ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXV, № 1, 1990 Математика

УДК 517.53

Г. М. АЙРАПЕТЯН

РАЗРЫВНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА-ПРИВАЛОВА СО СМЕЩЕНИЕМ В КЛАССЕ L^1

1°. Пусть G^+—некоторая область на комплексной плоскости, ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова Γ, а G^- — дополнение множества $G^+ \cup \Gamma$.

Обозначим через $H(\Omega)$ класс функций, определенных на множестве Ω и удовлетворяющих условию Гельдера. Соответственно через $H_0(\Gamma; t_1, t_2, \cdots, t_n)$ обозначим класс функций, имеющих разрыв первого рода в точках $t_k \in \Gamma$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ и удовлетвораюших условию Гельдера на каждой замкнутой части Γ, находящейся между такими соседними точками.

Пусть, далее, $\alpha(t)$ — заданная на Γ непрерывная функция, которая удовлетворяет следующим условиям:

а) $\alpha(t)$ взаимно однозначно отображает Γ на себя, сохраняя ориентацию.

в) Производная $\alpha'(t)=d\alpha(t)/dt$ отлична от нуля на Γ и принадлежит классу $H(\Gamma)$.

Приведем классическое определение граничной задачи сопряжения со сдвигом: найти голоморфную в $G^+ \cup G^-$ функцию $\Phi(z)$, имеюшую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(\alpha(t)) - D(t)\, \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{1}$$

где $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ — сужения функции $\Phi(z)$ соответственно на G^+ и G^-, $D(t)$ и $f(t)$ —некоторые функции, заданные на Γ, а $\alpha(t)$ удовлетворяет вышеуказанным условиям а) и в).

В случае, когда $\alpha(t)\equiv t$, $D(t)$ и $f(t)$ принадлежат классу $H_0(\Gamma; t_1, t_2, \cdots, t_n)$, $D(t)\neq 0$ и функция $\Phi(z)$ ищется в классе функций, непрерывно продолжаемых на Γ слева и справа, кроме точек разрыва $t_1, t_2, \cdots, t_n$ функции $D(t)$, где предполагается выполнение неравенства $|\Phi(z)| < \mathrm{Const}\cdot|z-t_k|^{-\alpha}$ $(0<\alpha<1,\ k=1, 2, \cdots, n)$, задача (1) полностью изучена в монографиях Н. И. Мусхелишвили [1] и Ф. Д. Гахова [2]. В [1], вводя понятие классов $h(t_1, t_2, \cdots, t_q)$ $(q < n)$, вычисляется индекс соответствующей задачи и устанавливается, что общее решение неоднородной задачи в классе $h(t_1, t_2, \cdots, t_q)$ можно представить в виде

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{S^+(t)} \frac{dt}{t-z} + S(z)\, P(z), \tag{2}$$

где $S(z)$ — каноническое решение задачи (1) в классе $h(t_1, \cdots, t_q)$, а $P(z)$ — произвольный полином.

В работах [3, 4] Б. В. Хведелидзе рассмотрена задача (1) в том случае, когда $f(t) \in L^p(\Gamma; \rho)$, $p > 1$ и ρ — вес специального вида. В этом случае, если требовать, чтобы решения $\Phi(z)$ были представлены интегралом типа Коши от функции из класса $L^p(\Gamma, \rho)$, $1 < p < \infty$, то общее решение также можно представить в виде (2). Отметим, что в этой работе рассматривается также случай, когда коэффициент $D(t)$ в точках $t_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ может стремиться к бесконечности или к нулю со скоростью любого порядка.

Задача (1), когда $f(t) \in L^1(\Gamma)$, $D(t) \in H(\Gamma)$, изучена в работах Г. А. Хускивадзе (см., например, [5]). Им было установлено, что если решение этой задачи ищется в классе функций $\bar{K}_n(\Gamma)$, состоящего из $\bar{L}$-интегралов типа Коши с кривой разрыва Г, то общее решение также может быть представлено в виде (2).

Случай, когда функция $D(t)$ — произвольная измеримая функция, рассмотрен в работе И. Б. Симоненко [6]. Полагая, что $D(t)$ удовлетворяет условию $A(p)$, $f(t) \in L^p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ устанавливается, что задачу (1) можно решить в классе $E_p (1 < p < \infty)$ Смирнова и решение представить в виде (2).

В дальнейшем эти результаты были обобщены в различных направлениях. Отметим обзорную работу Б. В. Хведелидзе [6], а также монографии И. И. Данилюка [8] и Г. С. Литвинчука [9], где можно найти подробный литературный обзор.

2°. В настоящей работе рассматривается задача (1) в том случае, когда $f(t) \in L^1(\Gamma)$, а $D(t) \in H_0(\Gamma; t_1, t_2, \cdots, t_n)$. Для формулировки задачи введем некоторые обозначения. Пусть D^+ — единичный круг, T — единичная окружность, а D^- — область $|z| > 1$. Обозначим через $\omega(z)$ и $\mu(z)$ $(\mu(\infty) = \infty)$ функции, конформно отображающие области D^+ и D^- соответственно на G^+ и G^-. Для любого $r (0 < r < 1)$ положим

$$\lambda_r(z) = \omega(r\omega^{-1}(z)), \text{ при } z \in G^+,$$

$$\lambda_{r^{-1}}(z) = \mu(r^{-1}\mu^{-1}(z)), \text{ при } z \in G^-.$$

Под задачей сопряжения со смещением в $L^1(\Gamma)$ будем понимать следующую задачу.

Задача А. Найти голоморфную в $G^+ \cup G^-$ функцию $\Phi(z)$, обращающуюся в нуль на бесконечности, по граничному условию

$$\lim_{r \to 1-0} \|\Phi^+(\lambda_r(\alpha(t))) - D(t)\Phi^-(\lambda_{r^{-1}}(t)) - f(t)\|_1 = 0, \tag{3}$$

где $f(t) \in L^1(\Gamma)$, $D(t) \in H_0(\Gamma; t_1, t_2, \cdots, t_n)$, $D(t) \neq 0$, а $\| \; \|_1$ — норма в пространстве $L^1(\Gamma)$.

В случае, когда граничные данные принадлежат $L^1(\Gamma)$, краевые задачи для эллиптических уровнений приводятся к задаче А, где граничные условия понимаются в смысле (3).

При решении задачи А, как и в случае $D(t) \in H(\Gamma)$ (см. [10]), при помощи интеграла типа Коши строим семейство интегральных операторов, которые равномерно ограничены в $L^1(\Gamma)$. Доказывается нетеровость задачи А, вычисляется её индекс и построены все решения.

Отметим, что если $D(t) \in H_0(T;\ t_1,\ t_2, \cdots, t_n)$ и $f \in L^1(\Gamma)$ — произвольная функция, то вообще говоря не каждое решение задачи А может быть представлено в виде интеграла типа Коши от функций из $L^1(\Gamma)$.

Для того чтобы формулы приняли более обозримый вид, сначала будем рассматривать случай, когда Γ — единичная окружность. В этом случае (3) примет вид

$$\lim_{r \to 1-0} \|\Phi^+(r\alpha(t)) - D(t)\,\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_1 = 0. \tag{3'}$$

§ 1. Некоторые свойства решения задачи А

1. Выбирая обход окружности T в положительном направлении точках $t_1, t_2, \cdots, t_n$ разрыва функции $D(t)$ положим $\alpha_k + i\beta_k = \frac{1}{2\pi i}(g^*(t_k - 0) - g^*(t_k + 0))$, где $g^*(t) = \ln D(t)$.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} S_1^+(z) &= e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\varphi(\beta(t))}{t-z}\,dt}, \quad \text{при } z \in D^+, \\ S_1^-(z) &= e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt}, \quad \text{при } z \in D^-, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\beta(t)$ — функция, обратная $\alpha(t)$, а $\varphi(t)$ — решение уравнения

$$K\varphi \equiv \varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right)\varphi(\tau)\,d\tau = g^*(t). \tag{5}$$

Легко проверить, что функция $S_1(z)$ удовлетворяет граничному условию

$$S_1^+(\alpha(t)) - D(t)\,S_1^-(t) = 0,\ t \in T,\ t \neq t_1,\ t_2, \cdots, t_n. \tag{6}$$

Так как ядро

$$k(\tau, t) = \frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \tag{7}$$

в этих условиях имеет слабую особенность, то из (5) следует, что в точках $t_1, \cdots, t_n$ функция $\varphi(t)$ также имеет разрывы первого рода и $\alpha_k + i\beta_k = \frac{1}{2\pi i}(\varphi(t_k - 0) - \varphi(t_k + 0))$.

Положим $t_k' = \alpha(t_k)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$. Из свойства интеграла типа Коши для функций из класса $H_0(T)$ (см. [1]) вблизи точек t_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ имеем

$$S_1^+(z) = (z - t_k')^{\alpha_k + \beta_k} \cdot \Omega_k^+(z),$$

где $\Omega_k^+(z)$ — голоморфная функция в той части окрестности t_k', которая входит в область D^+, при этом $\Omega_k^+(z)$ имеет отличный от нуля предел при $z \to t_k'$, $z \in D^+$. Соответственно, для функции $S_1^-(z)$ вблизи точек t_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ имеем

$$S_1^-(z) = (z - t_k)^{\alpha_k + \beta_k} \cdot \Omega_k^-(z),$$

где $\Omega_k^-(z)$ имеет отличный от нуля предел при $z \to t_k$, $z \in D^-$.

Рассмотрим теперь граничную задачу

$$\Phi^+(\alpha(t)) - \Phi^-(t) = 0, \ t \in T, \tag{8}$$

где $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ — аналитические в D^+ и D^- функции.

По теореме о конформном склеивании существует такое решение $\lambda(z)$ задачи (8), что $\lambda^+(z)$ и $\lambda^-(z)$ конформно отображают области D^+ и D^- на некоторые области Δ_+ и Δ_- $(\lambda(\infty) = \infty)$ и удовлетворяют условию Липшица в $D^+ \cup T$ и $D^- \cup T$ соответственно. Теперь положим

$$\Phi_1^+(z) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda^+(z) - \lambda^+(t_k'))^{\lambda_k}, \text{ при } z \in D^+,$$

$$\Phi_1^-(z) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda^-(z) - \lambda^-(t_k))^{\lambda_k}, \text{ при } z \in D^-,$$

где λ_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ — целые числа, удовлетворяющие условиям $-1 < \alpha_k + \lambda_k \leqslant 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$. Ясно, что функции $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_1^-(z)$ удовлетворяют условию (8) и вблизи точек t_k', t_k $(k = 1, 2 \cdots, n)$ имеем

$$\Phi_1^+(z) = (z - t_k')^{\lambda_k} \tilde{\Omega}_k^+(z), \quad \Phi_1^-(z) = (z - t_k)^{\lambda_k} \tilde{\Omega}_k^-(z), \tag{9}$$

где $\tilde{\Omega}_k^+(z)$ и $\tilde{\Omega}_k^-(z)$ обладают такими же свойствами, как и $\Omega_k^+(z)$ и $\Omega_k^-(z)$.

Если $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ — некоторые функции на D^+ и D^-, то под $\Phi(z)$ будем понимать функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & z \in D^+, \\ \Phi^-(z), & z \in D^-. \end{cases}$$

Если же $\Phi(z)$ определена на $D^+ \cup D^-$, то под $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ будем понимать сужение этой функции на D^+ и D^- соответственно.

Для дальнейшего введем в рассмотрение функцию

$$S(z) = S_1(z)\, \Phi_1(z), \ z \in D^+ \cup D^-, \tag{10}$$

где $S_1(z)$ и $\Phi_1(z)$ — функции, построенные выше.

Из определения функций $S_1(z)$, $\Phi_1(z)$ и $S(z)$ непосредственно следует

Лемма 1. *Функция $S(z)$ удовлетворяет условиям*

а) $S^+(\alpha(t)) - D(t)S^-(t) = 0,\ t \in T$;

в) $S^+(\alpha(t)),\ S^-(t) \in L^1(T)$ и $(S^+(\alpha(t)))^{-1},\ (S^-(t))^{-1} \in L^\infty(T)$;

с) *в достаточно малых окрестностях $V_k^{\cdot}$ и V точек $\dot{t}_k$ и t_k ($k = 1, 2, \cdots, n$) $S^+(z)$ и $S^-(z)$ представляются в виде*

$$S^+(z) = \frac{\lambda_k^+(z)}{(z - \dot{t}_k)^{\gamma_k - \beta_k}},\quad z \in D^+ \cap V_k^{\cdot},$$

$$S^-(z) = \frac{\lambda_k^-(z)}{(z - t_k)^{\gamma_k - \beta_k}},\quad z \in D^- \cap V_k,$$

где $\gamma_k = -(\alpha_k + i\cdot_k)$ и $0 \leqslant \gamma_k < 1$, а $\lambda_k^-(z), \lambda_k^+(z)$ — голоморфные в $D^+ \cap V_k^{\cdot}$ и $D^- \cap V_k$ функции, стремящиеся к определенным, отличным от нуля, пределам, при $z \to \dot{t}_k$, $z \in D^+$ и $z \to t_k$, $z \in D^-$.

3°. **Теорема 1.** *Пусть $f(t) \in L^1(T)$. Если $\Phi(z)$ есть решение граничной задачи (3′), имеющее конечный порядок на бесконечности, то оно представимо в виде*

$$\Phi^+(z) = \frac{S(z)}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\varphi(\beta(t))}{t - z}\,dt,\ \text{при } z \in D^+,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{S(z)}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\varphi(t)}{t - z}\,dt + S(z)P(z),\ \text{при } z \in D^-, \tag{11}$$

где $P(z)$ — некоторый полином, а $\varphi(t)$ — решение уравнения $K\varphi = P(t) + f(t)(S^+(\alpha(t)))^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\Phi(z)$ — некоторое решение граничной задачи (3′) и пусть $f_r(t)$ — последовательность функций из $H(T)$ такая, что $\|f_r(t) - f(t)\|_1 \to 0$, при $r \to 1 - 0$. Если $\Phi(z)$ удовлетворяет условию (3′), то будем иметь

$$\lim_{r\to 1-0} \|\Phi^+(r\alpha(t)) - D(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f_r(t)\|_1 = 0.$$

Учитывая лемму 1 имеем

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\frac{\Phi^+(r\alpha(t))}{S^-(\alpha(t))} - \frac{\Phi^-(r^{-1}t)}{S^-(t)} - \frac{f_r(t)}{S^-(\alpha(t))}\right\|_1 = 0. \tag{12}$$

Обозначив

$$\varphi_r(t) = \frac{\Phi^+(r\alpha(t))}{S^+(\alpha(t))} - \frac{\Phi^-(r^{-1}t)}{S^-(t)} - \frac{f_r(t)}{S^+(\alpha(t))},$$

$$F_r^+(z) = \frac{\Phi^+(rz)}{S^+(z)}\ (z \in D^+),\quad F_r^-(z) = \frac{\Phi^-(r^{-1}z)}{S^-(z)}\ (z \in D^-), \tag{13}$$

из (12) получим

$$F_r^+(\alpha(t)) - F_r^-(t) = \psi_r(t) + \frac{f_r(t)}{S^+(\alpha(t))}, \quad t \in T, \ 0 < r < 1, \tag{14}$$

где $\psi_r(t) \in H_0(\Gamma)$ и $\|\psi_r(t)\|_1 \to 0$, при $r \to 1-0$. Так как функции $F_r^+(z)$ и $F_r^-(z)$ ограничены в D^+ и D^-, то из (14) будем иметь [4]

$$F_r^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\varphi_r(\beta(t))}{t-z}\,dt,$$

$$F_r^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\varphi_r(t)}{t-z}\,dt + P_r(z), \tag{15}$$

где $P_r(z)$ — главная часть функции $F_r^-(z)$, а $\varphi_r(t)$—решение уравнения

$$K\varphi = \psi_r(t) + P_r(t) + f_r(t)\,(S^+(\alpha(t)))^{-1}.$$

Имеем

$$\lim_{r\to 1-0} F_r^+(z) = \frac{\Phi^+(z)}{S^+(z)}, \quad \lim_{r\to 1-0} F_r^-(z) = \frac{\Phi^-(z)}{S^-(z)}$$

и $P_r(z)$ равномерно сходятся к полиному $P(z)$, при $r \to 1-0$, где $P(z)$ — главная часть функции $\Phi^-(z)\,(S^-(z))^{-1}$ на бесконечности.

Так как

$$\lim_{r\to 1-0}\left\| \psi_r(t) + P_r(t) + \frac{f_r(t)}{S^+(\alpha(t))} - P(t) - \frac{f(t)}{S^+(\alpha(t))}\right\|_1 = 0,$$

то $\|\varphi_r(t) - \varphi(t)\|_1 \to 0$ (см. [10]). Переходя к пределу в (15) и учитывая (13) получим доказательство теоремы.

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть* $f(t) \in H_0(T)$. *Тогда общее решение граничной задачи* (3′) *в классе функций, удовлетворяющих условию* $|\Phi(z)| < \text{Const}\cdot|z - t_k|^{-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1,\ k = 1, \cdots, n)$ *в окрестностях точек* t^k *и имеющее конечный порядок на бесконечности, задается формулой* (11), *где* $\varphi(t) \in H_0(T)$.

Если граничное условие понимать поточечно, кроме точек разрыва $t_1, t_2, \cdots, t_n$, то эта теорема известна (см., напр., [4], [6]). Пусть граничное условие понимается в смысле (3′), тогда согласно теореме 1 она представляется в виде (11), где $\varphi(t)$ является решением уравнения $K\varphi = P(t) + f(t)\,(S^+(\alpha(t)))^{-1}$. Так как $f(t)\,(S^+(\alpha(t)))^{-1} \in H_0(T)$, то решение этого уравнения также принадлежит классу $H_0(T)$.

§ 2. Предварительные леммы

1°. Положим

$$h_r(\tau, t) = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - r\,\alpha(t)} - \frac{1}{\tau - r^{-1}t}. \tag{16}$$

Нам в дальнейшем необходимы следующие неравенства из [10]:

$$|h_r(\tau, t)| < A\left(\frac{1-r^2}{|\tau - rt|^2} + 1\right), \tag{17}$$

$$|\alpha(\tau) - r\alpha(t)| > A_1 |\tau - rt|, \tag{18}$$

где A, A_1 — положительные постоянные.

2°. Пусть $\varphi(\tau) \in L^1(T)$ и $\alpha < 1$. Положим

$$(A_r\varphi)(t) = \frac{1}{(\tau_0 - r\,t)^\alpha} \int_T \varphi(\tau)(\tau_0 - \tau)^\alpha P_r(\tau, t)\,d\tau,$$

где τ_0, $t \in T$, а $P_r(\tau, t) = (1 - r^2)|\tau - rt|^{-2}$ — ядро Пуассона.

Лемма 2. *Существует число C, не зависящее от r такое, что для любой функции $\varphi \in L^1(T)$*

$$\|A_r\varphi\|_1 \leqslant C\|\varphi\|_1.$$

Доказательство. Так как $\big||\tau_0 - t|^\alpha - |\tau_0 - rt|^\alpha\big| < \mathrm{Const}\,|\tau - rt|^\alpha$, то

$$|(A_r\varphi)(t)| \leqslant C_1\left(\int_T |\varphi(\tau)|\,P_r(\tau, t)\,|d\tau| + \right.$$

$$\left. + \int_T |\varphi(\tau)|\,\frac{1-r^2}{|\tau_0 - r\,t|^\alpha\,|\tau - r\,t|^{2-\alpha}}\,|d\tau|\right).$$

Учитывая, что

$$\frac{1-r^2}{|\tau_0 - r\,t|^\alpha\,|\tau - r\,t|^{2-\alpha}} \leqslant \frac{1-r^2}{|\tau_0 - r\,t|^2} + \frac{1-r^2}{|\tau - r\,t|^2}$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{1-r^2}{|\tau - r\,t|^2}\,|dt| = 1,$$

будем иметь $\|A_r\varphi\|_1 \leqslant C\|\varphi\|_1$.

Лемма доказана.

Для любой функции $\varphi(\tau) \in L^1(T)$ положим

$$(H_r\varphi)(t) = \frac{S^+(r\alpha(t))}{2\pi i}\int_T \frac{\varphi(\tau)}{S^+(\alpha(\tau))}\,h_r(\tau, t)\,d\tau.$$

Имеет место

Лемма 3. *Существует число С, не зависящее от r такое, что*

$$\|H_r\varphi\|_1 < C\|\varphi\|_1. \tag{19}$$

Доказательсво. Для простоты изложения приведем доказательство при $n = 1$, то есть когда функция $D(t)$ имеет разрыв только в точке $t = t_1$. Согласно лемме 1 имеет место неравенство

$$c_1|t_1' - z|^{-\delta_1} \leqslant |S^+(z)| \leqslant C_1|t_1' - z|^{-\delta_1}, \tag{20}$$

где c_1, C_1 — положительные постоянные, $\delta_1 = -(\alpha_1 + \lambda_1)$. Учитывая неравенство (18), получим

$$c\,|t_1 - r\,t|^{-\delta_1} \leqslant |S^+(r\alpha(t))| < C\,|t_1 - r\,t|^{-\delta_1}. \tag{21}$$

Применяя неравенства (17) и (21) при $t \in T$, будем иметь

$$|(H_r\varphi)(t)| < \frac{1}{|t_1 - r\,t|^{\delta_1}}\left(\int_T |\varphi(\tau)|\,|t_1 - \tau|^{\delta_1}\,P_r(\tau, t)\,|d\tau| + \int_T |\varphi(\tau)|\,|t_1 - \tau|^{\delta_1}\right),$$

отсюда и из леммы 2 следует лемма 3.

3°. Лемма 4. *Пусть* $\tau,\ t \in T$, *тогда*

$$\left|\ln\left|\frac{\alpha(\tau) - r\,\alpha(t)}{\tau - r\,t}\right| - \ln\left|\frac{\alpha(\tau) - \alpha(t)}{\tau - t}\right|\right| < C\,\frac{1-r}{|\tau - r\,t|}. \tag{22}$$

Доказательство. Из неравенства (18) и свойств функции $\alpha(\tau)$ следует, что существует число $\delta > 0$ такое, что

$$\left|\frac{\alpha(\tau) - r\,\alpha(t)}{\tau - rt}\right| \cdot \left|\frac{\tau - t}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right| > \delta.$$

Ясно, что $|\ln x| < A\,|x - 1|$, при $x > \delta$. Поэтому

$$\left|\ln\left|\frac{\alpha(\tau) - r\alpha(t)}{\tau - rt}\right| - \ln\left|\frac{\alpha(\tau) - \alpha(t)}{\tau - t}\right|\right| = \left|\ln\frac{|\alpha(\tau) - r\alpha(t)|\,|\tau - t|}{|\tau - rt|\,|\alpha(\tau) - \alpha(t)|}\right| \leqslant$$

$$< A\left|1 - \frac{|\alpha(\tau) - r\alpha(t)|\,|\tau - t|}{|\tau - rt|\,|\alpha(\tau) - \alpha(t)|}\right| \leqslant$$

$$\leqslant A\,\frac{|(1-r)\,t\,[\alpha(\tau) - \alpha(t)] - (\tau - t)\,[\alpha(\tau) - r\alpha(t)]|}{|\tau - rt|\,|\alpha(\tau) - \alpha(t)|} \leqslant$$

$$\leqslant A\left(\frac{1-r}{|\tau - rt|} + \frac{|\tau - t|}{|\alpha(\tau) - \alpha(t)|}\cdot\frac{1-r}{|\tau - rt|}\right).$$

Теперь доказательство леммы следует из неравенства $|\alpha(\tau) - \alpha(t)| > a\,|\tau - t|$, где a — положителяная постоянная.

Лемма 5. *Пусть* $\tau,\ t \in T$, *тогда*

$$\left|\arg\frac{\tau - t}{\tau - rt}\right| < C\,\frac{1-r}{|\tau - rt|}, \quad \left|\arg\frac{\tau - t}{\tau - r^{-1}t}\right| < C\,\frac{1-r}{|\tau - rt|},$$

где C — постоянная, не зависящая от r. Под $\arg(\tau - t)(\tau - r^{-1}t)$ *мы понимаем угол при вершине τ треугольника с вершинами τ, t, rt.*

Доказательство. Обозначим этот треугольник через Δ. Положим $\varphi = \arg(\tau - t)(\tau - rt)^{-1}$. Из определения φ следует, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Когда точки τ и t достаточно близки, угол при вершине t треугольника Δ мало отличается от $\frac{\pi}{2}$. Применяя теорему синусов, можем утверждать, что

$$|\sin\varphi| < C\frac{1-r}{|\tau - rt|},$$

где C не зависит от r. Отсюда, учитывая неравенство $|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}|\sin\varphi|$ $\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, получим доказательство первого неравенства леммы. Аналогично доказывается второе неравенство.

Лемма 6. *Пусть $T_+ = (\tau_1, \tau_2)$ — некоторая дуга окружности T, соединяющая точки τ_1 и τ_2 в положительном направлении, а $\chi(\tau) = 1$, при $\tau \in T_+$ и $\chi(\tau) = 0$, при $\tau \in T \setminus T_+$.*
Пусть далее $V \subset T$ — некоторая окрестность точки τ_1, не содержащая точку τ_2. Тогда существует число C, не зависящее от r такое, что для любого $t \in V$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_T \left[\frac{1}{\tau - rt} - \frac{1}{\tau - r^{-1}t}\right]\chi(\tau)\,d\tau - \chi(t)\right| < C\frac{1-r}{|\tau_1 - rt|}. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть $t = e^{i\varphi}$, $\tau = e^{i\theta}$. Для простоты изложения будем считать, что T_+ есть верхняя полуокружность, то есть $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = -1$. Рассмотрим функцию

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \left[\frac{1}{\tau - rt} - \frac{1}{\tau - r^{-1}t}\right]\chi(\tau)\,d\tau.$$

Так как

$$\left(\frac{1}{\tau - rt} - \frac{1}{\tau - r^{-1}t}\right)d\tau = i\,\frac{1-r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2}\,d\theta,$$

то $U(r, \varphi)$ — ограниченная гармоническая функция, равная $\chi(t)$ на T. Эту функцию можно представить в виде

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arg\frac{1 + re^{i\varphi}}{1 - re^{i\varphi}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2r\sin\varphi}{1 - r^2},$$

где $\arg(1 + re^{i\varphi})(1 - re^{i\varphi})^{-1} = \arg(1 + re^{i\varphi}) - \arg(1 - re^{i\varphi})$ и под $\arg(1 + re^{i\varphi})$ и $\arg(1 - re^{i\varphi})$ понимаем те значения, которые находятся в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Учитывая, что при $|x| \to \infty$

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), & \text{при } x \geqslant 1, \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), & \text{при } x \leqslant -1, \end{cases}$$

будем иметь

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2r\sin\varphi}{1 - r^2} =$$

$$
=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1-r^2}{2r\sin\varphi}+O\left(\dfrac{1-r^2}{2r\sin\varphi}\right)^3, \text{ при } \dfrac{2r\sin\varphi}{1-r^2}>1,\right.\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1-r^2}{2r\sin\varphi}+O\left(\dfrac{1-r^2}{2r\sin\varphi}\right)^3, \text{ при } \dfrac{2r\sin\varphi}{1-r^2}<-1.\right.\end{cases}
$$

Поэтому

$$
|U(r,\varphi)-\chi(e^{i\varphi})|<C_1\frac{1-r}{|\varphi|}<C_1\frac{1-r}{|1-rt|},
$$

если $2r|\sin\varphi|(1-r^2)^{-1}>1$. Но при $2r|\sin\varphi|(1-r^2)^{-1}<1$ неравенство (23) очевидно, так как $|1-rt|>a(1-r)$, где $a>0$.

Лемма 7. *Пусть $T_k\subset T$ — некоторая окрестность точки t_k такая, что $t_l\,\overline{\in}\,T_k$ $(l\neq k)$. Тогда для любого $t\in T_k$*

$$
|S^+(r\alpha(t))-D(t)\,S^-(r^{-1}t)|\leqslant C|S^+(r\alpha(t))|\left(\frac{1-r}{|t_k-rt|}+(1-r)^{\delta}\right), \tag{24}
$$

где $\delta>0$, а C — постоянная, не зависящая от r.

Доказательство. Из определения функций $\Phi_1(z)$ и $S(z)$ имеем

$$
|S^+(r\alpha(t))-D(t)\,S^-(r^{-1}t)|=|S^+(r\alpha(t))|\,|1-\Phi_1^-(r^{-1}t);
$$

$$
\cdot[\Phi_1^+(r\alpha(t))]^{-1}\cdot e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T h_r(\tau,t)\varphi(\tau)d\tau-\ln D(\tau)}|.
$$

Из свойств функции $\lambda(z)$ и (18), при $t\in T_k$ следует

$$
\left|\frac{\lambda^-(r^{-1}t)-\lambda^-(t)}{\lambda^+(r\alpha(t))-\lambda^+(\alpha(t_k))}-1\right|\leqslant C\frac{1-r}{|t_k-rt|}.
$$

Учитывая это неравенство и (17), будем иметь

$$
|S^+(r\alpha(t))-D(t)\,S^-(r^{-1}t)|<C|S^+(r\alpha(t))|\left[\frac{1-r}{|t_k-rt|}+\right.
$$

$$
\left.+\left|\int\limits_T h_r(\tau,t)\,\varphi(\tau)\,d\tau-\ln D(t)\right|\right]. \tag{25}
$$

Из формулы Сохоцкого—Племеля и определения функции $\varphi(\tau)$ следует, что

$$
\lim_{r\to1-0}\int\limits_T h_r(\tau,t)\,\varphi(\tau)\,d\tau=\ln D(t),\ t\in T,
$$

причем при $D(t)\in H(T)$, $D(t)\neq0$, имеет место неравенство

$$
\left|\int\limits_T h_r(\tau,t)\,\varphi(\tau)\,d\tau-\ln D(t)\right|<C(1-r)^{\delta},\ (\delta>0). \tag{26}
$$

Ясно, что в окрестности T_k функцию $\ln D(t)$ можно представить в виде $\ln D(t)=C\chi(t)+\psi_1(t)$, где $\psi_1(t)\in H(T)$, а $\chi(t)=1$, при $t\in(t_k,t_{k+1})$ и $\chi(t)=0$, при $t\in T\setminus(t_k,t_{k+1})$. Так как функция $\varphi(t)$

удовлетворяет уравнению $\ln D(t) = K\varphi$, то в этой окрестности она также представима в виде

$$\varphi(t) = C\chi(t) + \psi_2(t), \quad \psi_2(t) \in H(T). \tag{27}$$

Заменяя в (25) $\ln D(t) = K\varphi$ и учитывая (27) и неравенство (26), получим

$$|S^+(r\alpha(t)) - D(t)\, S^-(r^{-1}t)| < C\,|S^+(r\alpha(t))|\cdot$$
$$\cdot\left(\left|\int_T\left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - r\alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right)\chi(\tau)\,d\tau - \int_T\left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right)\chi(\tau)\,d\tau -\right.\right.$$
$$\left.\left. - \chi(t)\right| + (1-r)^\delta + \frac{1-r}{|t_k - rt|}\right).$$

Перепишем это неравенство в следующем виде:

$$|S^+(r\alpha(t)) - D(t)\, S^-(r^{-1}t)| \leqslant C\,|S^+(r\alpha(t))|\cdot$$
$$\cdot\left|\int_{T_k}\left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - r\alpha(t)} - \frac{1}{\tau - rt}\right)d\tau - \int_{T_k}\left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right)d\tau + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int_{T_k}\left(\frac{1}{\tau - rt} - \frac{1}{\tau - r^{-1}t}\right)d\tau - \chi(t) + (1-r)^\delta\right|.$$

Применяя лемму 6 и производя интегрирование в первых двух интегралах, получим

$$|S^+(r\alpha(t)) - D(t)\, S^-(r^{-1}t)| < C\,|S^+(r\alpha(t))|\left(\left|\ln\left|\frac{\alpha(t_k) - r\alpha(t)}{t_k - rt}\right| -\right.\right.$$
$$\left. - \ln\left|\frac{\alpha(t_k) - \alpha(t)}{t_k - t}\right|\right| + \left\{\left|\arg\frac{\alpha(t_k) - \alpha(t)}{\alpha(t_k) - r\alpha(t)}\right| + \right.$$
$$\left.\left. + \left|\arg\frac{t_k - t}{t_k - rt}\right|\right\} + \frac{1-r}{|t_k - rt|} + (1-r)^\delta + O((1-r))\right).$$

Теперь доказательство леммы следует из лемм 4 и 5.

4°. Пусть τ, $t \in T$. Для любого $r\,(0 < r < 1)$ положим

$$\lambda_r(\tau, t) = \frac{|S^+(r\alpha(t)) - D(t)\, S^-(r^{-1}t)|}{|S^+(\alpha(\tau))|\,|\tau - r^{-1}t|}.$$

Введем в рассмотрение оператор

$$(B_r\varphi)(t) = \int_T \lambda_r(\tau, t)\,\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{28}$$

Лемма 8. *Существует число C, не зависящее от r такое, что*

$$\|B_r\varphi\|_1 \leqslant C\|\varphi\|_1. \tag{28'}$$

Доказательство. Для простоты опять изложим доказательство, когда $n = 1$. Учитывая неравенства (21) и (24), будем иметь

$$\int_T |(B_r\varphi)(t)|\,|dt| \leqslant \text{Const}\left\{\int_T \frac{1-r}{|t_1-rt|^{1+\delta_1}}\int_T \frac{|\varphi(\tau)|\,|t_1-\tau|^{\delta_1}}{|\tau-rt|}|d\tau|\,|dt| + \right.$$

$$\left. + \int_T \frac{(1-r)^{\delta}}{|t_1-rt|^{\delta_1}}\int_T \frac{|\varphi(\tau)|\,|t_1-\tau|^{\delta_1}}{|\tau-rt|}|d\tau|\,|dt|\right\} = \text{Const}\,(J_1(r)+J_2(r)).$$

Так как $\left||t_1-\tau|^{\delta_1}-|t_1-rt|^{\delta_1}\right| \leqslant \text{Const}\,|\tau-rt|^{\delta_1}$, то, учитывая оценку

$$\frac{1}{a^{\alpha}\cdot b^{\beta}} \leqslant \frac{1}{a^{\alpha+\beta}}+\frac{1}{b^{\alpha+\beta}},$$

получим

$$J_1(r) \leqslant \text{Const}\left(\int_T |\varphi(\tau)|\int_T \frac{1-r}{|t_1-rt|^{1+\delta_1}\cdot|\tau-rt|^{1-\delta_1}}|dt|\,|d\tau| + \right.$$

$$\left. + \int_T |\varphi(\tau)|\int_T \frac{1-r}{|t_1-rt|\,|\tau-rt|}|dt|\,|d\tau|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \text{Const}\left(\int_T |\varphi(\tau)|\int_T \frac{1-r}{|t_1-rt|^2}|dt|\,|d\tau| + \right.$$

$$\left. + \int_T |\varphi(\tau)|\int_T \frac{1-r}{|\tau-rt|^2}|dt|\,|d\tau|\right) \leqslant \text{Const}\,\|\varphi\|_1.$$

Соответственно, имеем

$$J_2(r) \leqslant \int_T (1-r)^{\delta}\int_T \frac{|\varphi(\tau)|}{(\tau-rt)}|d\tau|\,|dt| +$$

$$+ \int_T (1-r)^{\delta}\int_T \frac{|\varphi(\tau)|\,|d\tau|\,|dt|}{|t_1-rt|^{\delta_1}\,|\tau-rt|^{1-\delta_1}} \leqslant$$

$$< \text{Const}\,(1-r)^{\delta}\ln\frac{1}{1-r}\|\varphi\|_1 + \int_T (1-r)^{\delta}\int_T\left(\frac{1}{|t_1-rt|} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\tau-rt)}\right)|\varphi(\tau)|\,|dt|\,|d\tau| < \text{Const}\,\|\varphi\|_1.$$

Лемма доказана.

§ 3. Исследование задачи A

1°. Теорема 3. *Пусть $f(t)\in L^1(T)$. Тогда общее решение граничной задачи (3′), имеющее конечный порядок на бесконечности, определяется формулой*

$$\Phi^+(z) = \frac{S(z)}{2\pi i}\int_T \frac{\varphi(\beta(t))}{t-z}\,dt, \quad \text{при} \quad z\in D^+,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{S(z)}{2\pi i}\int_T \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt + S(z).P(z), \quad \text{при } z\in D^-, \tag{29}$$

где $P(z)$ — *некоторой полином*, $\varphi(t)$ — *решение уравнения* $K\varphi = P(t) + f(t)\,(S^+(\alpha(t)))^{-1}$, *а* $\beta(t)$ — *обратная функции* $\alpha(t)$.

Доказательство. В теореме 1 мы установили, что каждое решение задачи (3′), имеющее конечный порядок на бесконечности, представляется в виде (29). Теперь докажем, что любая функпия вида (29) является решением задачи (3′). Из (29) следует, что $\Phi(z)$, определенная этой формулой, имеет на бесконечности конечный порядок.

Пусть $f_n(t) \in H(T)$ и $\|f_n(t) - f(t)\|_1 \to 0$, при $n \to \infty$, а $\varphi_n(t)$ является решением уравнения $K\varphi = P(t) + f_n(t)\,(S^+(\alpha(t)))^{-1}$. Положим

$$\Phi_n^+(z) = \frac{S(z)}{2\pi i}\int_T \frac{\varphi_n(\beta(t))}{t - z}\,dt, \text{ при } z \in D^+, \tag{30}$$

$$\Phi_n^-(z) = \frac{S(z)}{2\pi i}\int_T \frac{\varphi_n(t)}{t - z}\,dt + S(z)\,P(z), \text{ при } z \in D^-.$$

Так как функции $\Phi_n^+(z)$ и $\Phi_n^-(z)$ на T удовлетворяют граничному условию $\Phi_n^+(\alpha(t)) - D(t)\,\Phi_n^-(t) = f_n(t)$ и в окрестности точек $t_k' = \alpha(t_k)$ и t_k имеют порядок $|z - t_k'|^{-\delta}$ и $|z - t_k|^{-\delta}$, где $0 < \delta < 1$, то ясно, что существует некоторое число $p_0\ (p_0 > 1)$ такое, что для любого $r\ (0 < r < 1)$

$$\int_T |\Phi_n^+(r\,\alpha(t))|^{p_0}\,|dt| < \mathrm{Const}, \quad \int_T |\Phi_n^-(r^{-1} t)|^{p_0}\,|dt| < \mathrm{Const} \tag{31}$$

и поэтому для любого n, $n \geqslant 1$

$$J_n^{(1)}(r) = \|\Phi_n^+(r\alpha(t)) - D(t)\,\Phi_n^-(r^{-1} t) - f_n(t)\|_1 \to 0 \tag{32}$$

при $r \to 1 - 0$. Положив теперь $\psi_n(t) = \varphi_n(t) - \varphi(t)$, из (29), (30) и (31) будем иметь

$$\int_T |\Phi^+(r\alpha(t)) - D(t)\,\Phi^-(r^{-1} t) - f(t)|\,|dt| =$$

$$= \int_T |(\Phi^+(r\alpha(t)) - \Phi_n(r\alpha(t))) - D(t)\,(\Phi^-(r^{-1} t) - \Phi_n^-(r^{-1} t)) +$$

$$+ (\Phi_n^+(r\alpha(t)) - D(t)\,\Phi_n^-(r^{-1} t) - f_n(t)) + (f_n(t) - f(t))|\,|dt| \leqslant$$

$$\leqslant C\Big(\int_T |S^+(r\alpha(t))| \int_T |h_r(\tau, t)|\,|\psi_n(\tau)|\,|d\tau|\,|dt| +$$

$$+ \int_T\int_T |\psi_n(\tau)|\,\frac{|S^+(r\alpha(t)) - D(t)\,S^-(r^{-1} t)|}{|\tau - r^{-1} t|}\,|d\tau|\,|dt|\Big) +$$

$$+ J_n^1(r) + \|f_n - f\|_1 \leqslant C\,(J_n^{(2)}(r) + J_n^{(3)}(r) + J_n^{(1)}(r) + \|f_n - f\|_1).$$

Так как $K\psi_n = (f(t) - f_n(t))\,(S^+(\alpha(t))^{-1})$, то

$$\psi_n(\tau) = \frac{f(\tau) - f_n(\tau)}{S^+(\alpha(\tau))} + \int_T \frac{f(t) - f_n(t)}{S^+(\alpha(t))}\,\tilde{k}(\tau, t)\,dt, \tag{33}$$

где ядро $\tilde{k}(\tau, t)$ имеет слабую особенность $(|\tilde{k}(\tau, t)| < C|\tau - t|^{-\lambda}$, $\lambda < 1)$. Обозначим

$$g_n(\tau) = \int_T \frac{f(t) - f_n(t)}{S^+(\alpha(t))}\,\tilde{k}(\tau, t)\,dt.$$

Так как $\big||\tau - t_0|^\delta - |t - t_0|^\delta\big| < C|t - \tau|^\delta$ $(0 < \delta < 1)$, то

$$\frac{1}{|\tau - t|^\lambda}\left|\frac{t - t_0}{\tau - t_0}\right|^\delta = \frac{1}{|\tau - t|^\lambda} + \frac{|\tau - t_0|^\delta - |t - t_0|^\delta}{|t - \tau|^\lambda\,|\tau - t_0|^\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\tau - t|^\lambda} + \frac{C}{|\tau - t_0|^\delta\,|\tau - t|^{\lambda - \delta}}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_T \frac{1}{|\tau - t|^\lambda}\left|\frac{t - t_0}{\tau - t_0}\right|^\delta |d\tau| < C_1,$$

где C_1 не зависит от t, t_0. Используя это неравенство, легко доказать, что

$$\|S^+(\alpha(\tau))\,g_n(\tau)\|_1 \leqslant \mathrm{Const}\,\|f - f_n\|_1.$$

Поэтому функцию $\psi_n(\tau)$ можно представить в виде

$$\psi_n(\tau) = \frac{\delta F_n(\tau)}{S^+(\alpha(\tau))},$$

где $\|F_n(\tau)\|_1 < A\,\|f - f_n\|_1$ и A не зависит от n. Отсюда, применяя лемму 3, будем иметь $J_n^{(2)}(r) \leqslant \mathrm{Const}\,\|f - f_n\|_1$. Соответственно из леммы 8 имеем $J_n^{(3)}(r) \leqslant \mathrm{Const}\,\|f - f_n\|$. Учитывая теперь (32), завершаем доказательство теоремы.

2°. Для каждого целого k обозначим через $\tilde{\varphi}_k(t)$ решение уравнения $K\varphi = t^k$. Положим

$$\Phi_k^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\tilde{\varphi}_k(\beta(t))}{t - z}\,dt, \quad \text{при} \quad z \in D^+,$$

$$\Phi_k^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\tilde{\varphi}_k(t)}{t - z}\,dt + z^k, \quad \text{при} \quad z \in D^-.$$

Ясно, что любая конечная система функций $\Phi_k(z)$ линейно независима. Пусть, далее, $K\tilde{\varphi} = f(t)\,(S^+(\alpha(t)))^{-1}$. Исходя из этих обозначений, для любого $P(z) = c_0 + \cdots + c_n z^n$ функцию (29) можно представить в виде

$$\Phi^{+}(z)=\frac{S^{+}(z)}{2\pi i}\int\limits_{T}\frac{\tilde{\varphi}(\beta(t))}{t-z}\,dt+S^{+}(z)\sum_{k=0}^{n}c_k\,\Phi_k^{+}(z),$$

$$\Phi^{-}(z)=\frac{S^{-}(z)}{2\pi i}\int\limits_{T}\frac{\tilde{\varphi}(t)}{t-z}\,dt+S^{-}(z)\sum_{k=0}^{n}c_k\,\Phi_k^{-}(z). \qquad (34)$$

Положим $\varkappa=-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)$. Очевидно, что $-\varkappa$ есть порядок функции $S(z)$, при $z\to\infty$. Число $\varkappa$ будем называть индексом функции $D(t)$. Теперь из теоремы 3 и (34) следует

Теорема. 4. *Пусть $f(t)\in L^1(T)$, тогда общее решение задачи A, равное нулю на бесконечности, в зависимости от индекса $\varkappa$ можно представить в виде:*

а) *если $\varkappa\geqslant 0$, то*

$$\Phi^{+}(z)=\frac{S^{+}(z)}{2\pi i}\int\limits_{T}\frac{\tilde{\varphi}(\beta(t))}{t-z}\,dt+S^{+}(z)\sum_{k=0}^{\varkappa-1}c_k\,\Phi_k^{+}(z),$$

$$\Phi^{-}(z)=\frac{S^{-}(z)}{2\pi i}\int\limits_{T}\frac{\tilde{\varphi}(t)}{t-z}\,dt+S^{-}(z)\sum_{k=0}^{\varkappa-1}c_k\,\Phi_k^{-}(z), \qquad (35)$$

где $c_0, c_1,\cdots,c_{\varkappa-1}$ — произвольные комплексные числа, при $\varkappa\geqslant 1$ и $c_0=c_1=\cdots=c_{\varkappa-1}=0$, при $\varkappa=0$.

в) *Если $\varkappa<-1$, то задача имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{T}\tilde{\varphi}(t)\,t^k\,dt=0,\ k=0,\ 1,\cdots,-(\varkappa+1),$$

при этом решение определяется по формуле (35), *если положить $c_0=c_1=\cdots=c_{\varkappa-1}=0$.*

3°. Пусть теперь Γ — кривая Ляпунова, а $\tau=\lambda(U)$ $(U_0<U\leqslant U_1)$ — ее параметрическое уравнение. Предположим, что $\lambda(U)$ и $\lambda(\tau)$ дважды непрерывно дифференцируемы по параметру. Для любого $\zeta\in T$ положим $\tilde{\alpha}(\zeta)=\omega^{-1}(\alpha(\omega(\zeta)))$ и $\tilde{\beta}(\zeta)=\mu^{-1}(\omega(\zeta))$. Обозначим

$$\tilde{h}_r(\zeta;\ \xi)=\frac{\omega'(\tilde{\alpha}(\zeta))\,\tilde{\alpha}'(\zeta)}{\omega(\tilde{\alpha}(\zeta))-\omega(r\tilde{\alpha}(\xi))}-\frac{\mu'(\tilde{\beta}(\zeta))\,\tilde{\beta}'(\zeta)}{\mu(\tilde{\beta}(\zeta))-\mu(r^{-1}\tilde{\beta}(\xi))}\ (\zeta;\ \xi\in T). \qquad (36)$$

Имеет место оценка [10]

$$|\tilde{h}_r(\zeta;\ \xi)|<A\left(\frac{1-r^2}{|\zeta-r\xi|^2}+1\right)(\zeta;\ \xi\in T). \qquad (37)$$

Аналог функции $S(z)$ обозначим через $\tilde{S}(z)$. Она имеет следующий вид

$$\tilde{S}^{+}(z)=\tilde{\Phi}_1^{+}(z)\,e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\beta(t))}{t-z}dt},\quad \text{при}\quad z\in G^{+},$$

$$\tilde{S}^{-}(z)=\tilde{\Phi}_1^{-}(z)\cdot e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-z}},\quad z\in G^{-},$$

где $\beta(t)$ — обратная функции $\alpha(t)$, $\varphi(t)$ — решение уравнения

$$\tilde{K}\varphi=\varphi(t)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{1}{\tau-t}-\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right)\varphi(\tau)\,d\tau=\ln D(t),$$

а через $\tilde{\Phi}_1(z)$ обозначен аналог функции $\Phi_1(z)$.

Далее аналоги преобразований H_r и B_r обозначим через $\tilde{H}_r$ и $\tilde{B}_r$, соответственно. Используя оценку (37) можно установить оценки (24) и (28) для преобразований $\tilde{H}_r$ и $\tilde{B}_r$.

Пусть теперь $\tilde{K}\tilde{\varphi}=f(t)\cdot(\tilde{S}^{+}(\alpha(t)))^{-1}$,

$$\Phi_k^{+}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\tilde{\psi}_k(\beta(t))}{t-z}dt,\ z\in G^{+},$$

$$\Phi_k^{-}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\tilde{\psi}_k(t)}{t-z}dt+z^k,\ z\in G^{-},$$

где $\tilde{\psi}_k(t)$ — решения уравнения $\tilde{K}\psi=t^k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$.

Применяя отображение $t=\omega(\zeta)$ в условие (3) и используя указанные оценки аналогично теореме 4, получим решение задачи A.

Теорема 5. *Общее решение задачи A, в зависимости от индекса* $\varkappa$, *можно представить в виде*

2) *если* $\varkappa>0$, *то*

$$\Phi^{+}(z)=\frac{\tilde{S}^{+}(z)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\tilde{\psi}(\beta(t))}{t-z}dt+\tilde{S}^{+}(z)\sum_{k=0}^{\varkappa-1}c_k\tilde{\Phi}_k(z),$$

$$\Phi^{-}(z)=\frac{\tilde{S}^{-}(z)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\tilde{\psi}(t)}{t-z}dt+\tilde{S}^{-}(z)\sum_{k=0}^{\varkappa-1}c_k\tilde{\Phi}_k(z),\tag{38}$$

где $c_0, c_1,\cdots, c_{\varkappa-1}$ — *произвольные комплексные числа при* $\varkappa\geqslant 1$ *и* $c_0=c_1=\cdots=c_{\varkappa-1}=0$, *при* $\varkappa=0$.

в) *если* $\varkappa\leqslant-1$, *то задача имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{\Gamma}\tilde{\psi}(t)\,t^k\,dt=0,\ k=0,\ 1,\cdots,\ -(\varkappa+1),$$

при этом решение определяется по формуле (38), *если положить* $c_0 = c_1 = \cdots = c_{\varkappa-1} = 0$.

4°. В качестве применения рассмотрим следующую задачу: найти в единичном круге $|z| < 1$ решение уравнения Лапласа $\Delta U = 0$, удовлетворяющее граничному условию

$$a(t)\,\frac{\partial U(t)}{\partial x} + b(t)\,\frac{\partial U(t)}{\partial y} = f(t),\ t \in T,$$

где $t = \xi + i\eta$, $U(t) = U(\xi, \eta)$, $a(t)$, $b(t) \in H_0(T)$, $a(t) + ib(t) \neq 0$, $f(t) \in L^1(T)$. Так как $f \in L^1(T)$, то естественно граничное условие также понимать в смысле L^1. То есть

$$\lim_{r\to 1-0} \int_T \left| a(t)\,\frac{\partial U(rt)}{\partial x} + b(t)\,\frac{\partial U(rt)}{\partial y} - f(t) \right| |dt| = 0. \qquad (39)$$

Так как $U(z)$ представляется в виде $U(z) = \operatorname{Re} \Psi(z)$, где $\Psi(z)$— —аналитическая в единичном круге функция, то (39) можно представить в виде

$$\lim_{r\to 1-0} \| \operatorname{Re} D(t)\, \Psi(rt) - f(t) \|_1 = 0, \qquad (40)$$

где $D(t) = a(t) + ib(t)$.

Введем теперь функцию

$$F(z) = \begin{cases} \Psi(z), \text{ при } |z| < 1 \\ \overline{\Psi}\left(\dfrac{1}{z}\right), \text{ при } |z| > 1, \end{cases}$$

тогда условие (40) примет вид

$$\left\| F^+(rt) - \frac{\overline{D(t)}}{D(t)} F(r^{-1}t) - \frac{f(t)}{D(t)} \right\|_1 \to 0,$$

который является граничной задачей типа (3), когда $\alpha(t) \equiv t$.

Автор признателен профессору Н. Е. Товмасяну за постоянное внимание при выполнении данной работы.

Ереванский политехнический
институт

Поступила 9.IV.1987

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Տեղաշարժով Ռիման-Պրիվալովի խզվող խնդիրը L^1-ում *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում է խզվող գործակցով Ռիման-Պրիվալովի խնդիրը այն դեպքում, երբ աջ մասը պատկանում է L^1 *դասին։ Դասական եզրային խնդրի պայմանը փոխարինվում է միջին իմաստով զուգամիտության պայմանով։ Ապացուցվում է դրված խնդրի նյոտերությունը* L^1 *դասում, հաշվվում է այդ խնդրի ինդեքսը և կառուցվում են բոլոր լուծումները։*

H. M. HAIRAPETIAN. *Discontinuous Riemann—Privalov problem with shift in* L^1 (summary)

In the paper the Riemann—Privalov problem with a discontinuous coefficient and the right hand side belonging to L^1 is considered.

The classical boundary condition is appropriately changed to fit the L_1 case.

The Noetherness of this problem is proved and the index is calculated. All solutions of the problem are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962.
2. *Ф. Д. Гахов.* Краевые задачи, М., Физматгиз, 1963.
3. *Б. В. Хведелидзе.* Линейные разрывные граничные задачи теории функций, труды Тбилисского математического института АН Груз. ССР, 1956, 23, 3—158.
4. *Б. В. Хведелидзе.* Граничная задача Римана-Привалова с заданным смещением, Сообщения АН Груз.ССР, 1958, 21, № 4, 385—389.
5. *Г. А. Хускивадзе.* О сопряженных функциях и интегралах типа Коши, тр. Тбилисского мат. ин-та АН Груз. ССР, 1966, 31, 5—54.
6. *И. Б. Симоненко.* Краевая задача Римана для пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах L^p с весом, Изв. АН СССР, сер. матем., 1964, 28, № 2, 277—306.
7. *Б. В. Хведелидзе.* Метод интегралов типа Коши в разрывных задачах теории голоморфных функций, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 7, 1975.
8. *И. И. Данилюк.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости, М., Наука, 1975.
9. *Г. С. Литвинчук.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., Наука, 1977.
10. *Г. М. Айрапетян.* Граничная задача сопряжения со сдвигом в классе L_1, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XXII, 3, 1987.