ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXV, № 1, 1990 Математика

УДК 517.53

Г. А. БАРСЕГЯН, Г. А. СУКИАСЯН

СВОЙСТВО БЛИЗОСТИ ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С БЛИЗКИМИ НУЛЯМИ И ПОЛЮСАМИ

Согласно основному выводу теории распределения значений мероморфных функции (теория Р. Неванлинны и „теория поверхностей наложения Л. Альфорса), если значения a и b „хорошие", не дефектные, для заданной мероморфной в $\mathbf{C}$ функции $w(z)$, то количества a-точек и b-точек в кругах $|z|\leqslant r$ примерно равны, близки. Этот вывод оказался частью более общей закономерности — свойства близости a-точек, которое устанавливает, что близки не только количества этих a-точек и b-точек, но, одновременно, близки их модули и аргументы.

Общая формулировка „свойства близости a-точек" излагается в терминах, рассмотренных в [2] „однолистных областей наполнения" $E_i(r)$, $i=1, 2, \cdots$ — областей из $\{z: |z|\leqslant r\}$, удовлетворяющих условиям: а) в каждой области $E_i(r)$ функция $w(z)$ однолистна; б) множество $\overline{\mathbf{C}}\setminus\overline{w(E_i(r))}$ состоит из некоторого числа $k_i(r)$ односвязных областей, сферический диаметр каждого из которых стремится к нулю при $r\to\infty$.

В работе [2] была доказана следующая

Теорема А. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $\mathbf{C}$ функция; $\varphi(r)\uparrow\infty$, $r\to\infty$. Тогда в круге $|z|\leqslant r$ можно указать $\Phi(r)$ попарно непересекающихся однолистных областей наполнения $E_i(r)$, $i=1, 2,\cdots, \Phi(r)$, для которых справедливы следующие утверждения:*

I.
$$\Phi(r)\sim A(r),\ r\to\infty,\ r\overline{\in} E, \tag{1}$$

где $A(r)$ — характеристика Л. Альфорса, E — некоторое множество конечной логарифмической меры.*

II.
$$\sum_{i=1}^{\Phi(r)} k_i(r)\leqslant 2A(r)+o[A(r)],\ r\to\infty,\ r\overline{\in} E. \tag{2}$$

III.
$$d(E_i(r))\leqslant\frac{K\varphi(r)\,r}{A^{\frac{1}{2}}(r)},\ i=1,\cdots,\Phi(r),\ r\to\infty,\ K=\mathrm{const}. \tag{3}$$

Поясним вкратце сущность свойства близости, содержащуюся в теореме A.

Мы видим, что области $E_i(r)$ „малы" и в каждой из этих областей $w(z)$ принимает всякое значение $a\in\overline{\mathbf{C}}$, исключая множество зна-

* Мы полагаем известными основные положения теории Р. Неванлинны и пользуемся стандартными обозначениями (см. [1]).

чений пренебрежительно малой сферической площади. Следовательно, для любых значений a и $b \in \overline{C}$ (за описанным исключением) a точки, принадлежащие $E_l(r)$, близкс располагаются друг от друга. Подробные разъяснения этого свойства см. в работе [2].

Здесь отметим, что все оценки теоремы А точны, из них вытекают вторые основные теоремы теории распределения значений как в форме Р. Неванлинны, так и в форме Л. Альфорса, а также вытекают результаты, предельно уточняющие проблематику о лучах Бореля и кругах наполнения.

Пример функции Вейерштрасса показывает, что однолистные облатти наполнения в кругах $|z| < r$ заполняют почти весь круг $|z| \leqslant r$, т. е. имеют относительную плотность 1. Естественно, интересны случаи классов функций, для которых относительная плотность нулевая (так как для этих классов большинство a-точек окажется лежащим на множестве пренебрежно малой площади).

Ниже вводится класс функций, характеризуемых близостью их нулей и полюсов, для которых диаметры однолистных областей наполнения оказываются существенно более маленькими, чем в общем случае, соответственно объединение этих областей имеют нулевую относительную площадь.

Пусть $w(z)$ — мероморфная в С функция конечного порядка, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ее полюсы с учетом кратности (b_k занумерованы в порядке возрастания их модулей). Скажем, что $w(z) \in M_{0,\infty}$, если существует такая нумерация ее нулей $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ (с учетом кратности), что выполняется

$$\sum_k \left| \frac{a_k - b_k}{b_k} \right| < +\infty. \tag{4}$$

Из (4) легко следует, что на любом ограниченном множестве комплексной плоскости равномерно и абсолютно сходится произведение

$$\prod(z) = \prod_k \frac{z - a_k}{z - b_k}. \tag{5}$$

Таким образом, если $w(z) \in M_{0,\infty}$, то согласно известным теоремам о представлении функций в виде произведения, имеем

$$w(z) = e^{P_m(z)} \prod_k \frac{z - a_k}{z - b_k}, \tag{6}$$

где $P_m(z)$ — многочлен, степень которого m не превосходит порядка функции $w(z)$.

Теорема. *Пусть $w(z) \in M_{0,\infty}$. Тогда в теореме* А *неравенство* (3) *можно заменить следующими*

$$d(E_l(r)) \leqslant K\varphi(r) \frac{r \ln r}{A(r)}, \quad m = 0, \quad K = K(w) = \text{const}^*, \quad r > r^*, \tag{7}$$

---

* В дальнейшем через K (K_1) будем обозначать абсолютные постоянные, не обязательно одинаковые даже на протяжении одной цепочки неравенств, зависящие только от выбора функции (и ε).

$$d(E_i(r)) \leqslant K_1 \varphi(r) \ln r \left\{ \frac{r}{A(r)} + \frac{r^{1-\alpha}}{A^{1/2}(r)} \right\}, \quad m \geqslant 1, r > r_1^*, \tag{8}$$

где $\alpha = \min(\varepsilon, 1)$, ε — *любое число из промежутка* $\left(0, \frac{m}{3}\right)$.

Отметим, что неравенства (7) и (8) усиливают неравенства (3) в том случае, когда $\lim \ln^2 r/A(r) = 0$.

Для доказательства приведенной выше теоремы установим предварительно несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть* $w(z) \in M_{0,\cdot}$. *Тогда произведение* (2) *для любого* r *удовлетворяет неравенству*

$$\iint\limits_{D(r)} \left| \frac{\Pi'(te^{i\varphi})}{\Pi(te^{i\varphi})} \right| t\,dt\,d\varphi \leqslant Kr(1 + \ln^+ r), \tag{9}$$

где $D(r) = \{z : |z| \leqslant r\}$.

Доказательство. Пользуясь тем, что

$$\left| \frac{\Pi'(te^{i\varphi})}{\Pi(te^{i\varphi})} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{te^{i\varphi} - a_k} - \frac{1}{te^{i\varphi} - b_k} \right|,$$

получим

$$I = \iint\limits_{D(r)} \left| \frac{\Pi'(te^{i\varphi})}{\Pi(te^{i\varphi})} \right| t\,dt\,d\varphi \leqslant \sum_{|b_k| < 2r} \iint\limits_{D(r)} \left| \frac{1}{te^{i\varphi} - a_k} - \frac{1}{te^{i\varphi} - b_k} \right| t\,dt\,d\varphi +$$

$$+ \sum_{|b_k| > 2r} \iint\limits_{D(r)} \left| \frac{1}{te^{i\varphi} - a_k} - \frac{1}{te^{i\varphi} - b_k} \right| t\,dt\,d\varphi = I_1 + I_2. \tag{10}$$

Для оценки I_1 обозначим через

$$\delta_k(r) = \max_{|b_k| < 2r} \left\{ |a_k - b_k|, \frac{2r}{n(2r;\infty)} \right\},$$

$$D_k(r) = \left\{ z : |z - z_k| \leqslant \delta_k(r),\ z_k = \frac{a_k + b_k}{2} \right\},$$

где $n(2r;\infty)$ — количество полюсов в круге $|z| \leqslant 2r$ с учетом кратности. Тогда, поскольку для $|b_k| < 2r$ и $z \in D(r) \setminus D_k(r)$, имеем $\frac{|z - b_k|}{3} \leqslant |z - a_k| \leqslant 3|z - b_k|$, то

$$I_1 \leqslant \sum_{|b_k| < 2r} \left\{ 3|a_k - b_k| \iint\limits_{D(r) \setminus D_k(r)} \frac{t\,dt\,d\varphi}{|te^{i\varphi} - b_k|^2} + \iint\limits_{D_k(r)} \frac{t\,dt\,d\varphi}{|te^{i\varphi} - b_k|} + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{D_k(r)} \frac{t\,dt\,d\varphi}{|te^{i\varphi} - b_k|} \right\} \leqslant \sum_{|b_k| < 2r} \left\{ 3|a_k - b_k| \int\limits_{\frac{1}{2}\delta_k(r)}^{3r} \int\limits_0^{2\pi} \frac{dR\,d\theta}{R} + \right.$$

$$\left. + 2 \int\limits_0^{\frac{3}{2}\delta_k(r)} \int\limits_0^{2\pi} dR\,d\theta \right\} \leqslant 2\pi \sum_{|b_k| < 2r} \left\{ 3|a_k - b_k| \ln \frac{6r}{\delta_k(r)} + 3\delta_k(r) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant 6\pi \sum_{|b_k| < 2r} \left\{ |a_k - b_k| \ln 3n(2r;\infty) + \frac{2r}{n(2r;\infty)} + |a_k - b_k| \right\}. \tag{11}$$

Так как $|z - b_k| > \frac{b_k}{2}$ при $|b_k| > 2r$ и $z \in D(r)$, то используя известное соотношение

$$\iint\limits_{D(r)} \frac{tdtd\varphi}{|te^{i\varphi} - a|} \leqslant 4\pi r,$$

получим

$$I_2 \leqslant \sum_{|b_k| > 2r} |a_k - b_k| \iint\limits_{D(r)} \frac{tdtd\varphi}{|te^{i\varphi} - a_k|\,|te^{i\varphi} - b_k|} \leqslant 8\pi r \sum_{|b_k| > 2r} \left| \frac{a_k - b_k}{b_k} \right|. \tag{12}$$

Если $n(2r;\ \infty) = 0$, то $I_1 = 0$ и из (10) и (12) следует, что

$$I < I_2 \leqslant Kr. \tag{13}$$

Если же $n(2r;\ \infty) \geqslant 1$ (тогда $\ln 3n(2r;\ \infty) > 1$), то из (10), (11), (12) будем иметь

$$I \leqslant Kr(1 + \ln n(2r;\ \infty)); \tag{14}$$

фактически из (13) и (14) вытекает, что для любого r справедливо

$$I < Kr(1 + \ln^+ n(2r;\ \infty)),$$

а поскольку $\ln^+ n(2r;\ \infty) \leqslant K(1 + \ln^+ r)$ для любого r, то тем самым утверждение леммы доказано.

Лемма 2. *Если через $E(r)$ обозначить множество*

$$E(r) = \{z : |z| < r,\ |\ln|\Pi(z)|| \geqslant \psi(r)\},$$

где $\psi(r) \uparrow \infty$, $r \to \infty$, то для любого r

$$S[E(r)] \leqslant K \frac{r^2(1 + |\ln r|)^2}{\psi^2(r)}, \tag{15}$$

где $S[X]$ — площадь множества X.

Доказательство. Поскольку $E(r) = E_1(r) \cup E_2(r)$, где

$$E_1(r) = \{z : |z| \leqslant r,\ \ln|\Pi(z)| \geqslant \psi(r)\},$$

$$E_2(r) = \{z : |z| \leqslant r,\ -\ln|\Pi(z)| \geqslant \psi(r)\},$$

то достаточно вычислить площадь каждого $E_i(r)$, $i = 1, 2$. Из определения множества $E_1(r)$ имеем ($z = te^{i\varphi}$)

$$S[E_1(r)]\psi(r) \leqslant I = \iint\limits_{E_1(r)} \ln|\Pi(te^{i\varphi})|\,tdtd\varphi < \sum_{|b_k| < 2r} \iint\limits_{E_1(r)} \ln\left|\frac{te^{i\varphi} - a_k}{te^{i\varphi} - b_k}\right| tdtd\varphi +$$

$$+ \sum_{|b_k| > 2r} \iint\limits_{E_1(r)} \ln\left|\frac{te^{i\varphi} - a_k}{te^{i\varphi} - b_k}\right| tdtd\varphi = I_1 + I_2. \tag{16}$$

Поскольку при $|b_k| > 2r$ и $z \in E_1(r)$ имеем $|z - b_k| > \frac{|b_k|}{2}$, то

$$I_2 < \sum_{|b_k| > 2r} \iint\limits_{E_1(r)} \ln\left|1 + \frac{b_k - a_k}{te^{i\varphi} - b_k}\right| tdtd\varphi < \sum_{|b_k| > 2r} \iint\limits_{E_1(r)} \left|\frac{b_k - a_k}{te^{i\varphi} - b_k}\right| tdtd\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|b_k|>2r} 2\left|\frac{a_k - b_k}{b_k}\right| S[E_1(r)] \leqslant 2\sqrt{\pi}\sqrt{S[E_1(r)]}\; r \sum_{|b_k|>2r}\left|\frac{a_k - b_k}{b_k}\right|. \tag{17}$$

Обозначим через

$$\delta_k'(r) = 2 \max_{|b_k|\leqslant 2r}\left\{|a_k - b_k|,\ \frac{2r}{n(2r;\ \infty)}\right\},$$

$$D_k'(r) = \left\{z : |z - z_k| \leqslant \delta_k'(r),\ z_k = \frac{a_k + b_k}{2}\right\}.$$

Тогда применив неравенство Коши-Буняковского получим, что

$$I_1 \leqslant \sum_{|b_k|\leqslant 2r}\left\{\iint\limits_{E_1(r)\setminus D_k'(r)} \ln\left|\frac{te^{i\varphi} - a_k}{te^{i\varphi} - b_k}\right| tdtd\varphi + \iint\limits_{E_1(r)\cap D_k'(r)} \ln|te^{i\varphi} - a_k|\, tdtd\varphi + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{E_1(r)\cap D_k'(r)} \ln\frac{1}{|te^{i\varphi} - b_k|} tdtd\varphi\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{S[E_1(r)]}\sum_{|b_k|\leqslant 2r}\left\{\left(\iint\limits_{D(r)\setminus D_k'(r)} \ln^2\left|1 + \frac{b_k - a_k}{te^{i\varphi} - b_k}\right| tdtd\varphi\right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left(\iint\limits_{D_k'(r)} \ln^2|te^{i\varphi} - a_k|\, tdtd\varphi\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\iint\limits_{D_k'(r)} \ln^2|te^{i\varphi} - b_k|\, tdtd\varphi\right)^{\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$= \sqrt{S[E_1(r)]}\,\{I_1^1 + I_1^2 + I_1^3\}. \tag{18}$$

Так как для $|b_k| \leqslant 2r$ и $z \in D(r)\setminus D_k'$ имеем

$$\left|\frac{b_k - a_k}{z - b_k}\right| \leqslant \frac{2}{3},$$

то из известного неравенства $|\ln(1 + z)|^2 \leqslant 9|z|^2$, $|z| \leqslant \dfrac{2}{3}$ получим, что

$$I_1^1 \leqslant \sum_{|b_k|\leqslant 2r} 3|a_k - b_k|\left(\iint\limits_{D(r)\setminus D_k'(r)} \frac{tdtd\varphi}{|te^{i\varphi} - b_k|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 6\sum_{|b_k|\leqslant 2r}|a_k - b_k|\left(\int\limits_{\frac{3}{4}\delta_k'(r)}^{3r}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dRd\theta}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 6\sqrt{2\pi}\sqrt{\ln n(2r;\ \infty)}\sum_{|b_k|\leqslant 2r}|a_k - b_k|. \tag{19}$$

Интегралы I_1^2 и I_1^3 оцениваются аналогично, т. е.

$$I_1^2 + I_1^3 \leqslant \sum_{|b_k|\leqslant 2r} 2\left(\int\limits_0^{\frac{5}{4}\delta_k'(r)}\int\limits_0^{2\pi}(\ln^2 R)\, RdRd\theta\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{2\pi}\sum_{|b_k|<2r}\left(\int_0^{\frac{5}{4}\delta'_k(r)}(\ln^2 R)\,Rd\theta\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}\sqrt{\pi}\sum_{|b_k|<2r}\delta'_k(r)\left(\left|\ln\frac{5}{4}\delta'_k(r)\right|+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\right)\leqslant\frac{5}{2}\sqrt{\pi}\sum_{|b_k|<2r}\delta'_k(r)\,(|\ln\delta'_k(r)|+2)\leqslant Kr\,(|\ln r|+|\ln n\,(2r;\,\infty)|+1). \tag{20}$$

Если $n\,(2r;\ \infty)<1$, то $I_1=0$ и из (16) и (17) следует, что

$$S\,[E_1(r)]\,\psi(r)\leqslant Kr\sqrt{S[E_1(r)]}. \tag{21}$$

Если же $n\,(2r;\ \infty)\geqslant 1$, то из (16)—(20) будем иметь

$$I\leqslant Kr\sqrt{S[E_1(r)]}\,(\sqrt{\ln n\,(2r;\,\infty)}+|\ln r|+$$
$$+\ln n\,(2r;\,\infty)+1). \tag{22}$$

Из (21) и (22) вытекает, что для любого r

$$I\leqslant Kr\sqrt{S[E_1(r)]}\,(1+\sqrt{\ln^+ n\,(2r;\,\infty)}+|\ln r|+\ln^+ n\,(2r;\,\infty)),$$

а поскольку $\ln^+ n\,(2r;\ \infty)\leqslant K\,(\ln^+ r+1)$ для любого r, то последнее неравенство примет вид

$$I\leqslant Kr\sqrt{S[E_1(r)]}\cdot(\ln^+ r+1+|\ln r|)\leqslant Kr\sqrt{S[E_1(r)]}\,(1+|\ln r|). \tag{23}$$

Из (16) и (23) получаем

$$S[E_1(r)]\leqslant K\frac{r^2(1+|\ln r|)^2}{\psi^2(r)},\quad r>0.$$

Точно так же оценивается и $S\,[E_2(r)]$. Таким образом, лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $a_\nu=\sigma_\nu e^{i\varepsilon_\nu}$, $\nu=0,\ m$ — *произвольные комплексные числа и пусть* $k(r)\uparrow+\infty$, $r\to\infty$, *причем такая, что*

$$\frac{2^m}{\sigma_m}\,\frac{\ln k(r)}{r^m}<c<1,\ r\geqslant r_0,\ c=\text{const}<+\infty.$$

Тогда в кольце $D\left(\frac{r}{2};\ r\right)=\left\{r:\frac{r}{2}\leqslant|z|\leqslant r\right\}$ *при* $r\geqslant r_1$ *можно указать множества* $D(r;\ k(r))$ *и* $D^*(r;\ k(r))$, *для которых справедливо следующее:*

I. $\quad|\exp\{a_m z^m+\cdots+a_0\}|\geqslant k(r),\ z\in D(r;\ k(r)),$

II. $\quad|\exp\{a_m z^m+\cdots+a_0\}|\leqslant\dfrac{1}{k(r)},\ z\in D^*(r;\ k(r)),$

III. $\quad S\left[D\left(\frac{r}{2};\ r\right)\setminus\{D(r;\ k(r))\cup D^*(r;\ k(r))\}\right]\leqslant M\dfrac{\ln k(r)}{r^{m-2}},$

где $M=\text{const}<+\infty$.

Доказательство. Полагая $z=te^{i\theta}$, получим

$$
\begin{aligned}
u(t;\ \theta) &= Re\,(a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0) + a_0) = \\
&= \sigma_m t^m \cos(\xi_m + m\theta)\left[1 + \frac{1}{\sigma_m t^m}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\sigma_j t^j \cos(\xi_j + j\theta)}{\cos(\xi_m + m\theta)}\right],
\end{aligned} \tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
u'_\theta(t;\ \theta) &= -\sigma_m t^m m \sin(\xi_m + m\theta)\left[1 + \right. \\
&\left. + \frac{1}{\sigma_m t^m m}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\sigma_j t^j j \sin(\xi_j + j\theta)}{\sin(\xi_m + m\theta)}\right].
\end{aligned} \tag{25}
$$

Пусть $\varphi(t) \downarrow 0,\ t \to \infty$ и $t\varphi(t) \to \infty\ t \to \infty$. Рассмотрим $\varphi(t)$ — окрестности нулей функции $\cos(\xi_m + m\theta)$, т. е. рассмотрим совокупность интервалов

$$
\Gamma_k(t) = \left(\frac{1}{m}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k - \xi_m\right) - \varphi(t);\ \frac{1}{m}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k - \xi_m\right) + \varphi(t)\right),
$$

$$
k = 0 \pm 1, \pm 2 \cdots.
$$

Так как вне этих интервалов, т. е. при $\theta \in R \setminus \left\{\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \Gamma_k(t)\right\}$

$$
|\cos(\xi_m + m\theta)| \geqslant \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - m\varphi(t)\right)\right| > |\sin(m\varphi(t))|,
$$

то применяя известное соотношение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, получим, что

$$
\left|\frac{1}{\sigma_m t^m}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\sigma_j t^j \cos(\xi_j + j\theta)}{\cos(\xi_m + m\theta)}\right| \leqslant M_1 \frac{1}{t\varphi(t)}\quad t \geqslant \dot{t_0}\ M_1 = \text{const.} \tag{26}
$$

Если $\theta \in \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \Gamma_k(t)$, то

$$
|\sin(\xi_m + m\theta)| > \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - m\varphi(t)\right)\right| = |\cos(m\varphi(t))|
$$

и следовательно

$$
\left|\frac{1}{\sigma_m t^m m}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\sigma_j t^j (\xi_j \sin + j\theta)}{\sin(\xi_m + m\theta)}\right| < M_2\frac{1}{t},\ t \geqslant \ddot{t_0},\ M_2 = \text{const.} \tag{27}
$$

Из (26) следует, что величина в квадратных скобках (24) стремится к 1 при $t \to \infty$ равномерно по $\theta \in R \setminus \left\{\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \Gamma_k(t)\right\}$, т. е. для этих θ и для каждого $t \geqslant t^* \geqslant \dot{t_0}$ функции $u(t;\ \theta)$ и $t^m \sigma_m \cos(\xi_m + m\theta)$ имеют одинаковый знак. Из (26) следует, что величина в квадратных скобках (25) стремится к 1 при $t \to \infty$ равномерно по $\theta \in \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \Gamma_k(t)$, т. е. для этих θ и для каждого $t \geqslant t^{**} \geqslant \ddot{t_0}$ функции $u'_\theta(t;\ \theta)$ и $-\sigma_m t^m \sin(\xi_m + m\theta)$ имеют одинаковый знак. Мы получили, что на любом $\Gamma_k(t)$ для каждого $t > t_1 = \max(t^*, t^{**})$ функция $u(t;\ \theta)$ строго монотонна по θ, а на концах $\Gamma_k(t)$ она имеет разные знаки. Следовательно уравнение $u(t;\ \theta) = 0$ на $\Gamma_k(t)$, $k = 0, \pm 1, \cdots$ имеет единственный корень, т. е. количество решений уравнения $u(t;\ \theta) = 0$ на отрезке $(0;\ 2\pi]$ совпадает с количеством нулей функции $\cos(\xi_m + m\theta)$ для каждого $t \geqslant t_1$. Окончательно мы получили, что для каждого $t > t_1$ на окружности $|z| = t$ это уравнение имеет $2m$ решений, лежащих на $\Gamma_k(t)$, и поэтому при $t \to \infty$ эти решения (точки на $|z| = t$) описывают кривые (обозначим их через β_j, $j = 1, \cdots, 2m$), которые асимптотически приближаются к лучам $\alpha_j = \left\{z : \arg z = \frac{1}{m}\left(\frac{\pi}{2} + \pi j - \xi_m\right)\right\}$, $j = 1, \cdots, 2m$. Эти лучи, в свою очередь, являются геометрическим местом решений уравнения $Re(a_m z^m) = 0$, т. е. $\sigma_m t^m \cos(\xi_m + m\theta) = 0$.

Рассмотрим уравнение $|\exp\{a_m z^m + \cdots + a_1 z a_1 z + a_0\}| = k(r)$ или,

$$u(t;\ \theta) = \ln k(r),\ r > r_0,\ \frac{r}{2} \leqslant t \leqslant r,\ 0 < \theta \leqslant 2\pi.$$

Буквально повторяя предыдущие рассуждения (только вместо $\varphi(t)$ — окрестностей нулей функции $\cos(\xi_m + m\theta)$ нужно взять $\varphi(t)$ — окрестности решений уравнения $\sigma_m t^m \cos(\xi_m + m\theta) - \ln k(r) = 0$, $r > r_0$ $\frac{r}{2} \leqslant t < r$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$), получим, что для $r > \bar{r}_0$ решения этого уравнения представляют собой $2m$ кривых (обозначим их через $\gamma_j(k(r))$, $j = 1, \cdots, 2m$), асимптотически приближающихся к кривым, которые являются решениями уравнения $\sigma_m t^m \cos(\xi_m + m\theta) = \ln k(r)$, $r \geqslant r_0$, $\frac{r}{2} < t \leqslant r$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$; причем $\gamma_j(k(r))$, $j = 1, \cdots, 2m$ попарно лежат в тех криволинейных угловых областях, где $u(t;\ \theta) > 0$, $t \geqslant t_1$ (см. рис. 1)

Если обозначить заштрихованные области, обведенные штрихами через $D(r;\ k(r))$, то нетрудно убедиться в том, что

$$|\exp\{a_m t^m + \cdots + a_1 z + a_0| \geqslant k(r),\ r \in D(r;\ k(r)),\ r > \bar{r}_0.$$

Точно так же находим кривые $\gamma_j^*(k(r))$, $j = 1, \cdots, 2m$, которые являются решениями уравнения $u(t;\ \theta) = -\ln k(r)$, $\frac{r}{2} \leqslant t \leqslant r$, $r \geqslant \bar{r}$.

Они попарно лежат в угловых областях, где $u(t;\ \theta) < 0$, $t \geqslant t_1$ (см. рис. 1). Через $D^*(r;\ k(r))$ обозначим заштрихованные области, обведенные точками. Ясно, что если $z \in D^*(r;\ k(r))$, то

$$|\exp\{a_m z^m + \cdots + a_1 + z a_0\}| \leqslant \frac{1}{k(r)},\ r \geqslant \bar{r}_0,$$

Множество $D\left(\frac{r}{2};\ r\right) \setminus \{D(r;\ k(r)) \cup D^*(r;\ k(r))\}$ состоит из $2m$ компонент, которые обозначим через $E_j(r;\ k(r))$, $j = 1, \cdots, 2m$. Так как

$$S\left[D\left(\frac{r}{2};\ r\right) \setminus \{D(r;\ k(r)) \cup D^*(r;\ k(r))\}\right] = \sum_{j=1}^{2m} S[E_j(r;\ k(r))],\ r \geqslant \bar{r}_0,$$

то достаточно вычислить площадь каждого $E_j(r;\ k(r))$, $j = 1, \cdots, 2m$.

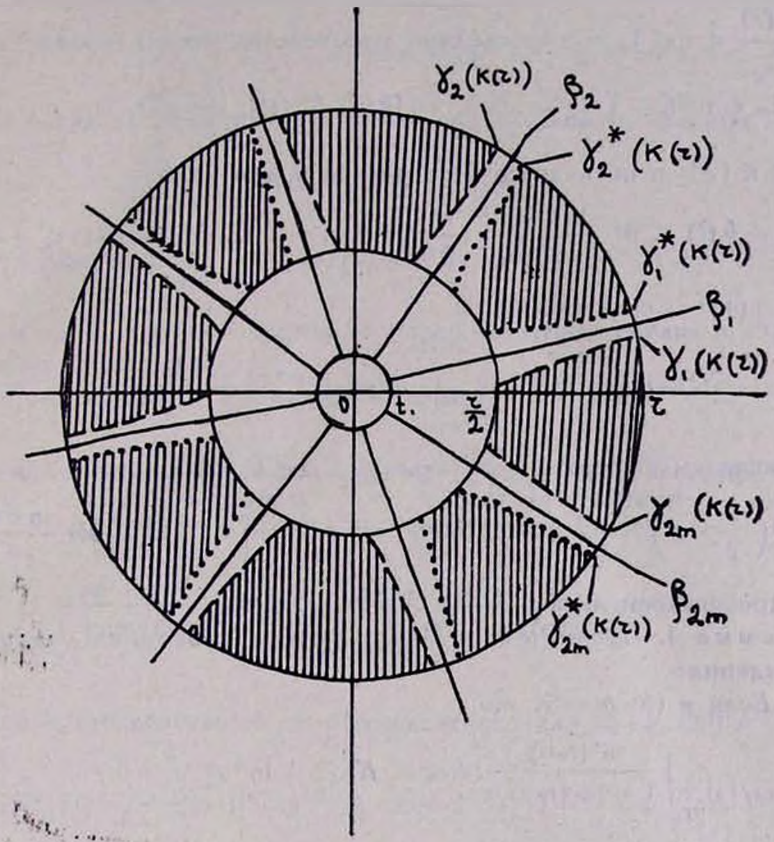

Рис. 1.

Пусть $\theta(t)$ — аргумент точки $z \in \gamma_1(k(r))$, $\theta^*(t)$ — аргумент точки $z \in \gamma_1^*(k(r))$. Тогда

$$u(t;\ \theta(t)) = \ln k(r),\ u(t;\ \theta^*(t)) = -\ln k(r),\ \frac{r}{2} \leqslant t \leqslant r,\ r \geqslant \bar{r}_0,$$

и по теореме Лагранжа получим

$$|\theta^*(t) - \theta(t)| = \frac{2\ln k(r)}{\left|u'_\theta(t,\ \tilde{\theta}(t))\right|},\ \frac{r}{2} \leqslant t \leqslant r,\ r \geqslant \bar{r}_0, \tag{28}$$

где $\tilde{\theta}(t) \in [\theta(t),\ \theta^*(t)]$.

Так как $\left(\frac{r}{2} \leqslant t \leqslant r,\ r \geqslant \bar{r}_0\right)$

$$\cos(\xi_m + m\theta(t)) = \frac{\ln k(r)}{\sigma_m t^m} - \frac{1}{\sigma_m t_m} \sum_{j=0}^{m-1} \sigma_j t^j \cos(\xi_j + j\theta(t)),$$

$$\cos(\xi_m + m\theta^*(t)) = -\frac{\ln k(r)}{\sigma_m t^m} - \frac{1}{\sigma_m t^m} \sum_{j=0}^{m-1} \sigma_j t^j \cos(\xi_j + j\theta^*(t))$$

и выражения в квадратных скобках этих соотношений стремятся к нулю при $t \to \infty$, то функция $\cos(\xi_m + m\theta)$ на отрезке $[\theta(t),\ \theta^*(t)]$ монотонна по θ для достаточно больших t. Поэтому из того, что

$\frac{2^m}{\sigma_m}\frac{\ln k(r)}{r^m}<c<1$, $r \geqslant r_0$, следуют неравенства $|\cos(\xi_m+m\theta)|<c<1$,

$$|\sin(\xi_m+m\theta)|\geqslant\sqrt{1-c^2}>0,\ \theta\in[\theta(t),\theta^*(t)],\ \frac{r}{2}\leqslant t\leqslant r,\ r\geqslant\bar{r}_0.$$

Из (25) и (28) и последнего неравенства будем иметь

$$|\theta^*(t)-\theta(t)|\leqslant M_3\frac{\ln k(r)}{t^m},\quad \frac{r}{2}\leqslant t\leqslant r,\ r\geqslant r_0,\ M_3=\text{const}<+\infty.$$

Значит при $r\geqslant r_1=\max(r_0,\bar{\bar{r}}_0)$

$$S[E_1(r,k(r))]=\int\limits_{r/2}^{r}\int\limits_{\theta(t)}^{\theta^*(t)}tdtd\theta\leqslant 2^{m-1}M_3\frac{\ln k(r)}{r^{m-2}}.$$

Аналогично вычисляются и остальные $E_j(r,k(r))$. Поэтому при $r\geqslant r_1$,

$$S\left[D\left(\frac{r}{2};r\right)\setminus(D(r;k(r))\cup D^*(r;k(r)))\right]\leqslant 2_m 2^{m-1}M_3\frac{\ln k(r)}{r^{m-2}},$$

что и требовалось доказать при $M=2_m 2^{m-1}M_3$.

Лемма 4. *Пусть $w(z)\in M_{0,\infty}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

I. *Если в* (6) $m=0$, *то*

$$\iint\limits_{D(r)}\frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}tdtd\varphi\leqslant Kr(1+\ln^+r),\ r>0.$$

II. *Если же в* (6) $m\geqslant1$, *то для любого* $0<\varepsilon<\frac{m}{3}$ *существует* $r_1^*>0$ *такое, что*

$$\iint\limits_{D(r)}\frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}tdtd\varphi\leqslant K_1r\ln r\left\{\frac{\sqrt{A(r)}}{r^\alpha}+1\right\},\ r\geqslant r_1^*,$$

где $\alpha=\min(\varepsilon;1)$.

Доказательство. Используя лемму 1, получим, что для любого $r>0$ справедливо $(m=0)$

$$\iint\limits_{D(r)}\frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}tdtd\varphi\leqslant\iint\limits_{D(r)}\frac{|\Pi'(te^{i\varphi})|}{|\Pi(te^{i\varphi})|}tdtd\varphi\leqslant Kr(1+\ln^+r).$$

Тем самым утверждение I доказано.

Пусть $m\geqslant1$, $\psi(r)\uparrow\infty$, $r\to\infty$ и $\psi_1(r)\uparrow\infty$, $r\to\infty$, причем $\frac{\psi_1(r)}{r^m}\to0$, $r\to\infty$. Обозначим через

$$E(r)=\left\{z:\frac{r}{2}\leqslant|z|\leqslant r,\ |\ln|\Pi(z)||\geqslant\psi(r)\right\},$$

$$D(r;e^{\psi_1(r)})=\left\{z:\frac{r}{2}\leqslant|z|\leqslant r,\ |\exp(a_mz^m+\cdots+a_1z+a_0)|\geqslant e^{\psi_1(r)}\right\},$$

$$D^*(r; e^{\psi_1(r)}) = \left\{ z: \frac{r}{2} \leqslant |z| < r, \ |\exp[a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0]| \leqslant \frac{1}{e^{\psi_1(r)}} \right\}.$$

Тогда согласно леммам 2 и 3 можно найти такое r_1, что при $r > r_1$

$$S[E(r)] < K \frac{r^2 \ln^2 r}{\psi^2(r)}, \tag{29}$$

$$S[\overline{E}(r) = D\left(\frac{r}{2}; r\right) \setminus [D(r; e^{\psi_1(r)}) \cup D^*(r; e^{\psi_1(r)})]] \leqslant K \frac{\psi_1(r)}{r^{m-2}}. \tag{30}$$

К тому же r_1 выберем настолько большим, чтобы справа в (9) стояла величина $Kr \ln r$, $r \geqslant r_1$.

Сперва для $r \geqslant r_1$ оценим интеграл

$$I = \iint\limits_{D\left(\frac{r}{2}; r\right)} \frac{|w'(te^{i\varphi})|^2}{1 + |w(te^{i\varphi})|^2} t dt d\varphi \leqslant \iint\limits_{E(r) \cup \overline{E}(r)} \frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1 + |w(te^{i\varphi})|^2} t dt d\varphi +$$

$$+ \iint\limits_{D(r; e^{\psi_1(r)}) \setminus E(r)} \frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1 + |w(te^{i\varphi})|^2} t dt d\varphi + \iint\limits_{D^*(r; e^{\psi_1(r)}) \setminus E(r)} \frac{w'(te^{i\varphi})|}{1 + |w(te^{i\varphi})|^2} t dt d\varphi = I_1 + I_2 + I_3. \tag{31}$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского для 1, из (29) и (30) получим

$$I_1 \leqslant (S[E(r)] + S[\overline{E}(r)])^{1/2} A^{1/2}(r) \leqslant Kr A^{1/2}(r) \left(\frac{\psi_1(r)}{r^m} + \frac{\ln^2(r)}{\psi^2(r)}\right)^{1/2}. \tag{32}$$

Если $z \in D(r; e^{\psi_1(r)}) \setminus E(r)$, то

$$\frac{|w(z)|}{1 + |w(z)|^2} \leqslant e^{\psi(r) - \psi_1(r)},$$

и поэтому, используя (9) будем иметь

$$I_2 \leqslant \iint\limits_{D(r; e^{\psi_1(r)}) \setminus E(r)} \frac{|w(te^{i\varphi})|}{1 + |w(te^{i\varphi})|^2} \left| P_m'(te^{i\varphi}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Pi'(te^{i\varphi})}{\Pi(te^{i\varphi})} \right| t dt d\varphi \leqslant K \left[\frac{r^{m+1}}{e^{\psi_1(r) - \psi(r)}} + r \ln r \right].$$

Аналогично можно показать, что

$$I_3 \leqslant K \left[\frac{r^{m+1}}{e^{\psi_1(r) - \psi(r)}} + r \ln r \right]. \tag{34}$$

Из (31), (32), (33) и (34) следует, что

$$I \leqslant Kr A^{1/2}(r) \left(\frac{\psi_1(r)}{r^m} + \frac{\ln^2 r}{\psi^2(r)}\right)^{1/2} + K\left(\frac{r^{m+1}}{e^{\psi_1(r) - \psi(r)}} + r \ln r\right), \ r > r_1.$$

Пусть $\psi_1(r) = r^{m-2\varepsilon}$, $\psi(r) = \psi^{\varepsilon} \ln r$, где $0 < \varepsilon < \frac{m}{3}$. Тогда

$$I < Kr\,A^{1/2}(r)\,\frac{1}{r^{\epsilon}} + K\left(\frac{r^{m+1}}{e^{r^{m-2\epsilon}} - r^{\epsilon}\ln r} + r\ln r\right) \leqslant$$
$$\leqslant K_1\left(r^{1-\epsilon}A^{1/2}(r) + r\ln r\right),\quad r \geqslant r_2 > r. \tag{35}$$

Теперь оценим интеграл от сферической производной функции $w(z)$ в области $D(r)$. Для $r > r_2$ выберем неотрицательное целое число l такое, что $l \leqslant \log_2 \frac{r}{r_2} < l+1$ и разделим отрезок $[0;\ r]$ следующим образом:

$$[0;\ r] = \left[0;\ \frac{r}{2^{l+1}}\right] \cup \left[\frac{r}{2^{l+1}};\ \frac{r}{2^{l}}\right] \cup \cdots \cup \left[\frac{r}{2};\ r\right].$$

Так как $\frac{r}{2^{l+1}} < r_2 \leqslant \frac{r}{2^{l}}$, то применяя (35) получим, что

$$\iint\limits_{D(r)} \frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}\,t\,dt\,d\varphi \leqslant \iint\limits_{D(r_2)} \frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}\,t\,dt\,d\varphi +$$
$$+ \sum_{j=0}^{l} \iint\limits_{D\left(\frac{r}{2^{j+1}};\ \frac{r}{2^{j}}\right)} \frac{|w'(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}\,t\,dt\,d\varphi \leqslant K_1 +$$
$$+ K_1 r^{1-\epsilon}A^{1/2}(r)\left\{1 + \cdots + (2^{l})^{\epsilon-1}\right\} + K_1 r\ln r\left\{1 + \cdots + \frac{1}{2^{l}}\right\}. \tag{36}$$

Поскольку $(l+1) \leqslant \log_2 2\frac{r}{r_2}$ и

$$1 + 2^{\epsilon-1} + \cdots + 2^{l(\epsilon-1)} = l+1,\quad \epsilon = 1,$$
$$1 + 2^{\epsilon-1} + \cdots + 2^{l(\epsilon-1)} = \frac{1-2^{(l+1)(\epsilon-1)}}{1-2^{\epsilon-1}},\quad \epsilon \neq 1,$$

то из (36) следует, что

$$I \leqslant K_1 r\ln r\left\{\frac{\sqrt{A(r)}}{r^{\alpha}} + 1\right\},\quad r \geqslant r_1^{*} > r_2,$$

где $\alpha = \min(\epsilon,\ 1)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Доказательство неравенств (3) теоремы А вытекало из следующего неравенства (см. [2], стр. 418—419):

$$\sum_{i=1}^{\Phi(r)} d(E_i(r)) \leqslant K\sqrt{\varphi(r)} \iint\limits_{D(r)} \frac{|w(te^{i\varphi})|}{1+|w(te^{i\varphi})|^2}\,t\,dt\,d\varphi + Kr,$$

где $K = \mathrm{const}$.

Если $w(z) \in M_{0,\infty}$, то воспользовавшись леммой 4 будем иметь

$$\sum_{i=1}^{\Phi(r)} d(E_i(r)) < K\sqrt{\varphi(r)}\,r\ln r,\quad m = 0,\ r > r^{*},$$
$$\sum_{i=1}^{\Phi(r)} d(E_i(r)) < K_1\sqrt{\varphi(r)}\,r\ln r\left\{\frac{\sqrt{A(r)}}{r^{\alpha}} + 1\right\},\quad r > r_1^{*}. \tag{37}$$

Чтобы получить неравенство (7) выбросим из рассмотрения те области $E_i(r)$, для которых $d(E_i(r)) \geqslant K \frac{\varphi(r) r \ln r}{A(r)}$. Так как согласно (37) количество таких областей $o[A(r)]$, $r \to \infty$, то сохраняя для оставшихся областей все обозначения теоремы 1, получим неравенство (7).

Аналогично можно доказать неравенство (8).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 22.VI.1988

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ, Գ. Ա. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ Մոտիկության հատկության մերոմորֆ ֆունկցիաների համար, որոնց զրոները և բևեռները մոտ են *(ամփոփում)*

Տվյալ աշխատանքում C-ում մերոմորֆ $w(z)$ ֆունկցիաների համար, որոնք բնութագրվում են զրոների և բևեռների մոտիկությամբ, ճշգրտվում են որոշ գնահատականներ այդ ֆունկցիաների a-կետերի մոտիկության վերաբերյալ, ըստ որի $|z| \leqslant r$ շրջաններում կարելի է ցույց տալ փոքր տրամագծով $\sim A(r)$ տիրույթներ՝ լցման տիրույթներ, որոնց w-պատկերները միաթերթ ծածկում են համարյա լրիվ հարթությունը։

Պարզվում է, որ այդ դասի ֆունկցիաների համար նշված լցման տիրույթների տրամագիծը ավելի փոքր է, քան ընդհանուր դեպքում։

G. A. BARSEGIAN. G. A. SUKIASIAN. *A proximity property of meromorphic functions with close zeros and poles* (summary)

In the paper for certain class of meromorphic in C functions $w(z)$ with close zeros and poles some estimates relating to the proximity property of the a-points are made more precise. By the property in question one can point out in the circles $|z| \leqslant r$ approximately $A(r)$ regions of small diameter (regions de remplissage) such that their w — images cover univalently almost the whole plane.

For the functions from the class under consideration the diameters of the mentioned regions de remplissage have been found small in comparison with general case

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М., Гостехиздат, 1941.
2. *Г. А. Барсегян.* Свойство близости a-точек мероморфных функций и структура однолистных областей римановых поверхностей, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XX, № 5, 1985, 375—400; т. XX, 6, 1985, 407—425.