ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXV, № 1, 1990 Математика

УДК 517.51

М. Г. ГРИГОРЯН

О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ РЯДОВ ФУРЬЕ—ЛЕЖАНДРА СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

Вопросам сходимости рядов Фурье— Лежандра посвящено много работ. Полард [1] показал, что любая функция $f(x)\in L^p$ разлагается в ряд Фурье по многочленам Лежандра в пространстве L^p, если $\frac{4}{3}<p<4$, и указал примеры функций, для которых разложение расходится, если $1\leqslant p<\frac{4}{3}$ или $p>4$.

Нейман и Рудин [2] установили, что для $p=\frac{4}{3}$ и $p=4$ разложение функций $f(x)\in L^p$ может расходиться в пространстве $L^p(-1;1)$. Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[-1;1]$ и, кроме того, произведение $(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}\cdot f(x)$ также интегрируемо на этом сегменте, то (см. [3], стр. 144) для всякого x из интервала $(-1;1)$ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}[\sigma_n(x,f)-(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}\cdot S_n(\arccos x, F)]=0,$$

причем сходимость равномерная на всяком сегменте $[-1+\alpha;1-\alpha]$, $\alpha>0$, где

$$F(t)=\sqrt{\sin t}\cdot f(\cos t),\ t\in(0,\pi),$$

$$S_n(t,F)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt,$$

$$\sigma_n(x,f)=\sum_{k=0}^{n}a_k(f)\widehat{P}_k(x),\quad a_k(f)=\int_{-1}^{1}f(x)\widehat{P}_k(x)\,dx$$

($\widehat{P}_n(x)$ — ортонормированный многочлен Лежандра). Вместе с тем известно, что ряд Фурье — Лежандра функции $f_0(x)=(1+x)^{-3/4}$; $x\in(-1;1)$ (см. [4], стр. 321) расходится всюду на $(-1;1)$.

В настоящей работе рассматривается вопрос сходимости рядов Фурье—Лежандра суммируемых функций $f(x)$ в зависимости от изменения их значений вне заданного множества.

Идея улучшения сходимости рядов Фурье путем изменения разлагаемой функции вне заданного множества принадлежит Д. Е. Меньшову.

Теорема 1. (Д. Е. Меньшов [5]). *Пусть $f(x)$ — любая суммируемая на $[0; 2\pi]$ функция, Q — любое совершенное нигде не плотное множество на $[0, 2\pi]$. Тогда можно найти такую суммируемую функцию $g(x)$, что $g(x) = f(x)$ на Q, и ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится почти всюду на $[0; 2\pi]$.*

Оказывается, что эта теорема верна для рядов Фурье—Лежандра. Более того, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть Q — любое совершенное нигде не плотное множество на $[-1; 1]$. Тогда существует ряд по многочленам Лежандра*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x), \tag{1}$$

обладающий тем свойством, что для любой функции $F(x) \in L(-1; 1)$ можно найти такую функцию $G(x) \in L(-1; 1)$, что $G(x) = F(x)$ на Q, ряд Фурье—Лежандра вновь полученной функции $G(x)$ является подрядом ряда (1) и сходится к ней почти всюду на $[-1; 1]$.

Замечание 1. Теорема 2 верна и для рядов Фурье и Фурье—Уолша.

При доказательстве сформулированной теоремы мы будем пользоваться следующей леммой, доказанной в работе [6] автора.

Лемма 1. *Пусть даны: интервал $\Delta = (a; b) \subset [0; 2\pi]$, совершенное нигде не плотное множество $Q \subset \Delta$, числа $\bar{\gamma} \neq 0$, $\bar{\varepsilon} > 0$, $\tilde{N} > 1$, $\nu > 8$. Тогда существуют измеримое множество $\tilde{E}$, функция $\varphi(t) \in L^2$ такие, что*

1) $$\varphi(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma} & \text{на } Q \\ 0 & \text{вне } \Delta, \end{cases}$$

2) $$\int_{\Delta} |\varphi(t)|\, dt < 2 |\bar{\gamma}|\, |\Delta|^*,$$

3) $$|S_n(t, \varphi)| < B_0 \cdot \nu \cdot |\tilde{\gamma}| + \tilde{\varepsilon} \text{ при } t \in \bar{E} \text{ для всех } n,$$

4) $$|\tilde{E}| > |\Delta| (1 - 8/\nu),$$

5) $$|S_n(t, \varphi)| < \tilde{\varepsilon} \text{ для всех } n \geqslant 1, \text{ при } t \overline{\in} \left[a - \frac{|\Delta|}{\nu};\ b + \frac{|\Delta|}{\nu}\right].$$

6) $$|S_n(t, \varphi)| < \bar{\varepsilon},\ t \in [0, 2\pi],\ n \leqslant N.$$

* Через $|E|$ обозначена мера Лебега множества E.

Отметим, что в доказательстве леммы 1 существенно используется одна лемма Меньшова о ствойствах интеграла Дирихле (см. [7], 460). Отметим также, что в отличие от доказательства теоремы 1 Д. Е. Меньшова схема доказательства теоремы 2, приведенная в настоящей статье такова: строится ряд (1) такой, что после изменения любой функции $F(x)$ вне Q, вновь полученная функция $G(x)$ представляется рядом $\sum_{k=1}^{\infty} H_k(x)$ в метрике L^1, члены которого выбраны из ряда (1), являются непересекающимися полиномами

$$H_k(x)=\sum_{l=M_k}^{\overline{M}_k} a_l P_l(x),\ M_k<\overline{M}_k<M_{k+1};\ k\geqslant 1,$$

внутренние колебания которых стремятся к нулю, т. е.

$$\lim_{k\to\infty}\left[\sup_{M_k<n\leqslant\overline{M}_k}\left|\sum_{l=M_k}^{n} a_l P_l(x)\right|\right]\overset{\text{п. в.}}{=}0.$$

Замечание 2. В лемме 1 можно добиться того, чтобы функция $\varphi(t)$ сохраняя условия 1) — 6), удовлетворяла и следующему условию (см. доказательство леммы 1):

$$\left|\int_0^{\pi}\varphi(t)\widehat{P}_k(\cos t)\sqrt{\sin t}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2(N+1)C_N},\quad k\leqslant N, \tag{2}$$

$$C_N=\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left(\max_{x\in[-1;1]}|\widehat{P}_k(x)|\right).$$

§ 2. Доказательство основных лемм

Пусть

$$P_0(x)\equiv 1,\ P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)},\ x\in[-1;1],\ n\geqslant 1 \tag{3}$$

— стандартизованные многочлены Лежандра и

$$\widehat{P}_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x) \tag{4}$$

— ортонормированные многочлены Лежандра.

Пусть $F(t)\in L^1(-\pi;\pi)$ и $f(x)\in L^1(-1;1)$.

Положим

$$S_n(t;F)=\sum_{k=-n}^{n} b_k e^{ikt};\ b_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)e^{-ikt}\,dt,$$

$$\sigma_n(x,f)=\sum_{k=0}^{n} a_k\widehat{P}_k(x),\ a_k=\int_{-1}^{1}f(x)\widehat{P}_k(x)\,dx. \tag{5}$$

Известно, что частичную сумму ряда Фурье — Лежандра функции $f(x)$ можно представить в виде

$$\sigma_n(x,\ f)=\frac{n+1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(x)\,P_n(t)-P_{n+1}(t)\,P_n(x)}{x-t}f(t)\,dt. \qquad (6)$$

Мы будем пользоваться асимптотической формулой многочленов Лежандра (см. [3], стр. 128)

$$\sqrt{\sin t}\,P_n(\cos t)=\lambda_n\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]+R_n(t):t\in(0,\ \pi), \qquad (7)$$

$$|\lambda_n|<\frac{C_0}{\sqrt{n}}\ (C_0=\mathrm{const}), \qquad (8)$$

$$|R_n(t)|<\frac{C_0}{\alpha_0\cdot\pi^{1/2}};\ t\in[\alpha_0;\ \pi-\alpha_0], \qquad (9)$$

$$|R_n'(t)|<\frac{C_0}{\alpha_0\cdot\sqrt{n}};\ t\in[\alpha_0;\ \pi-\alpha_0],\ (0<\alpha_0<\pi). \qquad (10)$$

В дальнейшем через $\chi_E(x)$ будем обозначать характеристическую функцию множества E.

Лемма 2. *Пусть даны: положительное число* $0<\alpha<1$, *интервал* $[a;\ b]\subset[-1+\alpha;\ 1-\alpha]$, *функция* $f(x)\in L_{[a;\ b]}$, $f(x)=0$, $x\in[a;\ b]$. *Тогда для всех* n *и при* $\theta\in[\alpha;\ \pi-\alpha]$ *имеет место неравенство*

$$|\sigma_n(\cos\theta,\ f)|\leqslant\frac{A_0}{\alpha_0^{5/2}}\int\limits_c^d|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,dt+$$

$$+\frac{A_0}{\sqrt{\alpha_0}}\left|\int\limits_c^d f(\cos t)\sqrt{\sin t}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-t)}{2\sin\frac{\theta-t}{2}}\,dt\right|,$$

где $A_0=\mathrm{const}$, $\theta=\arccos x$, $c=\arccos a$, $d=\arccos b$, $\alpha_0=\arccos\alpha$.

Доказательство. В силу (6) имеем

$$\sigma_n(\cos\theta,\ f)=\frac{n+1}{2}\int\limits_c^d\frac{P_{n+1}(\cos\theta)\cdot P_n(\cos t)-P_{n+1}(\cos t)\,P_n(\cos\theta)}{\cos\theta-\cos t}\times \qquad (11)$$

$$\times f(t)\sin t\,dt=\frac{n+1}{2\sqrt{\sin\theta}}\int\limits_c^d\frac{\varphi_n(\theta,\ t)}{\cos\theta-\cos t}f(\cos t)\sqrt{\sin t}\,dt,$$

где

$$\varphi_n(\theta,\ t)=\sqrt{\sin\theta}\sqrt{\sin t}\,[P_{n+1}(\cos\theta)\,P_n(\cos t)-P_n(\cos\theta)\,P_{n+1}(\cos t)]. \qquad (12)$$

Из (7) и (12) получим

$$\varphi_n(\theta,\ t)=\lambda_n\cdot\lambda_{n+1}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]-\right.$$

$$-\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\Big\}+$$

$$+\lambda_{n+1}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]R_n(t)-\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]R_n(\theta)\right\}+$$

$$+\lambda_n\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]R_{n+1}(\theta)-\right.$$

$$\left.-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]R_{n+1}(t)\right\}+$$

$$+\{R_{n+1}(\theta)\,R_n(t)-R_{n+1}(t)\,R_n(\theta)\}. \tag{13}$$

Итак, интеграл из (11) по четырем фигурным скобкам (13) представляется в виде суммы четырех интегралов $J_n^{(1)}+J_n^{(2)}+J_n^{(3)}+J_n^{(4)}$.

Оценим их. Начнем с четвертого. Выражение в последних фигурных скобках в (13) приводится к сумме

$$R_n(t)\,[R_{n+1}(\theta)-R_{n+1}(t)]+R_{n+1}(t)\,[R_n(t)-R_n(\theta)]. \tag{14}$$

Учитывая соотношения (7)—(10), получим

$$|J_n^{(4)}|=\frac{n+1}{2\sqrt{\sin\theta}}\Bigg|\times$$

$$\times\int\limits_c^d\frac{R_{n+1}(t)\,[R_{n+1}(\theta)-R_{n+1}(t)]+R_{n+1}(t)\,[R_n(t)-R_n(\theta)]}{\cos\theta-\cos t}\times$$

$$\times f(\cos t)\sqrt{\sin t}\,dt\Bigg|\leqslant\frac{B_1}{\alpha^2\cdot n\sqrt{\sin\theta}}\times$$

$$\times\int\limits_c^d|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,\frac{|\theta-t|}{2\left|\sin\frac{\theta-t}{2}\right|}\,dt<\frac{B_1}{\alpha_0^{5/2}\cdot n}\int\limits_c^d|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,dt. \tag{15}$$

Выражение в третьих фигурных скобках (13) представляется в виде

$$\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right][R_{n+1}(\theta)-R_{n+1}(t)]+$$
$$+R_{n+1}(t)\cdot\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\right\}. \tag{16}$$

Следовательно, из (8), (13) и (17) следует

$$|J_n^{(3)}|\leqslant\frac{B_2\sqrt{n}}{\sqrt{\alpha_0}}\int\limits_c^d|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,\frac{|R_{n+1}(\theta)-R_{n+1}(t)|}{|\theta-t|}\,dt+$$

$$+\frac{B_2\sqrt{n}}{\sqrt{\alpha_0}}\int\limits_c^d|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,|R_{n+1}(t)\times$$

$$\times\left|\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{t-\theta}\right|. \tag{17}$$

Поскольку $\left|\frac{\sin kt}{t}\right|\leqslant k$, то из (9), (10) и (17) вытекает

$$|J_n^{(3)}|<\frac{B_3}{\alpha_0^{3/2}}\int_c^d|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,dt. \tag{18}$$

Аналогичные рассуждения применимы к второму интегралу в (13), т. е

$$|J_n^{(2)}|<\frac{B_4}{\alpha_0^{3/2}}\int_c^d|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,dt. \tag{19}$$

Теперь оценим интеграл $J_n^{(1)}$. Легко видеть, что

$$\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]-$$

$$-\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right]\cdot\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]=$$

$$=\cos(n+1)(\theta+t)\sin\frac{\theta-t}{2}-2\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)(\theta-t)\sin\frac{\theta-t}{2}-$$

$$-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\theta-t)\sin\frac{\theta+t}{2}. \tag{20}$$

Следовательно, первый интеграл в (13) можно представить в виде

$$J_n^{(1)}=\frac{\lambda_n\lambda_{n+1}(n+1)}{2\sqrt{\sin\theta}}\cdot\left[-\int_c^d f(\cos t)\sqrt{\sin t}\,\frac{\cos(n+1)(\theta+t)}{2\sin\frac{\theta+t}{2}}\,dt+\right.$$

$$+\int_c^d f(\cos t)\sqrt{\sin t}\,\frac{\cos\left(n+\frac{3}{4}\right)(\theta-t)}{2\sin\frac{\theta+t}{2}\cos\frac{\theta-t}{2}}\,dt+$$

$$\left.+\int_c^d f(\cos t)\sqrt{\sin t}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-\theta)}{2\sin\frac{t-\theta}{2}}\,dt\right]. \tag{21}$$

В силу (8) и (21) будем иметь

$$|J_n^{(1)}|\leqslant\frac{B_5}{\alpha_0^{3/2}}\int_c^d|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,dt+$$

$$+\frac{B_5}{\sqrt{\alpha_0}}\left|\int_c^d f(\cos t)\sqrt{\sin t}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-\theta)}{2\sin\frac{t-\theta}{2}}\,dt\right|. \qquad (22)$$

Учитывая соотношения (11), (12), (13), (15), (17) — (19) и (22) при $\theta\in[\alpha_0;\ \pi-\alpha_0]$ для всех n получим

$$|\sigma_n(\cos\theta,\ f)|<\frac{A_0}{\alpha_0^{5/2}}\int_c^d|f(\cos t)|\sqrt{\sin t}\,dt+$$

$$+\frac{A_0}{\sqrt{\alpha_0}}\left|\int_c^d f(\cos t)\sqrt{\sin t}\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-\theta)}{2\sin\frac{t-\theta}{2}}\,dt\right|.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть даны: числа* $\gamma\neq 0;\ 0<\alpha_0<\frac{\pi}{2},\ \nu>8,\ N>1\ \varepsilon$, *интервал* $\Delta=(a;\ b)\subset[-1+\alpha;\ 1-\alpha]$, $\alpha=\cos\alpha_0'$ *и совершенное нигде не плотное множество* $P\subset(a,\ b)$. *Тогда существуют полином по многочленам Лежандра* $H(x)=\sum_{k=N}^{M}a_k P_k(x)$, *измеримое множество* $E\subset(a,\ b)$ *и функция* $f(x)$, *которые удовлетворяют условиям:*

1. *Функция* $(1-x^2)^{\frac{1}{4}}\cdot f(x)$ *ступенчатая и*

$$f(x)=\begin{cases}(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}\cdot\gamma, & x\in P\\ 0, & x\bar{\in}[a,\ b];\end{cases}$$

2. $$\int_\Delta|f(x)|\,dx<\frac{\pi^2}{\alpha_0}|\gamma|\cdot|\Delta|.$$

3. $$\int_{-1}^{1}|H(x)-f(x)|\,dx<\varepsilon,$$

4. $$\sup_{N<n<M}\left|\sum_{k=N}^{n}a_k P_k(x)\right|<\frac{A_0}{\alpha_0^{7/2}}|\gamma|\,|\Delta|+\frac{A_0}{\sqrt{\alpha_0}}|\gamma|\cdot\nu+\varepsilon,\ x\in E,$$

5. $$\sup_{N<n<M}\left|\sum_{k=N}^{n}a_k P_k(x)\right|<\frac{A_0}{\alpha_0^{7/2}}|\gamma|\,|\Delta|+\varepsilon;\ t\bar{\in}\left[a_0-\frac{|\Delta_0|}{\nu};\ b_0+\frac{|\Delta_0|}{\nu}\right],$$

6. $$|E_0|>|\Delta_0|\left(1-\frac{8}{\nu}\right),\ E_0=\{t;\ x=\cos t\in E\}$$

$$(a_0=\arccos b;\ b_0=\arccos a;\ \Delta_0=[a_0;\ b_0].$$

Доказательство. Положим $\alpha_0=\arccos\alpha.\ \ a_0=\arccos b,\ b_0=$ $=\arccos a$

$$Q_0=\{t;\ t=\arccos x;\ x\in P\}. \qquad (23)$$

Согласно лемме 1, в формулировке которой берется

$$\Delta = \Delta_0 = [a_0;\ b_0],\ Q = Q_0,\ \tilde{\gamma} = \gamma;\ \tilde{N} = N;\ \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon\sqrt{a_0}}{2A_0}$$

и учитывая замечания 2, определяются ступенчатая функция $\varphi(t)$ и измеримое множество $E_0 \subset [a_0;\ b_0]$ такие, что

$$\varphi(t) = \begin{cases} \gamma, & t \in Q_0 \\ 0, & t \overline{\in} \Delta_0 = [a_0;\ b_0], \end{cases} \tag{24}$$

$$\int_{\Delta_0} |\varphi(t)|\, dt \leqslant 2\,|\gamma| \cdot |\Delta_0|, \tag{25}$$

$$\left|\int_0^{\pi} \varphi(t) \sqrt{\sin t}\, \hat{P}_k(\cos t)\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{2(N+1)\, C_N},\ n \leqslant N \text{ (см. (2))}, \tag{26}$$

$$\left(C_N = \max_{x \in [-1,\ 1]} \left\{\max_{0 < k < N} |\hat{P}_k(x)|\right\}\right)$$

$$|S_n(t,\ \varphi)| < \frac{\varepsilon\sqrt{a_0}}{2A_0};\ n \geqslant 1;\ t \overline{\in} \left[a_0 - \frac{|\Delta_0|}{\nu};\ b_0 + \frac{|\Delta_0|}{\nu}\right], \tag{27}$$

$$|S_n(t,\ \varphi)| < B_0 \cdot |\gamma_0| \cdot \nu + \frac{\varepsilon\sqrt{a_0}}{2A_0},\ t \in E_0,\ n \geqslant 1, \tag{28}$$

$$|E_0| > |\Delta_0| \left(1 - \frac{8}{\nu}\right),\ E_0 \subset [a_0;\ b_0]. \tag{29}$$

Положим

$$f(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{4}} \cdot \varphi(\arccos x). \tag{30}$$

Ясно, что

$$\varphi(t) = f(\cos t) \sqrt{\sin t}, \tag{31}$$

$$f(x) = \begin{cases} \gamma \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{4}}; & x \in P \\ 0, & x \overline{\in} [a;\ b] = \Delta, \end{cases} \tag{32}$$

$$\left|\int_a^b |f(x)|\, dx\right| < \int_{a_0}^{b_0} |\varphi(t)|\, dt < 2\,|\gamma|\,|\Delta_0| \leqslant \frac{\pi^2}{a_0} |\gamma| \cdot |\Delta|. \tag{33}$$

Теперь применяя лемму 2, учитывая (31), (33), получим

$$|\sigma_n(x;\ f)| < \frac{A_0}{a_0^{5/2}} \int_{a_0}^{b_0} |f(\cos t)| \sqrt{\sin t}\, dt +$$

$$+ \frac{A_0}{\sqrt{a_0}} \left|\int_{a_0}^{b_0} \varphi(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\theta - t)}{2 \sin \frac{\theta - t}{2}}\, dt\right| \leqslant \tag{34}$$

$$< \frac{A_1}{\alpha_0^{5/2}} |\gamma| \cdot |\Delta| + \frac{A_0}{\sqrt{\alpha_0}} |S_n(t;\ \varphi)|.$$

Отсюда и из соотношений (26)—(29) будем иметь

$$|\sigma_n(x,\ f)| \leqslant \frac{A_1 \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|}{\alpha_0^{7/2}} + \frac{B_0 \cdot \nu \cdot |\gamma| \cdot A_0}{\sqrt{\alpha_0}} + \varepsilon, \tag{35}$$

$$n \geqslant 1,\ t \in E_0\ (t = \arccos x),$$

$$|\sigma_n(x,\ f)| \leqslant \frac{A_2}{\alpha_0^{7/2}} |\gamma| \cdot |\Delta| + \frac{\varepsilon}{2},\ t \overline{\in} \left[a_0 - \frac{|\Delta|}{\nu},\ b_0 + \frac{|\Delta|}{\nu}\right]. \tag{36}$$

$$|\sigma_n(x,\ f)| < \frac{\varepsilon}{2},\ n \leqslant N,\ x \in [-1;\ 1]. \tag{37}$$

Поскольку ряд Фурье—Лежандра функции $f(x) \in L^2(-1,\ 1)$ сходится к ней в метрике L^1, то можно найти такое натуральное число $M > N$, что

$$\int_{-1}^{1} |\sigma_M(x,\ f) - f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{38}$$

Следовательно, в силу (37) будем иметь

$$\int_{-1}^{1} |[\sigma_M(x,\ f) - \sigma_{N-1}(x,\ f)] - f(x)|\, dx < \varepsilon. \tag{39}$$

Положим

$$\begin{gathered} H(x) = \sum_{k=N}^{M} a_k \widehat{P}_k(x) = \sigma_M(x,\ f) - \sigma_N(x,\ f), \\ E = \{x;\ x = \cos t,\ t \in E_0\}. \end{gathered} \tag{40}$$

Из условий (35)—(37), (40) следует

$$\int_{-1}^{1} |H(x) - f(x)|\, dx < \varepsilon,$$

$$\sup_{N < n < M} \left| \sum_{k=N}^{n} a_k \widehat{P}_k(x) \right| < \frac{A_2}{\alpha_0^{7/2}} |\gamma| \cdot |\Delta| + \frac{A_2}{\sqrt{\alpha_0}} |\gamma| \cdot \nu + \varepsilon,$$

$$x \in E\ (t = \arccos x \in E_0),$$

$$\sup_{N < n < M} \left| \sum_{k=N}^{n} a_k \widehat{P}_k(x) \right| < \frac{A_2}{\alpha_0^{7/2}} |\gamma| \cdot |\Delta| + \varepsilon,\ t \overline{\in} \left[a_0 - \frac{|\Delta_0|}{\nu},\ b_0 + \frac{|\Delta_0|}{\nu}\right],$$

$|E_0| > |\Delta_0| \cdot \left(1 - \frac{8}{\nu}\right)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть даны: совершенное нигде не плотное множество $Q \subset [-1,\ 1]$, числа $N_0 > 1$, $\varepsilon_0 > 0$, и ограниченная функция $f(x)$, удовлетворяющая неравенству* $\left(\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx\right)^{1/8} < (7\pi)^{-1}$. *Тогда су-*

ществуют функция $F(x) \in L(-1, 1)$, *измеримое множество* $E \subset \subset [-1; 1]$ *и полином* $H(x) = \sum_{k=N_0}^{M} a_k P_k(x)$ *по многочленам Лежандра, обладающие свойствами:*

a) $$F(x) = f(x),\ x \in Q,$$

в) $$\int_{-1}^{1} |F(x)|\,dx < \varepsilon_0,$$

c) $$\int_{-1}^{1} |H(x) - F(x)|\,dx < C \cdot \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx \right)^{1/4},$$

d) $$\sup_{N_0 < n < M} \left| \sum_{k=N_0}^{n} a_k P_k(x) \right| \leqslant C \cdot \left(\sqrt[4]{\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx} + \frac{|f(x)|}{\sqrt[4]{\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx}} \right),$$

$$x \in E$$

e) $|E| > 2(1 - 7\pi(\sqrt[8]{|f(x)|}|)$.

Доказательство. Положим

$$\nu_0 = \left[\left(\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx \right)^{-1/8} \right],\ a_0 = \nu_0^{-2},\ \varepsilon = \alpha_0. \tag{41}$$

Возьмем ступенчатую функцию вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{q+1} \gamma_k \chi_{\Delta_k}(x),\ \gamma_0 = \gamma_{q+1} = 0, \tag{42}$$

$$\Delta_0 = [-1; -1 + a],\ \Delta_{q+1} = [1 - a; 1],\ \Delta_k = [b_{k-1}; b_k],\ 1 \leqslant k \leqslant q, \tag{43}$$

$$a = \cos a_0,\ b_k = (-1 + a) + \frac{2 - 2a}{q} \cdot k,\ k = 0, 1, \cdots, q \tag{44}$$

такую, что

$$\int_{-1}^{1} |(1 - x^2)^{1/4} \cdot f(x) - \varphi(x)| \frac{dx}{\sqrt[4]{1 - x^2}} \leqslant \min\left\{ \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx;\ \frac{\varepsilon_0}{2} \right\}, \tag{45}$$

Пусть

$$E_0 = \left\{ x \in [-1; 1],\ \left| f(x) - \frac{\varphi(x)}{\sqrt[4]{1 - x^2}} \right| < \nu_0^{-4} \right\}. \tag{46}$$

Очевидно, что

$$|E_0|>2\left(1-\nu_0^4\cdot\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx\right)\text{(см. (45) и (46)).} \tag{47}$$

Применим лемму 3, полагая в ее формулировке

$\Delta=\Delta_1$; $\gamma=\gamma_1$, $N=N_0$, $\nu=\nu_0$, $\alpha_0=\nu_0^{-2}$, $\varepsilon=\varepsilon_0$, $P=Q\cap\Delta_1$.

Тогда определяются функция $g_1(x)$, измеримое множество $E_1\subset\Delta_1$ и полином $h_1(x)=\sum_{k=N_0}^{N_1-1}a_k P_k(x)$, удовлетворяющие условиям:

функция $\sqrt[4]{1-x^2}\cdot g_1(x)$ ступенчатая и

$$g_1(x)=\begin{cases}(1-x^2)^{-1/4}\cdot\gamma_1; & x\in Q\cap\Delta_1,\\ 0 ; & x\overline{\in}\Delta_1\end{cases}$$

$$\int_{\Delta_1}|g_1(x)|\,dx<\frac{\pi^2}{\alpha_0}|\gamma_1|\cdot|\Delta_1|,$$

$$\sup_{N_0<n<N_1}\left|\sum_{k=N_0}^{n}a_k P_k(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\begin{cases}A\left(\alpha_0^{-7/2}\cdot|\gamma_1|\cdot|\Delta_1|+\alpha_0^{-1/2}\cdot\nu_0\cdot|\gamma_1|\right)+\varepsilon_0 & x\in E_1\\ A\,\alpha_0^{-7/2}|\gamma_1|\cdot|\Delta_1|+\varepsilon_0/4, & t\overline{\in}\left[\alpha_0^{(0)}-\frac{|\Delta_1^{(0)}|}{\nu_0};\ \alpha_1^{(0)}+\frac{|\Delta_1^{(0)}|}{\nu_0}\right],\end{cases} \tag{48}$$

$$\int_{-1}^{1}|h_1(x)-g_1(x)|\,dx<\frac{\varepsilon_0}{2(q+1)},$$

$$|E_1^{(0)}|>|\Delta_1^{(0)}|\cdot\left(1-\frac{8}{\nu_0}\right),\quad E_1^{(0)}=\{t\in\Delta_1^{(0)};\ x=\cos t\in E_1\}.$$

Предположим, что уже определены функции $g_1(x)$, $g_2(x),\cdots$ $\cdots, g_{k_0}(x)$, множества $E_1, E_2,\cdots,E_{k_0}$, числа $N_1<N_2<\cdots<N_{k_0}$ и полиномы $h_k(x)=\sum_{l=N_{k-1}}^{N_k-1}a_l P_l(x)$ $(1\leqslant k\leqslant k_0)$ такие, что функция $\sqrt[4]{1-x^2}\cdot g_k(x)$ ступенчатая,

$$g_k(x)=\begin{cases}(1-x^2)^{-1/4}\cdot\gamma_k, & x\in Q\cap\Delta_k \quad (49)\\ 0, & x\overline{\in}\Delta_k, \quad (50)\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}|g_k(x)|\,dx<\frac{\pi^2}{\alpha_0}\cdot|\gamma_k|\cdot|\Delta_k|, \tag{51}$$

$$\int_{-1}^{1}|h_k(x)-g_k(x)|\,dx<\frac{\varepsilon_0}{2(q+1)}, \tag{52}$$

$$\sup_{N_{k-1}\le n\le N_k}\left|\sum_{i=N_{k-1}}^{n} a_i P_i(x)\right| <$$

$$\leqslant \begin{cases} A(\alpha_0^{-7/2}\cdot|\gamma_k|\,|\Delta_k| + \alpha_0^{-1/2}\cdot\nu_0\cdot|\gamma_k| + \dfrac{\varepsilon_0}{2}, & x\in E_k \\ A\,\alpha_0^{-7/2}\,|\gamma_k|\,|\Delta_k| + \dfrac{\varepsilon_0}{2q}, & t\overline{\in}\left[\alpha_{k-1}^{(0)} - \dfrac{|\Delta_k^{(0)}|}{\nu_0};\ \alpha_k^{(0)} + \dfrac{|\Delta_k^{(0)}|}{\nu_0}\right], \end{cases} \tag{53}$$

$$E_k\subset\Delta_k,\ \alpha_k^{(0)} = \arccos b_k;\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ k_0$$

$$|E_k^{(0)}| > |\Delta_k^{(0)}|\left(1-\frac{8}{\nu_0}\right),\ E_k^{(0)} = \{t,\ \ x=\cos t\in E_k\}\subset\Delta_k^{(0)} \tag{54}$$

$$\Delta_k^{(0)} = [\alpha_{k-1}^{(0)};\ \alpha_k^{(0)}].$$

Если теперь применить лемму 3, в формулировке которой берем $\Delta=\Delta_{k_0+1},\ N=N_{k_0},\ \nu=\nu_0,\ \alpha_0=\nu_0^{-2},\ \gamma=\gamma_{k_0+1},\ \mathrm{P}=Q\cap\Delta_{k_0+1},\ \varepsilon=\varepsilon_0,$ то можно определить функцию $g_{k_0+1}(x)$, множество E_{k_0+1}, полином $h_{k_0+1}(x)=\sum\limits_{i=N_{k_0}}^{N_{k_0+1}-1} a_i P_i(x)$, которые удовлетворяют условиям (49)—(54), где вместо k взято k_0+1.

Таким образом будут определены функции $g_1(x),\ g_2(x),\cdots,\ g_q(x)$, множества $E_1,\ E_2,\cdots,\ E_q$, полиномы $h_1(x),\ h_2(x),\cdots,\ h_q(x)$ такие, что для каждого k, $1\leqslant k\leqslant q$ удовлетворяются условия (49)—(50).

Положим

$$g(x) = \sum_{k=1}^{q} g_k(x), \tag{55}$$

$$E^{(0)} = \left(\bigcup_{k=1}^{q} E_k^{(0)}\right)\cap\left(\bigcup_{k=1}^{q}\left[\alpha_{k-1}^{(0)} + \frac{|\Delta_k^{(0)}|}{\nu_0};\ \alpha_k^{(0)} - \frac{|\Delta_k^{(0)}|}{\nu_0}\right]\right);$$

$$\alpha_k^{(0)} = \arccos b_k\ \ k=0,\ 1,\cdots,\ q, \tag{56}$$

$$H(x) = \sum_{k=1}^{q} h_k(x) = \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{i=N_{k-1}}^{N_k-1} a_i P_i(x)\right) = \sum_{i=N_0}^{M} a_i P_i(x) \tag{57}$$

$$(M=N_q-1);\ \ F(x) = f(x) + \left[g(x) - \frac{\varphi(x)}{\sqrt[4]{1-x^2}}\right]. \tag{58}$$

Покажем, что функция $F(x)$, полином $H(x)$ и множество $E = \overline{E}\cap E_0$ удовлетворяют условиям леммы 4; $\overline{E}=\{x\in[-1;\ 1];\ t=\arccos x\in E^{(0)}\}$.

Из условий (43), (44), (48) — (57) вытекает, что функция $\sqrt[4]{1-x^2}\cdot g(x)$ ступенчатая и

$$g(x) = (1-x^2)^{-1/4}\cdot\varphi(x);\ \ x\in Q, \tag{59}$$

$$\int_{-1}^{1}|g(x)|\,dx \leqslant \frac{\pi^2}{\alpha_0}\int_{-1}^{1}|\varphi(x)|\,dx. \tag{60}$$

$$\int_{-1}^{1} |H(x)-g(x)|\,dx < \varepsilon_0/2, \qquad (61)$$

$$|\overline{E}| > 2\left(1-6\pi\left(\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx\right)^{1/8}\right). \qquad (62)$$

$$\overline{E}\subset[-1;\,1].$$

Пусть $N_0 \leqslant n < M$, тогда для некоторого k_0, $1\leqslant k_0 < q$, $N_{k_0}\leqslant$ $\leqslant n < N_{k_0+1}$. Следовательно

$$\sum_{l=N_0}^{n} a_l P_l(x) = \sum_{k=1}^{k_0-1}\left(\sum_{l=N_{k-1}}^{N_k-1} a_l P_l(x)\right) + \sum_{l=N_{k_0}}^{n} a_l P_l(x). \qquad (63)$$

Отсюда и из (42), (53) при $x\in E$ будем иметь

$$\left|\sum_{l=N_0}^{n} a_l P_l(x)\right| \leqslant 2A\left(\alpha_0^{-7/2}\cdot\int_{-1}^{1}|\varphi(x)|\,dx + \frac{\nu_0}{\sqrt{\alpha_0}}\sum_{k=1}^{q}|\gamma_k|\,\chi_{\Delta_k}(x)\right)+\varepsilon_0. \qquad (64)$$

Очевидно, что (см. (41), (58), (59) и (62))

$$F(x)=f(x), x\in Q, \qquad (65)$$

$$|E| > 2\left(1-7\pi\cdot\left(\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx\right)^{1/8}\right), \qquad (66)$$

$$F(x)-g(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}\cdot\left(\sqrt[4]{1-x^2}\,f(x)-\varphi(x)\right). \qquad (67)$$

Ввиду того, что (см. (45))

$$\int_{-1}^{1}|\varphi(x)|\,dx \leqslant \int_{-1}^{1}\frac{|\varphi(x)|}{\sqrt[4]{1-x^2}}\,dx \leqslant 3\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx, \qquad (68)$$

из (44), (45), (60), (61), (67) имеем

$$\int_{-1}^{1}|F(x)|\,dx \leqslant \int_{-1}^{1}|F(x)-g(x)|\,dx + \int_{-1}^{1}|g(x)|\,dx \leqslant 2\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx +$$

$$+3\cdot\frac{\pi^2}{\alpha_0}\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx \leqslant (3\pi^2+2)\cdot\left(\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx\right)^{3/4}, \qquad (69)$$

$$\int_{-1}^{1}|F(x)-H(x)|\,dx \leqslant \int_{-1}^{1}|F(x)-g(x)|\,dx +$$

$$+\int_{-1}^{1}|g(x)-H(x)|\,dx \leqslant \varepsilon_0.$$

Из (41), (42), (46), (56) и (64), (68) при $x \in E$ получим

$$\sup_{N_0 < n < M} \left| \sum_{l=N_0}^{n} a_l P_l(x) \right| \leqslant 6A\,\alpha_0^{-7/2} \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx + \frac{2A\,\nu_0}{\sqrt{\alpha_0}} \frac{|\varphi(x)|}{\sqrt{1-x^2}} + \varepsilon_0 <$$

$$< 6A\,\nu_0^7 \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx + 2A\,(\nu_0^2 |f(x)| + \nu_0^{-2}) + \nu_0^{-2} \leqslant$$

$$\leqslant 6A \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx \right)^{1/8} +$$

$$+ (2A+1) \sqrt[4]{\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx + 2A\,|f(x)| \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx \right)^{-\frac{1}{4}}} <$$

$$< C \cdot \left(\left(\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx \right)^{-1/4} \cdot |f(x)| + \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx \right)^{1/4} \right), \tag{70}$$

$$(C = 6A + 3\pi^2 + 3).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим множество функций $\Phi = \left\{ f(x);\ f(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l P_l(x) \right\}$, где коэффициенты b_l пробегают множество всех рациональных чисел, $P_l(x)$ — многочлены Лежандра.

Перенумеровав множество Φ, мы можем представить его в виде последовательности

$$f_1(x),\ f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots. \tag{71}$$

Нетрудно видеть, что путем последовательного применения леммы 4 можно определить последовательности множеств $\{\overline{E}_s\}_{s=1}^{\infty}$, функций $\{\overline{g}_s(x)\}_{s=1}^{\infty}$ и полиномов

$$h_s(x) = \sum_{k=m_s+1}^{m_{s+1}} a_k^{(s)} P_k(x),\ s \geqslant 1, \tag{72}$$

которые обладают следующими свойствами:

$$\overline{g}_s(x) = f_s(x);\ x \in Q, \tag{73}$$

$$\int_{-1}^{1} |\overline{g}_s(x)|\, dx \leqslant C \cdot \left(\int_{-1}^{1} |f_s(x)|\, dx \right)^{3/4}, \tag{74}$$

$$\int_{-1}^{1} |h_s(x) - \overline{g}_s(x)|\, dx \leqslant 10^{-30s}. \tag{75}$$

$$\sup_{m_s < n < m_{s+1}} \left| \sum_{k=m_s+1}^{n} a_k P_k(x) \right| <$$

$$\leqslant C \cdot \left(\frac{|f_s(x)|}{\sqrt[4]{\int\limits_{-1}^{1} |f_s(x)|\, dx}} + \sqrt[4]{\int\limits_{-1}^{1} |f_s(x)|\, dx} \right), \tag{76}$$

$$\text{при } x \in E_s,\ |E_s| > 2\left(1 - 7\pi \left(\int\limits_{-1}^{1} |f_s(x)|\, dx \right)^{1/8} \right). \tag{77}$$

Определим ряд по многочленам Лежандра

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x) \tag{78}$$

следующим образом.

Положим

$$a_k = a_k^{(s)},\ m_s + 1 \leqslant k < m_{s+1}.$$

Установим, что ряд (78) удовлетворяет условиям теоремы 2.

Пусть $F(x) \in L(-1, 1)$. Легко видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_s}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ из последовательности (71) такую, что

$$\lim_{m \to \infty} \int\limits_{-1}^{1} \left| \sum_{s=1}^{m} f_{k_s}(x) - F(x) \right| dx = 0;\ f_{k_1}(x) = \sum_{l=0}^{N_1} c_l^{(1)} P_l(x), \tag{79}$$

$$\frac{1}{2} 10^{-20s} < \int\limits_{-1}^{1} |f_{k_s}(x)|\, dx < 10^{-20s},\ s \geqslant 2. \tag{80}$$

Положим

$$g_1(x) = H_1(x) = f_{k_1}(x),\ g_2(x) = \overline{g}_{k_2}(x), \tag{81}$$

$$H_2(x) = h_{k_2}(x), \tag{82}$$

$$E_2 = \overline{E}_{k_2}. \tag{83}$$

Предположим, что уже определены функции $g_j(x)$, $j \leqslant q$, множества E_j, G_j и полиномы

$$H_j(x) = \sum_{l=M_j}^{\overline{M}_j} c_l^{(j)} P_l(x),\ M_j < \overline{M}_j < M_{j+1}, \tag{84}$$

удовлетворяющие условиям

$$g_j(x) = f_{k_j}(x),\ x \in Q, \tag{85}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} |g_j(x)|\, dx < 3c \cdot 10^{-5(j-1)}, \tag{86}$$

$$\int_{-1}^{1}\left|\sum_{j=1}^{q_0}[H_j(x)-g_j(x)\right|dx < 2\cdot 10^{-30},\ 1 < q_0 < q, \tag{87}$$

если $x \in E_j \cap G_j$, то для всех $M_j \leqslant n \leqslant \overline{M}_j$ имеет место

$$\sup_{M_j < n < \overline{M}_j}\left|\sum_{l=M_j}^{n} c_l^{(j)} P_l(x)\right| \leqslant \bar{c}\cdot 10^{-j},\ 2 \leqslant j \leqslant q, \tag{88}$$

$$|E_j| > 2(1-10^{-j}),\ |G_j| > 2(1-10^{-j}). \tag{89}$$

Возьмем функцию $\varphi(x) = f_{N_{q+1}}(x)$ из последовательности (71) такую, что

$$m_{N_{q+1}} > M_q \tag{90}$$

$$\int_{-1}^{1}\left|\varphi(x) - \left\{f_{k_{q+1}}(x) - \sum_{j=2}^{q}[H_j(x)-g_j(x)]\right\}\right|dx < 10^{-30(q+1)}. \tag{91}$$

Ввиду того, что (см. (80), (87))

$$\frac{1}{4}10^{-20(q+1)} < \int_{-1}^{1}\left|f_{k_{q+1}}(x) - \sum_{j=2}^{q}[H_j(x)-g_j(x)]\right|dx < 2\cdot 10^{-20(q+1)}, \tag{92}$$

из (91) следует

$$\frac{1}{6}10^{-20(q+1)} < \int_{-1}^{1}|f_{N_{q+1}}(x)|\,dx = \int_{-1}^{1}|\varphi(x)|\,dx < 3\cdot 10^{-20(q+1)}. \tag{93}$$

Положим

$$H_{q+1}(x) = h_{N_{q+1}}(x) = \sum_{l=m_{N_{q+1}}+1}^{m_{N_{q+1}+1}} a_l^{(N_{q+1})} P_l(x) = \sum_{l=M_{q+1}}^{\overline{M}_{q+1}} c_l^{(q+1)} P_l(x), \tag{94}$$

$$c_l^{(q+1)} + a_l^{(N_{q+1})},\ M_{q+1} < i \leqslant \overline{M}_{q+1},\ M_{q+1} = m_{N_{q+1}}+1;\ \overline{M}_{q+1} = m_{N_{q+1}+1}, \tag{95}$$

$$g_{q+1}(x) = f_{k_{q+1}}(x) + \overline{g}_{N_{q+1}} - f_{N_{q+1}}(x), \tag{96}$$

$$G_{q+1} = \{x \in [-1;\ 1],\ |f_{N_{q+1}}(x)| < 10^{-12q}\}, \tag{97}$$

$$E_{q+1} = \overline{E}_{N_{q+1}}. \tag{98}$$

В силу (73) -(75), (90), (91), (96) получим

$$g_{q+1}(x) = f_{k_{q+1}}(x);\ x \in Q, \tag{99}$$

$$\begin{gathered}\int_{-1}^{1}|g_{q+1}(x)|\,dx \leqslant \int_{-1}^{1}\left|\varphi(x) - \left[f_{k_{q+1}}(x) - \sum_{j=2}^{q}[H_j(x)-g_j(x)\right]\right|dx + \\ + \int_{-1}^{1}|\overline{g}_{N_{q+1}}(x)|\,dx + \int_{-1}^{1}\left|\sum_{j=2}^{q}[H_j(x)-g_j(x)]\right|dx < 3c\cdot 10^{-5q},\end{gathered} \tag{100}$$

$$\int_{-1}^{1}\left|\sum_{j=2}^{q+1}[H_j(x)-g_j(x)]\right|dx \leqslant \int_{-1}^{1}|\bar{g}_{N_{q+1}}(x)-h_{N_{q+1}}(x)|\,dx+ \tag{101}$$

$$+\int_{-1}^{1}\left|\varphi(x)-\left(f_{k_{q+1}}(x)-\sum_{j=2}^{q}[H_j(x)-g_j(x)]\right)\right|dx<2c\cdot 10^{-30(q+1)}.$$

Если $x\in E_{q+1}\cap G_{q+1}$, то в силу (78), (79), (93), (97), (98) имеем

$$\sup_{M_{q+1}\leqslant n\leqslant \overline{M}_{q+1}}\left|\sum_{i=M_{q+1}}^{n} c_i^{(q+1)} P_i(x)\right|<$$

$$<C\left(\sqrt[4]{\int_{-1}^{1}|f_{N_{q+1}}(x)|\,dx}+\frac{|f_{N_{q+1}}(x)|}{\sqrt[4]{\int_{-1}^{1}|f_{N_{q+1}}(x)|\,dx}}\right)<\tilde{c}\cdot 10^{-q}. \tag{102}$$

Из условий (77), (93), (97), (98) вытекает

$$|E_{q+1}|=|E_{N_{q+1}}|>2\left(1-7\pi\cdot\sqrt[8]{\int_{-1}^{1}|f_{N_{q+1}}(x)|\,dx}\right)>2\left(1-10^{-\frac{q}{2}}\right), \tag{103}$$

$$|G_{q+1}|>2(1-10^{-q}). \tag{104}$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x)\}_{q=2}^{\infty}$, множеств $\{E_q\}_{q=2}^{\infty}$, $\{G_q\}_{q=2}^{\infty}$ и полиномов $\{H_q(x)\}_{q=2}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям (85)—(89) для всех $q\geqslant 2$. Из (100) вытекает

$$\int_{-1}^{1}\left|\sum_{q=2}^{\infty} g_q(x)\right|dx<\infty. \tag{105}$$

Определим функцию $G(x)$ и ряд $\sum_{i=0}^{\infty} c_i P_i(x)$ следующим образом:

$$G(x)=f_{k_1}(x)+\sum_{q=2}^{\infty} g_q(x), \tag{106}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i P_i(x)=\sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{i=M_q}^{\overline{M}_q} c_i^{(q)} P_i(x)\right), \tag{107}$$

$$c_i=\begin{cases} c_i^{(q)}, \text{ при } M_q\leqslant i\leqslant \overline{M}_q,\ M_1=0,\ \overline{M}_1=N_1\\ 0 \text{ — в остальных случаях.}\end{cases}$$

Очевидно, что ряд (107) является подрядом ряда (78).

В силу (79), (80), (99), (105), (106) получим $G(x)\in L(-1,1)$, $G(x)=F(x)$, $x\in Q$.

Из условий (87), (105), (106) вытекает

$$\int_{-1}^{1}\left|\sum_{j=1}^{q}\left[\sum_{i=M_j}^{\overline{M}_j} c_i P_i(x)-G(x)\right|dx\leqslant\int_{-1}^{1}\left|\sum_{j=q+1}^{\infty} g_j(x)\right|dx+\right.$$

$$+\int_{-1}^{1}\left|\sum_{j=2}^{q}[H_j(x)-g_j(x)]\right|dx<10^{-q}.$$

Следовательно, ряд (107) является рядом Фурье—Лежандра функции $G(x)$ Покажем, что ряд (107) сходится к $G(x)$ почти всюду на $[-1; 1]$. Положим

$$\mathbf{B}_q=\left\{x\in[-1;\ 1],\ \left|\sum_{j=2}^{q}[H_j(x)-g_j(x)]\right|<10^{-2q}\right\}, \tag{108}$$

$$\mathbf{A}_q=\left\{x\in[-1,\ 1],\ \left|\sum_{j=q}^{\infty} g_j(x)\right|<10^{-2q}\right\}, \tag{109}$$

$$E=\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{q=l}^{\infty}\{E_q\cap G_q\cap \mathbf{B}_q\cap \mathbf{A}_q\}. \tag{110}$$

Из условий (89), (108)—(110) следует $|E|=2$.

Пусть $x\in E$, тогда существует натуральное число i_0 такое, что при $q\geqslant i_0$

$$x\in E_q\cap G_q\cap \mathbf{B}_q\cap \mathbf{A}_q.$$

Пусть далее $n\geqslant M_{i_0}$, тогда найдется натуральное число $i\geqslant i_0$ такое, что $M_l\leqslant n<\overline{M}_l$.

Учитывая соотношения (88), (106), (108), (109) при $x\in E$ получим

$$|\sigma_n(x,\ G)-G(x)|\leqslant\left|\sum_{q=1}^{l-1}\left[\sum_{j=M_q}^{\overline{M}_q} c_j P_j(x)-g_j(x)\right]\right|+$$

$$+\sup_{M_l<n<\overline{M}_l}\left|\sum_{j=M_l}^{n} c_j P_j(x)\right|+\left|\sum_{j=l+1}^{\infty} g_j(x)\right|<10^{-l}.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. В работе [8] автора анонсировано, что теорема 2 верна и для кратных рядов по многочленам Лежандра, по многочленам Якоби, по тригонометрической системе, а также по системам Уолша и Хаара.

Замечание 4. Теорема 1 Д. Е. Меньшова для полной ортонормированной системы $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, построенной Б. С. Кашиным [9], не верна. В связи с этим в работе [10] автора установлено, что если $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$—полная в $L^2(0,\ 1)$ ортонормированная система ограниченных функций и $\varepsilon>0$ — положительное число, то существуют измеримое множество $E\subset[0,\ 1]$; $|E|>1-\varepsilon$ и возрастающая подпоследовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, обладающих следующим свойством: для любой функции $f(x)\in L(0,\ 1)$ можно найти функцию $F(x)=f(x)$ на E и

$F(x) \in L$ такую, что подпоследовательность $S_{m_k}(x, F)$ частичных сумм ее ряда Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}$ сходится к $F(x)$ почти всюду и в метрике L^1.

Ереванский государственный
университет

Поступила 15.V.1987.

Մ. Գ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Ինտեգրելի ֆունկցիաների Ֆուրիե-Լեժանդրի շարքերի համարյա ամենուրեք զուգամիտության մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում տրված ամենուրեք նոսր Q բազմության համար կառուցվում է $\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$ *շարք ըստ Լեժանդրի բազմանդամների հետևյալ հատկությամբ.*

$$\forall f(x) \in L(-1, 1);\ \exists F(x) \in L(-1, 1)$$

$$\text{ա)}\ F(x) = f(x),\ x \in Q,$$

F(x)-ի Ֆուրիե-Լեժանդրի շարքը համարյա ամենուրեք զուգամիտում է իրեն և հանդիսանում է $\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$ *շարքի ենթաշարք։*

M. G. GRIGORIAN. *On the almost everywere convergence of Fourier—Legander series of integrable functions* (summary)

Let $Q \subset]-1; 1]$ be an arbitrary perfect and nowhere dense set. Then for each unction $f(x)$ $L(-1; 1)$ there is a function $F(x) \in L(-1, 1)$ such that $F(x) = f(x)$ on Q and the Fourier—Legader series of $F(x)$ convergens to almost everywere.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Pollard.* The mean convergence of orthogonal series, Duke Mat. J., 1949, 6 89—98.
2. *J. Newman. W. Rudin.* Mean convergence of orthogonal series, Proc. Amer. Mat. Soc., 1952, 3, 219—222.
3. *П. К. Суетин.* Классические ортогональные многочлены, Наука, М., 1976.
4. *Е. Б. Гобсон.* Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.
5. *Д. Е. Меньшов.* О рядах фурье от суммируемых функций, ТММО, I, 5—58, 1952.
6. *M. G. Grigorian.* On the almost everywhere conwergence of double Fourier series of integrable functions, Analysis Mathematica, V. 11, 3, 1985.
7. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., Физматгиз, 1961.
8. *М. Г. Григорян.* Представление измеримых функции простыми и кратными рядами по многочленам Лежандра, Ученые записки ЕГУ, № 3, 1987.
9. *Б. С. Кашин.* Об одной полной ортономированной системе, Мат сб., 141, № 3, 1976.
10. *М. Г. Григорян.* О сходимости в метрике L и почти всюду подпоследовательностей сферических частичных двойных рядов Фурье по ПОНС, Межвузовский сборник «Математика», вып. 2, Ереван, 1984.