ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXV, № 1, 1990 Математика

УДК 517.946

В. А. ОГАНЯН

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Введение

Пусть D — верхняя полуплоскость $y>0$, R — ее граница. Рассмотрим в области D эллиптическую систему

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

где A, B, C — действительные постоянные квадратные матрицы m-го порядка, $u(x, y)=\{u_1(x, y),\cdots, u_m(x, y)\}$ — искомая дважды непрерывно-дифференцируемая действительная вектор-функция.

Напомним, что система (1) называется эллиптической, если $\det C\neq 0$ и характеристическое уравнение $\det(A+2\lambda B+\lambda^2 C)=0$ не имеет действительных корней.

Пусть $x_1, x_2,\cdots, x_n$ — конечные точки на границе R области D; $l_1, l_2,\cdots, l_n, l_{n+1}$ — неотрицательные числа.

Обозначим через $N_R(x_1, x_2,\cdots, x_n, \infty; l_1, l_2,\cdots, l_n, l_{n+1})$ — класс действительных вектор-функций $f(x)=\{f_1(x), f_2(x),\cdots, f_m(x)\}$, непрерывных всюду на R, кроме, быть может, точек $x_1, x_2,\cdots, x_n$, в окрестностях которых они удовлетворяют неравенствам:

$$|f(x)|\leqslant C_0|x-x_k|^{-l_k}\quad (k=1, 2,\cdots, n),$$

а в окрестности бесконечности

$$|f(x)|\leqslant C_0|x|^{l_{n+1}},\ \text{где } C_0 \text{ — постоянная.}$$

Обозначим через $M_D(x_1, x_2,\cdots, x_n, \infty; l_1, l_2,\cdots, l_n, l_{n+1})$ класс действительных вектор-функций $u(x, y)=\{u_1(x, y),\cdots, u_m(x, y)\}$, непрерывных всюду в $\overline{D}$ со своими частными производными первого порядка, кроме, быть может, граничных точек $x_1, x_2,\cdots, x_n$, в окрестностях которых они удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered}|u(z)|\leqslant C_1|z-x_k|^{-l_k+1}\cdot|\ln|z-x_k||^{-1},\\ \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\leqslant C_1|z-x_k|^{-l_k}\cdot|\ln|z-x_k||^{-1}\quad (k=1, 2,\cdots, n),\end{gathered} \tag{A}$$

а в окрестности бесконечности

$$|u(z)|\leqslant C_1|z|^{l_{n+1}+1}\cdot\ln|z|,\quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\leqslant C_1|z|^{l_{n+1}}\cdot\ln|z|,$$

где C_1 — постоянная.

Пусть $\{x'_k\}_1^\infty$ — монотонная последовательность, стремящаяся к $+\infty$ на границе R области D, а $\{l'_k\}_1^\infty$ — произвольная ограниченная сверху последовательность неотрицательных чисел, $l_0 \geqslant \sup \{l'_k\}_1^\infty$. Обозначим через $N_R(\infty, x'_1, x'_2, \cdots, l_0, l'_1, \cdots)$ класс действительных вектор-функций $f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)\}$, непрерывных всюду на R кроме, быть может, точек $x'_1, x'_2, \cdots$, в окрестностях которых они удовлетворяют неравенствам

$$|f(x)| \leqslant C_2 |x - x'_k|^{-l'_k}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

а в окрестностях бесконечности

$$|f(x)| \leqslant C_2 |x|^{l_0}, \text{ где } C_2 \text{ — постоянная.}$$

Обозначим, далее, через $M_D(\infty, x'_1, x'_2, \cdots; l_0, l'_1, l'_2, \cdots)$ класс действительных вектор-функций $u(x, y) = \{u_1(x, y), \cdots, u_m(x, y)\}$, непрерывных всюду в $\overline{D}$ со своими частными производными первого порядка, кроме, быть может, граничных точек $x'_1, x'_2, \cdots$, в окрестностях которых они удовлетворяют неравенствам

$$|u(z)| \leqslant C_3 |z - x'_k|^{-l'_k+1} \cdot \ln |z - x'_k|^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant C_3 |z - x'_k|^{-l'_k} \cdot \ln |z - x'_k|^{-1}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

а в окрестности бесконечности

$$|u(z)| \leqslant C_3 |z|^{l_0+1} \ln |z|, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant C_3 |z|^{l_0} \cdot \ln |z|, \text{ где } C_3 \text{ — постоянная.}$$

Рассмотрим задачи Неймана:

Задача 1. *Найти в области $D(y > 0)$ регулярное решение системы* (1), *принадлежащее классу $M_D(x_1, x_2, \cdots, x_n, \infty; l_1, l_2, \cdots, l_n, l_{n+1})$ и удовлетворяющее граничному условию*

$$\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = f(x), \quad x \neq x_1, x_2, \cdots, x_n, \tag{2}$$

где $f(x)$ — заданная вектор-функция класса $N_R(x_1, \cdots, x_n, \infty; l_1, \cdots, l_n, l_{n+1})$.

Задача 2. *Найти в области $D(y > 0)$ регулярное решение системы* (1), *принадлежащее классу $M_D(\infty, x'_1, x'_2, \cdots; l_0, l'_1, l'_2, \cdots)$ и удовлетворяющее граничному условию*

$$\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = f(x), \quad x \neq x'_1, x'_2, \cdots, \tag{3}$$

где $f(x)$ — заданная вектор-функция класса $N_R(\infty, x'_1, \cdots; l_0, l'_1, \cdots)$.

Задача Неймана для эллиптических уравнений рассмотрена во многих работах (например, см. [1]). В этих работах граничная функция или непрерывна, или принадлежит классу Гельдера.

Задача Неймана для системы (1), когда областью является внешность единичного круга, а граничная функция принадлежит классу Гельдера, рассмотрена в работе [2], где получены необходимые и достаточные условия для ее разрешимости.

Задача Неймана для эллиптической системы (1) в области, граница которой достаточно гладкая, а граничная функция непрерывная, рассмотрена в монографии [3], где доказана разрешимость задачи.

В настоящей работе рассматривается задача Неймана для системы (1) при условии, что граничная функция имеет особенность на R.

Рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение системы (1) имеет только простые корни. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ корни характеристического уравнения с положительными мнимыми частями, тогда общее решение системы (1) дается формулой (см. [3])

$$u(x, y) = \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j(x + \lambda_j y), \tag{4}$$

где $\alpha_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ — ненулевое решение системы $(A + 2\lambda_j B + \lambda_j^2 C) \alpha_j = 0$, а $\varphi_j(x + \lambda_j y)$ $(j = 1, \cdots, m)$ — произвольные аналитические функции относительно аргумента $x + \lambda_j y$.

Система (1) называется слабо связанной, если векторы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ линейно независимы (см [3]).

Мы будем рассматривать слабо связанную эллиптическую систему. Основные результаты работы содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. *Если система* (1) *слабо связанная, то для любой функции* $f(x)$ *класса* $N_R(x_1, x_2, \cdots, x_n, \infty; l_1, \cdots, l_{n+1})$ *задача* (1), (2) *имеет решение в классе* $M_D(x_1, x_2, \cdots, x_n, \infty; l_1, l_2, \cdots, l_{n+1})$.

Теорема 2. *Соответствующая однородная задача* (1), (2) *имеет* $r = m\left(2 + \sum_{k=1}^{n+1} [l_k]\right)$ *линейно независимых решений, где* $[l_k]$ — *целая часть* l_k, m — *число уравнений системы* (1).

Теорема 3. *Если система* (1) *слабо связанная, то для любой функции* $f(x)$ *класса* $N_R(\infty, x_1', x_2', \cdots; l_0', l_1', l_2', \cdots)$ *задача* (1), (3) *имеет решение в классе* $M_D(\infty, x_1', x_2', \cdots; l_0', l_1', l_2', \cdots)$.

Заметим, что в теоремах 1 и 3 не только доказывается существование решения задачи, а в каждом случае строится одно такое решение.

§ 1. Доказательство теоремы 1

Докажем теорему 1 в частном случае, когда $n = 1$, $x_1 = 0$. В общем случае доказательство аналогично.

Обозначим через $l_1 = l$, $[l] = m_0$, $l - m_0 = \gamma$, $l_2 = d$, $[d] = s$, $d - s = \tau$. Представим граничную функцию из класса $N_R(0, \infty; l, d)$ в виде

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \tag{5}$$

где

$$f_1(x)=f(x)\,\alpha(x);\ f_2(x)=f(x)\,(1-\alpha(x)), \tag{6}$$

а $\alpha(x)$ — непрерывная функция на R и такая, что

$$\alpha(x)=\begin{cases}1, & x\in\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\\ 0, & x\overline{\in}(-1,\ 1).\end{cases} \tag{7}$$

Рассмотрим функцию

$$u(x,\ y)=\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\left\{\gamma_j\int_{z_0}^{z}\left[\frac{1}{\pi i\lambda_j}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^{m_0+1}f_1(t)\,dt}{\zeta^{m_0+1}(t-\zeta)}\right]d\zeta\right\}+$$

$$+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\left\{\gamma_j\int_{z_0}^{z_j}\left[\frac{1}{\pi i\lambda_j}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\zeta^{s+1}f_2(t)\,dt}{t^{s+1}(t-\zeta)}\right]d\zeta\right\}, \tag{8}$$

где γ_j — j-ая строка матрицы, которая является обратной той матрице, столбцами которой являются векторы $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_m$; $z_j=x+\lambda_j y$, $z_0=x_0+\lambda_j y_0$, $\zeta=\xi+i\eta$ все указанные точки из D. Для определенности возьмем $x_0=0$, $y_0=1$.

Очевидно, что вектор-функция $u(x,\ y)$, определяемая формулой (8), удовлетворяет системе (1). Покажем, что эта функция удовлетворяет и граничному условию (2).

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\left\{\gamma_j\left[\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^{m_0+1}f_1(t)\,dt}{z_j^{m_0+1}(t-z_j)}\right]\right\}+$$

$$+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\left\{\gamma_j\left[\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z_j^{s+1}f_2(t)\,dt}{t^{s+1}(t-z_j)}\right]\right\}. \tag{9}$$

В работе [4] доказано, что функция $\frac{\partial u}{\partial y}$, определяемая формулой (9), при $(x,\ y)\to(x_0,\ 0)$ $(y>0)$ имеет предел $f(x_0)$. Остается доказать, что вектор-функция $u(x,\ y)$ принадлежит классу $M_D(0,\ \infty;\ l,\ d)$. Для этого оценим $u(x,\ y)$ в окрестности точек $z=0$ и $z=\infty$. Представим $u(x,\ y)$ в виде

$$u(x,\ y)=-\int_{y}^{1}\frac{\partial u(x,\ \eta)}{\partial\eta}\,d\eta+u(x,\ 1),\ y>0. \tag{10}$$

Сначала оценим первое слагаемое в правой части формулы (10).

В работе [4] показано, что в окрестности точек $z=0$ и $z=\infty$ функция, определяемая формулой (8), удовлетворяет соответственно оценкам

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant \begin{cases} \text{const}\, |z|^{-l} \ln |z|^{-1}, \text{ если } l=[l], \\ \text{const}\, |z|^{-l}, \text{ если } l\neq[l], \end{cases} \tag{11}$$

и

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant \text{const}\, |z|^{d} \ln |z|. \tag{12}$$

Из неравенства (11) в окрестности точки $z = 0$ получим

$$\left|\int_y^1 \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta\right| \leqslant \text{const} \left|\int_y^1 \frac{\ln (x^2+\eta^2)^{-1}\, d\eta}{(x^2+\eta^2)^{\frac{l+1}{2}}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\, J(x, y) \ln |z|^{-1}, \quad 0<|z|<1, \tag{13}$$

где

$$J(x, y) = \int_y^1 \frac{d\eta}{(x^2+\eta^2)^{\frac{l+1}{2}}}.$$

Очевидно, что в окрестности $z = 0$ можно считать $0 < y < 1$. Оценим $J(x, y)$ в окрестности точки $z = 0$. Возможны следующие два случая:

1. $y > x$, тогда

$$J(x, y) \leqslant \text{const} \int_y^1 \frac{d\eta}{\eta^{l+1}} \leqslant \frac{\text{const}}{y^l} \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^l}. \tag{14}$$

2. $x > y$, тогда

$$J(x, y) = \int_y^x \frac{d\eta}{(x^2+\eta^2)^{\frac{l+1}{2}}} + \int_x^1 \frac{d\eta}{(x^2+\eta^2)^{\frac{l+1}{2}}} \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^l}. \tag{15}$$

Так как в окрестности $x = 0$ функция $u(x, 1)$ ограничена, то из неравенств (13—(15) в окрестности $z = 0$ получим оценку

$$|u(x, y)| \leqslant \text{const}\, |z|^{-l} \cdot \ln |z|^{-1}. \tag{16}$$

Теперь оценим функцию $u(x, y)$ в окрестности $z = \infty$. Заметим, что для достаточно больших $|z|$ имеем

$$\left|\int_1^y \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta\right| \leqslant \text{const} \left|\int_1^y (x^2+\eta^2)^{\frac{d}{2}} \ln (x^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}} d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \text{const}\, |z|^{d+1} \ln |z|, \quad y > 1, \\ \text{const}\, (x^2+1)^{d/2} \ln (x^2+1)^{1/2}, \quad 0 < y < 1. \end{cases} \tag{17}$$

Ясно, что в окрестности бесконечности при $0 < y < 1$ имеет место неравенство

$$x^2 + 1 \leqslant 2|z|^2, \tag{18}$$

поэтому

$$(x^2+1)^{d/2}\ln(x^2+1)^{1/2}\leqslant \text{const}\,|z|^d\ln|z|,$$

следовательно, в окрестности бесконечности имеет место неравенство

$$\left|\int_1^y \frac{\partial u}{\partial \eta}\,d\eta\right|\leqslant \text{const}\,|z|^{d+1}\cdot\ln|z|. \tag{19}$$

Остается оценить второе слагаемое, входящее в правую часть формулы. Имеем

$$u(x,1)=\text{Re}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\left|\gamma_j\int_{\lambda_j}^{x+\lambda_j}\left(\frac{1}{\pi i\lambda_j}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^{m_0+1}f_1(t)\,dt}{\zeta^{m_0+1}(t-\zeta)}\right)d\zeta\right|+$$

$$+\text{Re}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\left[\gamma_j\left(\int_{\lambda_j}^{x+\lambda_j}\frac{1}{\pi i\lambda_j}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\zeta^{s+1}f_2(t)\,dt}{t^{s+1}(t-\zeta)}\right)d\zeta\right|\cdot \tag{20}$$

Ясно, что

$$\Phi_1(\zeta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^{m_0+1}f_1(t)\,dt}{\zeta^{m_0+1}(t-\zeta)},\quad \Phi_2(\zeta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\zeta^{s+1}f_2(t)\,dt}{\zeta^{m_0+1}(t-\zeta)} \tag{21), (22}$$

— аналитические функции комплексной переменной $\zeta=\xi+i\eta$, следовательно в формуле (20) можно интегрировать по отрезку, соединяющему точки λ_j и $x+\lambda_j$. На прямой $y=\text{Jm}\,\lambda_j$ переменная ζ имеет вид: $\zeta=\xi+i\,\text{Jm}\,\lambda_j$ $(-\infty<\xi<+\infty)$. Обозначим $\Phi_2(\xi)=\Phi_2(\xi+i\,\text{Jm}\,\lambda_j)$ через $\Psi(\xi)$. $\Psi(\xi)$ непрерывна на действительной оси ξ. Оценим ее в окрестности бесконечности. Для этого представим функцию $\Psi(\xi)$ в виде

$$\Psi(\xi)=\int_{|t|<\frac{|\xi|}{2}}+\int_{\frac{|\xi|}{2}<|t|<2|\xi|}+\int_{|t|>2|\xi|}=\Psi_1(\xi)+\Psi_2(\xi)+\Psi_3(\xi). \tag{23}$$

Имеем

$$|\Psi_1(\xi)|=\left|\int_{|t|<\frac{|\xi|}{2}}\frac{(\xi+i\,\text{Jm}\,\lambda_j)^{s+1}f(t)(1-\alpha(t))\,dt}{t^{s+1}(t-\xi-i\,\text{Jm}\,\lambda_j)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\xi+i\,\text{Jm}\,\lambda_j|^{s+1}\int_{\frac{1}{2}<|t|<\frac{|\xi|}{2}}\frac{|f(t)|\cdot|1-\alpha(t)|\,dt}{|t|^{s+1}\cdot|t-\xi-i\,\text{Jm}\,\lambda_j|}\leqslant \text{const}\,|\xi|^d, \tag{24}$$

$$|\Psi_2(\xi)|\leqslant \text{const}\,|\xi|^d\ln|\xi|,\quad |\Psi_3(\xi)|\leqslant \text{const}\,|\xi|^d. \tag{25}$$

Используя (23) — (25), а также ограниченность функции $\Phi_1(z)$ на прямой $y=\text{Jm}\,\lambda_j$, из (20) получим

$$|u(x,1)|\leqslant|z|^{d+1}\ln|z|\ \text{в окрестности}\ z=\infty. \tag{26}$$

Из оценок (16), (19), (26) и равенства (10) следует, что $u(x, y) \in \in M_D(0, \infty; l, d)$. Теорема 1 доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 2

В классе $M_D(0, \infty; l, d)$ рассмотрим однородную задачу

$$A u_{xx} + 2 B u_{xy} + C u_{yy} = 0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \quad (x \neq 0). \tag{27}$$

Пусть $u_0(x, y)$ — решение задачи (1), (27), удовлетворяющее дополнительным условиям: $\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x}$ непрерывна в замкнутой полуплоскости $\overline{D}(y \geqslant 0)$, кроме, быть может, точки (0; 0), в окрестности которой удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right| \leqslant \text{const}\, |z|^{-l} \cdot \ln |z|^{-1}, \quad 0 < |z| < 1, \tag{28}$$

а в окрестности бесконечности

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right| \leqslant \text{const}\, |z|^{-l} \cdot \ln |z|, \quad |z| \geqslant 2. \tag{29}$$

Так как $u_0(x, y)$ удовлетворяет системе (1), то она дается формулой

$$u_0(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \psi_j (x + \lambda_j y), \tag{30}$$

где $\psi_j(x + \lambda_j y)$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ — аналитические функции относительно аргумента $x + \lambda_j y$.

Рассмотрим следующую аналитическую вектор-функцию:

$$T(z) = \lambda_1 \alpha_1 \psi_1'(z) + \cdots + \lambda_m \alpha_m \psi_m'(z) \quad (\operatorname{Im} z > 0). \tag{31}$$

Очевидно, что

$$\left.\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \operatorname{Re} T(z)|_{y=0} = 0, \quad x \neq 0. \tag{32}$$

следовательно, функцию $T(z)$ можно аналитически продолжить в нижнюю полуплоскость по следующему закону:

$$K(z) = \begin{cases} T(z), & \operatorname{Im} z \geqslant 0, \ z \neq 0, \\ -\overline{T(\bar{z})}, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \tag{33}$$

Ясно, что

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\alpha_1 \psi_1'(z_1) + \cdots + \alpha_m \psi_m'(z_m) + \overline{\alpha_1 \psi_1'(z_1)} + \cdots + \overline{\alpha_m \psi_m'(z_m)}\right), \tag{34}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\alpha_1 \lambda_1 \psi_1'(z_1) + \cdots + \alpha_m \lambda_m \psi_m'(z_m) + \overline{\alpha_1 \lambda_1 \psi_1'(z_1)} + \cdots + \overline{\alpha_m \lambda_m \psi_m'(z_m)}\right). \tag{35}$$

Так как (см. [5])

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_m & \overline{\alpha_1} \cdots \overline{\alpha_m} \\ \lambda_1\alpha_1 \cdots \lambda_m\alpha_n & \overline{\lambda_1\alpha_1} \cdots \overline{\lambda_m\alpha_m} \end{pmatrix} \neq 0,$$

то $\psi_1'(z_1), \cdots, \psi_m'(z_m)$ линейно выражаются через $\dfrac{\partial u_0}{\partial x}, \dfrac{\partial u_0}{\partial y}$.

Отсюда, в свою очередь, следует оценка

$$|\psi_j(z)| < \begin{cases} \text{const } |z|^{-l+\beta} \ln\cdot|z|^{-1}, & 0<|z|<\dfrac{1}{2}, \ \operatorname{Jm} z>0, \\ \text{const } |z|^{d+1} \ln|z|, & |z|>2, \ \operatorname{Jm} z>0. \end{cases} \quad (36)$$

Следовательно, функции $\psi_j(z)$ представляются в виде

$$\psi_j(z) = a_{-m_0}^{(j)} z^{-m_0} + \cdots a_{-1}^{(j)} z^{-1} + a_0^{(j)} + a_1^{(j)} z + \cdots + a_{s+1}^{(j)} z^{s+1},$$

$$z \neq 0 \ (j=1, \cdots, m). \quad (37)$$

Из (37) имеем

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left(-\frac{-m_0\lambda_j a_{-m_0}^{(j)}}{z_j^{m_0+1}} + \cdots + \frac{-\lambda_j a_{-1}^{(j)}}{z_j^2} + \right.$$

$$\left. + \lambda_j a_1^{(j)} + \cdots + \lambda_j (s+1) a_{s+1}^{(j)} z_j^s \right). \quad (38)$$

Учитывая условия (27) из (38) получим

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lambda_j a_k^{(j)} = 0 \ (k=-m_0, \cdots, -1, 1, 2, \cdots, s+1). \quad (39)$$

Пусть $e_k = i\left(0, 0, \cdots, \underset{k}{1}, 0, \cdots, 0\right)$ — столбцы. Рассмотрим системы

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lambda_j a_k^{(j)} = e_r \ (k=-m_0, \cdots, s+1), \ (r=(1, \cdots, m). \quad (40)$$

Так как векторы $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ линейно независимы, то система (40) имеет единственное решение $\tilde{a}_r \equiv [\tilde{a}_r^{(1)}, \cdots, \tilde{a}_r^{(m)}]$. Очевидно, что

$$[a_k^{(1)}, \cdots, a_k^{(m)}] = c_1\tilde{a}_1 + \cdots + c_m\tilde{a}_m. \quad (41)$$

Обозначим через $u_{kr}(x, y)$ вектор-функцию

$$u_{kr}(x, y) = \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tilde{a}_r^{(j)} z_j^k \ (k=-m_0, \cdots, -1, 1, \cdots, s+1, \ r=1, \cdots, m). \quad (42)$$

Подставляя (37) и (41) в (30) получим, что общее решение однородной задачи определяется формулой

$$u_0(x, y) = a_0 + \sum_{k=-m_0}^{s+1} \sum_{r=1}^{m} c_{kr} u_{kr}(x, y), \quad (43)$$

где c_{kr} — произвольные действительные постоянные.

Из линейной независимости векторов $\tilde{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$ следует линейная независимость функций.

Легко доказать, что любое решение однородной задачи (1), (27) без дополнительных условий (28) и (29) представляется линейной комбинацией решений $u_{kr}(x, y)$. Теорема 2 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Так как последовательность $\{x'_k\}_1^\infty$ монотонно стремится к $+\infty$, то для любого x'_k $(k = 1, 2, \cdots)$ существует число $\beta_k > 0$ такое, что множества $(x'_k - \beta_k, x'_k + \beta_k) \cap (x'_j - \beta_j, x'_j + \beta_j)$ $(j \neq k)$, $j, k = 1, 2, \cdots$ пустые. Обозначим через $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ функции

$$f_k(x) = f(x)\, \alpha_k(x) \; (k = 1, 2, \cdots),$$

где $\alpha_k(x)$ — непрерывная функция на всей оси и такая, что

$$\alpha_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(x'_k - \dfrac{\delta_k}{2}, x'_k + \dfrac{\delta_k}{2}\right), \\ 0, & x \overline{\in} (x'_k - \delta_k, x'_k + \delta_k), \end{cases}$$

а δ_k определяется так: $\delta_k = \min(\beta_k, 2^{-k})$ $(k = 1, 2, \cdots)$. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится всюду, кроме, быть может, точек x'_k $(k = 1, 2, \cdots)$. Его сумма в любой точке x интервала $\left(x'_k - \dfrac{\delta_k}{2}, \; x'_k + \dfrac{\delta_k}{2}\right)$ равна $f(x)$ кроме, быть может, точки x'_k $(k = 1, 2, \cdots)$. Определим функцию $\tilde{f}(x)$ следующим образом:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x), & x \neq x'_k, \\ 0, & x = x'_k \quad (k = 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

Очевидно, что функция $\tilde{f}(x)$ непрерывна на всей оси.

Пусть $\beta(x)$ — непрерывная функция на всей оси и такая, что

$$\beta(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1), \\ 1, & x \overline{\in} (-2, 2). \end{cases}$$

Представим $\tilde{f}(x)$ в виде

$$\tilde{f}(x) = f_{-1}(x) + f_0(x), \text{ где } f_{-1}(x) = \tilde{f}(x)\,\beta(x),\; f_0(x) = \\ = \tilde{f}(x)\,(1 - \beta(x)).$$

Теперь рассмотрим задачи:

$$Au_{xx} + 2\,Bu_{xy} + C\,u_{yy} = 0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = f_k(x), \quad x \neq x'_k. \tag{44}$$

Как уже доказано в § 1 функция $u_k(x, y) (k = 1, 2, \cdots)$, определяемая формулой

$$u_k(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left\{ \gamma_j \int_{z_0}^{z_j} \left[\frac{1}{\pi i \lambda_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t - x'_k)^{\tau_k + 2}}{(\zeta - x'_k)^{\tau_k + 2}} \frac{f_k(t)\, dt}{(t - \zeta)} \right] d\zeta, \tag{45}$$

является решением задачи (1), (44) и принадлежит классу $M_D(\infty, x'_1, x'_2, \cdots; l_0, l_1, l_2, \cdots)$, где τ_k целая часть числа $l_k (k = 1, 2, \cdots)$, а α_j, γ_j — векторы, которые входят в формулы (4) и (7), интегрирование от $z_0 = \lambda_j$ до $z_j = x + \lambda_j y$ производим по отрезку, соединяющему точки z_0 и z_j. Как и в случае $u_k(x, y) (k = 1, 2 \cdots)$ легко доказать, что функции

$$u_0(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left\{ \gamma_j \int_{z_0}^{z_j} \left[\frac{1}{\pi i \lambda_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)}{t - z_j}\, dt \right] d\zeta \right\}$$

и

$$u_{-1}(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left\{ \gamma_j \int_{z_0}^{z_j} \left[\frac{1}{\pi i \lambda_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_j^{[l_0]+2} f_{-1}(t)\, dt}{t^{[l_0]+2}(t - z_j)} \right] d\zeta \right\}$$

являются решением задачи (1), (44) при $k = -1, 0$ и принадлежат классу $M_D(\infty, x'_1, x'_2, \cdots; l_0, l_1, l_2, \cdots)$.

Покажем, что функциональный ряд $\sum_{k=1}^{m} u_k(x, y)$, где $u_k(x, y)$ определяются формулами (45), сходится в верхней полуплоскости $y > 0$. Для этого рассмотрим последовательность замкнутых полукругов:

$$D_k = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leqslant \frac{x^2_{k-1}}{4},\ y \geqslant 0 \right\}, \quad (k = 2, 3, \cdots).$$

Докажем, что функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y)$ равномерно сходится в любом из полукругов D_k.

Действительно, пусть $x + iy \in D_k$, тогда для любого натурального $q \geqslant k$ имеем

$$|u_q(x, y)| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \left| \alpha_j \left\{ \gamma_j \int_{z_0}^{z_j} \left| \frac{1}{\pi i \lambda_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t - x'_q)^{\tau_q + 2}}{(\zeta - x'_q)^{\tau_q + 2}} \frac{f_q(t)\, dt}{(t - \zeta)} \right| d\zeta \right\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \sum_{j=1}^{m} \left| \alpha_j \left\{ \gamma_j \int_{z_0}^{z_j} \frac{1}{\pi i \lambda_j} \int_{x'_q - \delta_q}^{x'_q + \delta_q} \frac{|t - x'_q|^{\tau_q + 2} \cdot |t - x'_q|^{-l'_q}}{|\zeta - x'_q|^{\tau_q + 2} \cdot |t - \zeta|}\, dt \right\} d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \sum_{j=1}^{m} \left|\alpha_j\right| \left|\gamma_j\right| \int_{z_0}^{z_j} \frac{2\delta_q}{\left(\frac{|x_k|}{2}\right)^{q+2}} \frac{d\zeta}{|t-z_j|} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\, \delta_q \cdot \frac{|z_j - z_0|}{\left(\frac{|x_k|}{2}\right)^2}. \tag{46}$$

Имея в виду, что $|z_j - z_0| \leqslant |x_{k-1}|$, $|x_k| > 4$, из (46) получим

$$|u_k(x, y)| \leqslant \text{const} \cdot \frac{1}{2^q}. \tag{47}$$

Из (47) получим, что функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x, y)$ равномерно сходится в области D_k.

Ясно, что последовательность замкнутых кругов $D_k (k = 2, 3, \cdots)$ покрывает верхнюю полуплоскость. Отсюда следует и равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x, y)$ в любом полукруге $E_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$.

Таким образом, функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x, y)$ сходится в полуплоскости $y > 0$.

Обозначим через $\tilde{u}(x, y)$ сумму следующего ряда:

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_{k=-1}^{\infty} u_k(x, y), \quad y > 0 \tag{48}$$

и покажем, что $\tilde{u}(x, y)$ является решением задачи (1), (44). Действительно, функциональные ряды, полученные из (43) почленным дифференцированием по x и y любое число раз, равномерно сходятся в любом полукруге E_R. Так как каждая функция $u_k(x, y)$ $(k = -1, 0, 1, \cdots)$ удовлетворяет одному уравнению (1), то отсюда следует, что функция, определяемая формулой (48) в верхней полуплоскости $y > 0$ удовлетворяет уравнению (1).

Очевидно, что $\tilde{u}(x, y) \in M_D(\infty, x', x_2', \cdots; l_0, l_1', l_2', \cdots)$. Теперь покажем, что функция, определяемая формулой (48), удовлетворяет и граничному условию (44).

Пусть x_0 — любая точка множества R, отличная от точек $x_k' (k = 1, 2, \cdots)$. Покажем, что $\frac{\partial \tilde{u}(x_0, y)}{\partial y}$ стремится к $f(x_0)$, когда точка (x_0, y) стремится к точке $(x_0, 0)$, оставаясь в верхней полуплоскости. Рассмотрим следующую разность:

$$\frac{\partial \tilde{u}(x_0, y)}{\partial y} - f(x_0) = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\partial u_k(x_0, y)}{\partial y} - \sum_{k=-1}^{\infty} f_k(x_0) \tag{49}$$

в окрестности точки $(x_0, 0)$. Ясно, что точка $(x_0, 0)$ вместе с некоторой окрестностью принадлежит одному из множеств D_m. Так как ряд $\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\partial u_k(x_0, y)}{\partial y}$ равномерно сходится в D_m, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_1, что в указанной окрестности

$$\left|\sum_{k=n_1}^{\infty} \frac{\partial u_k(x_0, y)}{\partial y}\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{50}$$

Из сходимости ряда $\sum_{k=-1}^{\infty} f_k(x_0)$ следует существование такого натурального числа n_2, что

$$\left|\sum_{k=n_2}^{\infty} f_k(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{51}$$

Обозначим через $n_0 = \max(n_1, n_2)$ и представим правую часть равенства (49) в виде

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\partial u_k(x_0, y)}{\partial y} - \sum_{k=-1}^{\infty} f_k(x_0) = \sum_{k=-1}^{n_0-1} \left| \frac{\partial u_k(x_0, y)}{\partial y} - f_k(x_0) \right| +$$

$$+ \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{\partial u_k(x_0, y)}{\partial y} - \sum_{k=n_0}^{\infty} f_k(x_0). \tag{52}$$

В работе [4] доказано, что выражение $\sum_{k=-1}^{n_0-1}\left| \frac{\partial u_k(x_0, y)}{\partial y} - f_k(x_0)\right|$ стремится к нулю, когда $y \to 0$, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $0 < y < \delta$, то

$$\left|\sum_{k=-1}^{n_0-1}\left| \frac{\partial u_k(x_0, y)}{\partial y} - f_k(x_0)\right|\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{53}$$

Из (50) — (53) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $0 < y < \delta$, то $\left|\frac{\partial \bar{u}(x_0, y)}{\partial y} - f(x_0)\right| < \varepsilon$.

Таким образом

$$\lim_{y \to +0} \frac{\partial \tilde{u}(x_0, y)}{\partial y} = f(x_0), \ x_0 \neq x_1', \ x_2', \cdots.$$

Так как x_0 любое, то теорема 3 доказана.

В заключение выражаю благодарность профессору Н. Е. Товмасяну за обсуждение результатов работы.

Ереванский государственный университет

Поступила 1.XII. 1987

Վ. Հ. ՕՀԱՆՅԱՆ. Խզվող եզրային պայմաններով էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի համար Նեյմանի խնդիրը *(ամփոփում)*

Վերին կիսահարթությունում

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով էլիպտական համակարգի համար դիտարկված է Նեյմանի խնդիրը։

Քննարկված է երկու դեպք։ Առաջին դեպքում ենթադրվում է, որ եզրային $f(x)$ վեկտոր-ֆունկցիան անընդհատ է, բացառությամբ թերևս վերջավոր թվով կետերից՝ $x_1, x_2, \cdots, x_n$, որոնց շրջակայքերում տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները.

$$|f(x)|\leqslant \text{const}\,|x-x_k|^{-l_k}\quad (k=1,\ 2,\cdots,\ n),$$

որտեղ l_k-երը $(k=1, 2, \ldots, n)$ ոչ բացասական իրական թվեր են, իսկ անվերջի շրջակայքում՝

$$|f(x)|\leqslant \text{const}\,|x|^{l_0}\quad (l_0\geqslant 0):$$

Երկրորդ դեպքում եզրային ֆունկցիան կարող է ունենալ խզումներ անվերջ թվով կետերում։ Լուծումները փնտրվում են որոշակի դասերում։

Առաջին դեպքում ապացուցված է Նեյմանի խնդրի լուծման գոյությունը և գտնված է համապատասխան համասեռ խնդրի լուծումների տարածության չափողականությունը։

Երկրորդ դեպքում ապացուցված է խնդրի լուծման գոյությունը։

V. H. OHANIAN *The Negman problem for the elliptic system of differential equations with discontinuous boundary conditions* (summary)

For an elliptic system

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

two boundary problems are considered in the domain $D\,(y>0)$, $(\partial D=R)$. In the first problem, the boundary function is of the class $N_R(x_1, x_2, \cdots, x_n, \infty;\ l_1, l_2, \cdots, l_n, l_{n+1})$. The solution is looked for in the class $M_D(x_1, x_2, \cdots, x_n, \infty;\ l_1, l_2, \cdots, l_n, l_{n+1})$.

It is shown that the problem has a solution.

The number of the linear independent solutions of corresponding homogeneous problems is found.

In the second problem the boundary function is of the class $N'_R(\infty, x'_1, x'_2, \cdots, l'_0, l'_1, l'_2, \cdots)$. The solution is looked for the class $M'_D(\infty, x'_1, x'_2, \cdots;\ l'_0, l'_1, l'_2, \cdots)$. It is shown that the problem has a solution.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер.* Уравнения с частными производными, М., Мир, 1966.
2. *Н. Е. Товмасян.* Об одном методе решения краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости, Мат. сборник, 89(131), № 4, 1972, 599—615.
3. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., Наука, 1966.
4. *В. А. Оганян.* Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений с разрывными граничными условиями, Изв. АН Арм. ССР, Математика, XVI, № 6 1981, 465—477.
5. *Д. К. Фаддеев и В. И. Фаддеева.* Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, 1960.