ՀԸԿ 517.53

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

И. В. ОСТРОВСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ ХАУСДОРФА

М. М. Джрбашян [1, 2] поставил ряд вопросов, связанных с раз-
 витой им в [3] теорией факторизации классов мероморфных функций.
 Настоящая заметка посвящена решению одного из них, который фор-
 мулируется так. Пусть ω_1, ω_2 — неубывающие непрерывные на $[0, 1]$
 функции, удовлетворяющие условиям

$$\omega_j(0) = 1, \int_0^1 (\omega_j(t) - 1) t^{-1} dt < \infty, j = 1, 2. \quad (1)$$

Положим

$$\lambda_0 = 1, \lambda_n = \int_0^1 t^{n-1} \omega_1(t) dt \quad / \quad \int_0^1 t^{n-1} \omega_2(t) dt, n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Верно ли, что если отношение ω_1/ω_2 невозрастает на $[0, 1]$, то числа
 $\{\lambda_n\}_0^\infty$ образуют разрешимую проблему моментов Хаусдорфа, т. е.
 существует неубывающая на $[0, 1]$ функция β такая, что

$$\lambda_n = \int_0^1 t^n d\beta(t), n = 0, 1, 2, \dots? \quad (3)$$

Мы покажем, что представление (3) будет иметь место, если условие
 невозрастания ω_1/ω_2 заменить несколько более сильным: при достаточ-
 но малых $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\sup_{1 > \tau > t} \frac{\omega_2(\tau(1-\varepsilon))}{\omega_2(\tau)} < \frac{\omega_1(t(1-\varepsilon))}{\omega_1(t)}, 0 \leq t < 1. \quad (4)$$

Это условие является в известной мере неулучшаемым.

Теорема 1. Пусть ω_1, ω_2 — неубывающие непрерывные на
 $[0, 1]$ функции, удовлетворяющие условиям (1), (4). Тогда для чи-
 сел λ_n , определяемых равенствами (2), справедливо представление
 (3). Условие (4) нельзя заменить условием невозрастания отноше-
 ния ω_1/ω_2 .

Положим $\Omega_j(y) = \omega_j(e^{-y})$, $0 < y < \infty$. Функции Ω_j являются не-
 возрастающими и удовлетворяют условиям

$$\Omega_j(+\infty) = 1, \int_0^\infty (\Omega_j(y) - 1) dy < \infty, j = 1, 2. \quad (5)$$

$$c_j p_{l+1} - c_{j+1} p_l = c_j p_l \left(\frac{p_{l+1}}{p_l} - \frac{c_{j+1}}{c_j} \right) \geq 0, \quad j=0, \dots, i,$$

то справедливость утверждения леммы получается по индукции.

Докажем теорему 2. Пусть $h > 0$ столь мало, что выполняется (7). Положим

$$p_k = \Omega_1((k+1)h), \quad c_k = \Omega_2((k+1)h), \quad k=0, 1, \dots, \quad (11)$$

и обозначим через $\{x_k\}_0^\infty$ соответствующее решение системы (10). В силу леммы имеем $x_k \geq 0$, $k \geq 0$. Из условий, наложенных на функции Ω_j , следует, что последовательности $\{p_k\}_0^\infty$ и $\{c_k\}_0^\infty$, определяемые (11), невозрастают и $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 1$. Поэтому из (10) вытекает, что

$$p_i c_i \geq x_0 + x_1 + \dots + x_i, \quad i=0, 1, 2, \dots,$$

$$1 \geq \sum_{k=0}^{\infty} x_k.$$

Так как условия (5) обеспечивают сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksh} \Omega_j((k+1)h), \quad j=1, 2, \quad s > 0,$$

то имеем равенство

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} e^{-skh} \Omega_1((k+1)h)}{\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksh} \Omega_2((k+1)h)} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skh} x_k, \quad s > 0. \quad (12)$$

Покажем, что при $h \rightarrow +0$ выражение в левой части (12) стремится к $\lambda(s)$. Для этого достаточно установить, что при $h \rightarrow +0$ имеем для всех $s > 0$, $j=1, 2$

$$h \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s(k+1)h} \Omega_j((k+1)h) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-sy} \Omega_j(y) dy. \quad (13)$$

Имеем

$$\begin{aligned} J_j(h) &= \int_0^{\infty} e^{-sy} \Omega_j(y) dy - h \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s(k+1)h} \Omega_j((k+1)h) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kh}^{(k+1)h} (e^{-sy} - e^{-s(k+1)h}) \Omega_j(y) dy + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s(k+1)h} \int_{kh}^{(k+1)h} (\Omega_j(y) - \Omega_j((k+1)h)) dy. \end{aligned}$$

Используя для оценки первой суммы неравенство

$$e^{-sy} - e^{-s(k+1)h} = e^{-sy} (1 - e^{-s((k+1)h-y)}) \leq \\ \leq e^{-sy} s((k+1)h - y) \leq she^{-sy}, \quad kh \leq y < (k+1)h,$$

а для оценки второй, замечая, что

$$e^{-s(k+1)h} \int_{kh}^{(k+1)h} (\mathcal{Q}_j(y) - \mathcal{Q}_j((k+1)h)) dy \leq h(\mathcal{Q}_j(kh) - \mathcal{Q}_j((k+1)h)), \quad k > 1,$$

видим, что

$$J_j(h) \leq sh \int_0^{\infty} e^{-sy} \mathcal{Q}_j(y) dy + e^{-sh} \int_0^h \mathcal{Q}_j(y) dy \rightarrow 0, \quad h \rightarrow +0.$$

Итак, (13) доказано, а вместе с тем установлено, что выражение в левой части (12) стремится к $\lambda(s)$ при $h \rightarrow +0$.

Положим $\alpha_h(y) = \sum_{s < y/h} x_s$. В силу доказанного имеем

$$\lim_{h \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-sy} d\alpha_h(y) = \lambda(s), \quad \int_0^{\infty} d\alpha_h(y) \leq 1.$$

Применяя теорему Хелли, заключаем, что справедливо соотношение

(8), где α — неубывающая функция, $\int_0^{\infty} d\alpha(y) \leq 1$. Из (8) и того, что

$\lambda(+0) = 1$, следует $\int_0^{\infty} d\alpha(y) = 1$. Тем самым справедливость представления

(8) при выполнении условия (7) доказана.

Докажем невозможность замены условия (7) условием неубывания отношения $\mathcal{Q}_1/\mathcal{Q}_2$. Предположим, что такая замена возможна и покажем, что это ведет к противоречию.

Выберем произвольно числа $0 < \varepsilon < \eta < 1$ и положим

$$\mathcal{Q}_1^{(n)}(y) = ny^{-\varepsilon}, \quad \mathcal{Q}_2^{(n)} = ny^{-\eta}, \quad 0 < y < 1;$$

$$\mathcal{Q}_1^{(n)}(y) = \mathcal{Q}_2^{(n)}(y) = \begin{cases} (n - n^2)y + n^2, & 1 \leq y \leq 1 + \frac{1}{n}, \\ 1, & 1 + \frac{1}{n} \leq y < \infty; \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Ясно, что функции $\mathcal{Q}_1^{(n)}, \mathcal{Q}_2^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям (5), и отношение $\mathcal{Q}_1^{(n)}/\mathcal{Q}_2^{(n)}$ неубывает. Ввиду сделанного предположения имеем представление

$$\frac{\int_0^{\infty} e^{-sy} \Omega_1^{(n)}(y) dy}{\int_0^{\infty} e^{-sy} \Omega_2^{(n)}(y) dy} = \int_0^{\infty} e^{-sy} d\alpha_n(y), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где α_n — неубывающие функции, $\alpha_n(0) = 0$, $\alpha_n(+\infty) = 1$. Выражение в левой части (14) можно записать в виде

$$\frac{\int_0^1 e^{-sy} y^{-\frac{1}{n}} dy + \int_1^{1+1/n} ((1-n)y + n) e^{-sy} dy + \frac{1}{n} \int_{1+1/n}^{\infty} e^{-sy} dy}{\int_0^1 e^{-sy} y^{-1} dy + \int_1^{1+1/n} ((1-n)y + n) e^{-sy} dy + \frac{1}{n} \int_{1+1/n}^{\infty} e^{-sy} dy},$$

откуда видно, что при $n \rightarrow \infty$, $s > 0$, оно имеет пределом функцию

$$\mu(s) = \int_0^1 e^{-sy} y^{-\frac{1}{n}} dy / \int_0^1 e^{-sy} y^{-1} dy.$$

Поэтому делая в (14) предельный переход при $n \rightarrow \infty$ и применяя теорему Хелли, получим

$$\mu(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} d\alpha_0(y),$$

где α_0 — неубывающая функция, $\int_0^{\infty} d\alpha_0(y) \leq 1$. Таким образом, мы приходим к равенству

$$\int_0^1 e^{-sy} y^{-\frac{1}{n}} dy = \int_0^1 e^{-sy} y^{-1} dy \cdot \int_0^{\infty} e^{-sy} d\alpha_0(y).$$

Полагая $-s = it$, $t \in R$, запишем это равенство в виде

$$\int_R e^{ity} \nu_1(dy) = \int_R e^{ity} \nu_2(dy) \cdot \int_R e^{ity} \nu_3(dy), \quad t \in R, \quad (15)$$

где ν_1, ν_2, ν_3 — соответствующим образом определенные неотрицательные меры. В силу (15) имеем $\nu_1 = \nu_2 * \nu_3$, поэтому (см., напр., [4], с. 85) для носителей $S(\nu_j)$ мер ν_j справедливо равенство

$$S(\nu_1) = S(\nu_2) + S(\nu_3), \quad (16)$$

где знак $+$ обозначает арифметическое сложение множеств (определение см., напр., [4], с. 84). Так как $S(\nu_1) = S(\nu_2) = [0, 1]$, то из (16) следует, что $S(\nu_3)$ состоит из единственной точки 0. Полагая $\nu_3(\{0\}) = c$,

из (15) заключаем, что $\nu_1 \equiv c\nu_2$. Это абсурдно, так как меры ν_1 и ν_2 имеют на $[0, 1]$ плотности, равные $y^{-\xi}$ и $y^{-\eta}$, $\xi \neq \eta$, соответственно.

Физико-технический институт низких температур
АН УССР, г. Харьков

Поступила 20.VI.1988

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Некоторые открытые вопросы теории представлений аналитических функций, Записки научн. семинаров ЛОМИ, 81, 1978, 238—241.
2. М. М. Dzhrbashyan. Some open problems in the theory of representations of analytic functions, Lecture Notes in Math., 1043, 1984, 522—526.
3. М. М. Джрбашян. Теория факторизации функций, мероморфных в круге. Матем. сб., 79, № 4, 1969, 517—615.
4. Ю. В. Линник, И. В. Островский. Разложения случайных величин и векторов, М., «Наука», 1972, 480 с.