$:

$$O_{\tilde{\Phi}}(y) = O_{\Phi^*}(y^*),$$

здесь

$$\Phi^* = \tilde{\Phi}(t) \circ t(\tau), \quad y^* = y(t) \circ t(\tau).$$

Отметим, что при $t = 0$ преобразования а), в) могут быть вырожденными или сингулярными.

Определение 3.1. Начальные данные мы будем называть эквивалентными, если они отличаются преобразованиями, указанными в а), б), в) или же отличаются от $O_{\tilde{\Phi}}(y)$ на величину, стремящуюся к нулю при $t \to 0$.

Замечание 3.2. Если уравнение (1.1) регулярное, т. е. $q^i(t, \cdot) \in L_1[0, T]$, то нетрудно показать, что $\tilde{\Phi}_1 \sim 1$, $\tilde{\Phi}_2 \sim t$, $t \to 0$, и (1.5) эквивалентно обычной задаче Коши.

Отметим также, что если операторы $\tilde{\Phi}_j$ и $\tilde{\Phi}_{jt}$ коммутируют (а это имеет место, если, например, коэффициенты уравнения (1.1) не зависят от пространственных переменных x), то постановка задачи (1.5) совпадает с вронскианной постановкой начальной задачи, предложенной в [5], [6].

Покажем, что пользуясь представлениями (1.19), (1.22) формулу (1.4) можно упростить. Действительно, действуя оператором $-iQ^{-2}$ на представление

$$y_t = iQ^2[\Phi_1(C_1 + \varepsilon_3) - \Phi_2(C_2 + \varepsilon_0)]$$

и сложив с равенствами

$$\pm y = \pm \Phi(C_1 + \varepsilon_1) \pm \Phi_2(C_2 + \varepsilon_2)$$

получим, учтя (2.29), после несложных преобразований, соотношения

$$\Phi^{-1}(y - iQ^{-2}y_t) = 2C_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + F(\varepsilon_2 - \varepsilon_0),$$

$$\Phi_2^{-1}(y + iQ^{-2}y_t) = 2C_2 + \varepsilon_2 - \varepsilon_0 + F(\varepsilon_1 - \varepsilon_3),$$

из которых следуют начальные условия (1.24).

Перейдем к получению энергетических оценок для ПД уравнений (1.8). Заменой

$$v = Q\omega_j, \tag{3.1}$$

получаем из (1.8) уравнение

$$v_t = \pm i Q^2 v. \tag{3.2}$$

Т. к. уравнение (3.2) получается из (2.10) заменой $2(Q^2)_\Phi \to \pm Q^2$, то из леммы 2.2 получаем оценку

$$\|v(t,\cdot)\|_s \leqslant c\|v(T,\cdot)\|_s, \ t\in[0,\ T]. \tag{3.3}$$

Далее т.к. $p^{-\frac{1}{4}} Q \in \Psi^{\frac{1}{2}}$, то

$$\|Q\,\omega_j(t)\|_s < c\|v(T,\cdot)\|_s \leqslant \|\omega_j(T,\cdot)\|_{s+\frac{1}{2}}, \tag{3.4}$$

или, т. к. $\omega_j(t,\cdot) = \Phi_j\,\omega_j(T,\cdot)$, то эту оценку можно переписать в виде

$$\|Q\,\Phi_j(t,\ T)\,\omega_j(T,\cdot)\|_s \leqslant c\|\omega_j(T,\cdot)\|_{s+\frac{1}{2}}. \tag{3.5}$$

Лемма 3.3. *В условиях i) — iii) любое решение уравнения* (1.8) *удовлетворяет оценкам*

$$\|\partial_t^k \omega_j(t,\cdot)\|_s \leqslant c\,p^{\frac{2k-1}{4}}(t)\,\|\omega_j\ (T,\cdot)\|_{s+\alpha},\ k=0,\ 1,\ j=1,\ 2, \tag{3.6}$$

где α определяется по формуле (1.25′), *или*

$$\|\partial_t^k \Phi_j\,\omega_j(T,\cdot)\|_s < c p^{\frac{2k-1}{4}}(t)\|\,\omega_j(T,\cdot)\|_s,\ k=0,\ 1,\ j=1,\ 2. \tag{3.6′}$$

Оценка (3.6) при $k=0$ следует из (3.4) и $p^{\frac{1}{4}}\ Q^{-1}\in\Psi^{\circ}$. Далее левая часть (3.6) при $k=1$ оценивается сверху через

$$p^{\frac{1}{4}}\left(\|Q\,\omega_j\|_{s+\frac{1}{4}} + \|Q^{-2}\,Q_t\,\omega_j\|_{s+\frac{1}{4}}\right) \leqslant p^{\frac{1}{4}}\left(\|\omega_j(T,\cdot)\|_{s+1} + \|Q^{-3}\,Q_t\,\omega_j(T,\cdot)\|_{s+1}\right),$$

откуда и следует (3.6) при $k=1$.

Перейдем к получению оценок (1.25) для начальной задачи (1.1), (1.24). Оценки (1.25) при $k=0$ получаются из $y=y_1+y_2$, (1.19) и (3.6). Остальные случаи доказываются аналогично. Для завершения доказательства теоремы 3 остается показать, что из *ii*) следуют условия (1.18), (1.20). Это вытекает из теоремы о композиции ПДО (см. [10]—[12]) при выборе

$$\beta_1(t) = p_t^2\,p^{-\frac{5}{2}}(t),\ \beta_2(t) = p_t\,p^{-\frac{5}{4}},\ \gamma(t) = p_t\ p^{-\frac{3}{2}}.$$

Пример. Рассмотрим гиперболическое уравнение вида

$$y_{tt} - \mu(t,\ x)\,y_{xx} + \sigma(t,\ x)\,y_x + d(t,\ x)\,y\,(t,\ x) = 0,\ (t,\ x)\in\,]0,\ T[\,\times R,$$

где μ и d — вещественные функции, $\mu(t,\ x)\geqslant c>0$, μ, $\sigma\in C^\infty([0,\ T]\times\times R)$. Пусть существует функция $p(t)\in P$ такая, что для всех $(t,\ x)\in\in[0,\ T]\times R$.

$$d(t,x) \geqslant cp(t), \ |\partial_x^\alpha d| \leqslant cp(t), \ |\partial_x^\alpha \partial_t^2 d| \leqslant cp_t^2/p(t), \ \alpha \geqslant 0,$$

$$p^{-\frac{1}{2}}\partial_x^\alpha d < c, \ |\partial_x^\alpha \nu|, \ |\partial_x^\alpha \mu| \leqslant \varepsilon, \ |\alpha| > 0,$$

для достаточно малого ε.

Тогда нетрудно убедиться, что все условия теоремы 3 выполнены, полагая

$$Q^4 = \mu D_x^2 + i\nu D_x + d(t,x)$$

и представив символы операторов Q и $B = Q^2$ в виде асимптотических сумм, включая d в главный символ q ($q_1 = \sqrt[4]{\mu\xi^2 + d}$ и т. д.).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 16. II. 1987

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. ՎԿԲ-գնահատականներ և Կոշու խնդիր երկրորդ կարգի սինգուլյար հիպերբոլական հավասարումների համար (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցվում են ՎԿԲ-գնահատականներ մասնակի ածանցյալներով հիպերբոլական հավասարումների համար։

Սինգուլյար սկզբնական հարթության վրա հիպերբոլական հավասարումների համար առաջարկվում է Կոշու կշռային խնդիր և ապացուցվում է նրա կոռեկտությունը։ Կոշու կշռային տվյալները տրվում են Ֆուրյեի ինտեգրալ օպերատորների օգնությամբ։

G. R. OGANESIAN. *JWKB – estimates for the partial differential equations and the Cauchy problem for the second order singular hyperbolic equations* (summary)

In the paper JWKB – estimates for the hyperbolic partial differential equations are proved. It is proposed to consider the weighted Cauchy problem by means of the Fourier integral operators on the singular initial hyperplane. The unique solvability of this problem in the Sobolev spaces is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Бицадзе.* Уравнения смешанного типа, М., ВИНИТИ АН СССР. Итоги науки, 1959.
2. *С. А. Терсенов.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе, НГУ, 1973.
3. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 196, 2, 1971, 289—292.
4. *И. А. Киприянов, Л. А. Иванов.* Задача Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу в симметрическом пространстве, Матем. сб., 124, № 1, 1984, 44—55.
5. *Г. Р. Оганесян.* О начальной задаче с заданными вронскианами, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 15, № 4, 1980, 292—309.
6. *Г. Р. Оганесян.* О начальной и смешанной задачах с заданными вронскианами для сингулярных гиперболических уравнений второго порядка, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 22, № 4, 1987, 337—357.
7. *А. О. Оганесян.* Построение параметрикса задачи Коши с весом для гиперболических уравнений второго порядка с неограниченными коэффициентами, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 21, № 1, 1986, 33—50.
8. *В. В. Грушин.* Псевдодифференциальные операторы в R^n с ограниченными символами, Функц. анализ и его прилож., 4, № 3, 1970, 37—50.
9. *М. В. Федорюк.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1983.
10. *Ф. Трев.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, М., Мир, 1984, т. 1, 2.
11. *Л. Хёрмандер.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, М., Мир, 1987/88, т. 3, 4.
12. *М. Тэйлор.* Псевдодифференциальные операторы, М., Мир, 1985.