ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIV, № 6, 1989 Математика

УДК 517.53

А. Г. ДЖВАРШЕЙШВИЛИ

РАЗЛИЧНЫЕ УГЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Предварительные сведения

Через E_n обозначим n-мерное евклидово пространство элементы которого суть $x=(x_1,\cdots, x_n)\cdot x_k\in E_1=(-\infty, \infty)$, $k>1$. Для $x\in E_n$, $y\in E_n$, число $x\cdot y=\sum\limits_1^n x_k y_k$ есть скалярное произведение, а норма $|x|=(\sum x_k^2)^{1/2}$. Пусть $L_p(E_n)$ есть пространство измеримых функций f, для которых норма

$$\|f\|_p=\left(\int\limits_{E_n}|f|^p\,dx\right)^{1/p}<\infty,\ dx=dx_1\cdots dx_n.$$

Положим далее $C_1^+=\{z=x+iy;\ x\in E_1, y>0\}$; $C_2^{++}=C_1^+\times C_1^+$. Для функции $f\in L_1(E_n)$ преобразование Фурье есть

$$F[f, x]=\int\limits_{E_n}f(t)\,e^{-2\pi ixt}\,dt,\quad x\in E_n$$

и которое обладает свойствами (см. [1], стр 8—27).

1. Пусть f, $g\in L_1(E_n)$. Тогда

$$F[(f*g), x]=F[f, x]\cdot F[g, x],$$

где $(f*g)=\int\limits_{E_n}f(x-y)\,g(y)\,dy$.

2. Пусть $f\in L_1(E_n)$. Тогда

$$F[f(t-h), x]=e^{-2\pi ihx}F[f, x].$$

3. Пусть f, $g\in L_1(E_n)$. Тогда

$$\int\limits_{E_n}F[f, x]\,g(x)\,dx=\int\limits_{E_n}F[g, x]\,f(x)\,dx.$$

Здесь интеграл понимается в смысле среднего по Абелю ([1], стр. 11). При этом, если подынтегральная функция суммируема, то интеграл совпадает с интегралом Лебега.

4. Если $f \in L_1(E_n)$, то

$$f(x) = \int_{E_n} \mathbf{F}[f, t] e^{2\pi i t x} dt = \mathbf{F}^2[f_1 - x] = \mathbf{F}[\mathbf{F}[f, t]: -x].$$

5. Если $P_\eta(t) = \dfrac{\eta}{t^2 + \eta^2}$ — ядро Пуассона, $\eta > 0$, $t \in E_1$, то

$$\mathbf{F}[P_\eta, x] = e^{-2\pi\eta|x|}, \quad \mathbf{F}^2[P_\eta, x] = P_\eta(x).$$

6. Если $f \in L_1(E_n)$, $g = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, то

$$\mathbf{F}[g, x] = 2\pi i x_k \mathbf{F}[f, x].$$

7. Если $f \in L_2(E_n)$, то $\|f\|_2 = \|\mathbf{F}[f, x]\|_2$.

Заметим, что в статье приведенные рассуждения и выкладки идентичны для случаев $n > 2$, $n = 2$. В силу этого для краткости и большей наглядности рассмотрим случай $n = 2$. Введем множества

$$\delta(\lambda, h) = \{(\eta_1, \eta_2): 0 < \eta_k < h;\ 1/\lambda < \eta_1/\eta_2 < \Lambda,\ k = 1, 2\},$$

$$\Delta(x_1, x_2) = \Delta(x_1, x_2, a, h, \lambda) = \{(z_1, z_2) \in C_2^{++};\ |\operatorname{Re} z_k - x_k| \leqslant$$

$$\leqslant a \operatorname{Im} z_k;\ 0 < \operatorname{Im} z_k < h,\ k = 1, 2;\ 1/\lambda \leqslant \operatorname{Im} z_1/\operatorname{Re} z_2 \leqslant \lambda\},$$

$$z_k = \xi_k + i\eta_k,\ \xi_k \in E_1,\ \eta_k \in (0, \infty),\ k = 1, 2,$$

где $0 < a$, $0 < h$, $1 < \lambda$, $(x_1, x_2) \in E_2$.

Пусть $f \in L_1(E_2)$, $\lambda_n = 2^{n-1}$, $n \geqslant 1$. Для любой точки $(x_1, x_2) \in E_2$ положим

$$M_{\lambda_n} = \sup_r \frac{1}{|r|} \int_r |f|\, dt\, d\tau, \quad r = [a, b;\ c, d],$$

где $1/\lambda_n < \left|\dfrac{b-a}{d-c}\right| < \lambda_n$, $(x_1, x_2) \in r$. Затем положим

$$M(f, x_1, x_2) = \sup\{M_{\lambda_1}, \cdots, 1/\sqrt{\lambda_n}\, M_{\lambda_n}, \cdots\}. \tag{1.1}$$

Указанные функции были введены в [2], [3] и там же доказано неравенство

$$|\{(x_1, x_2) \in E_2: M(f, x_1, x_2) > \nu\}| < \frac{C}{\nu}\|f\|. \tag{2.1}$$

Если $f \in L_p(E_2)$, $p > 1$, то

$$\|M(f, x_1, x_2)\|_p \leqslant C_p \|f\|_p, \tag{3.1}$$

где C, C_p не зависят от ν, f.

Пусть F — комплекснозначная функция с непрерывными частными производными до второго порядка. Для точки $(x_1, x_2) \in E_2$ введем

$$S^2(F, x_1, x_2) = \int_{\Delta(x_1, x_2, a, h, \lambda)} \left\{\left|\left|\frac{\partial F(z_1, z_2)}{\partial \xi_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial F}{\partial \eta_1}\right|^2\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial \xi_2}\right|^2 + \right.$$

$$+\left|\frac{\partial F}{\partial \eta_2}\right|^2\Big]\Big\} d\xi_1 d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2 = \int\limits_{\Delta(x_1 x_2)} [L_1(F, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) + L_2]\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2, \tag{4.1}$$

$$g^2(F, x_1, x_2) = \int\limits_{\delta(\lambda, h)} \Big\{\eta_1 \Big[\left|\frac{\partial F(x_1 + i\eta_1, x_2 + i\eta_2)}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial F}{\partial \eta_1}\right|^2\Big] + \eta_2 \Big[\left|\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|^2 +$$

$$+\left|\frac{\partial F}{\partial \eta_2}\right|^2\Big] d\eta_1\, d\eta_2 = \int\limits_{\delta(\lambda, h)} [\eta_1 L_1(F, x_1, x_2, \eta_1, \eta_2) + \eta_2 L_2]\, d\eta_1\, d\eta_2, \tag{5.1}$$

$$z_k = \xi_k + i\eta_k,\ k = 1,\ 2.$$

Очевидны неравенства

$$S^2(F, x_1, x_2) \leqslant \int\limits_0^h d\eta_1 \int\limits_{\lambda^{-1}\eta_1}^{\lambda\eta_1} d\eta_2 \int\limits_{x_1 - \lambda\eta_1}^{x_1 + \lambda\eta_1} d\xi_1 \int\limits_{x_2 - \alpha\eta_2}^{x_2 + \alpha\eta_2} (L_1 + L_2)\, d\xi_2.$$

$$g^2(F, x_1, x_2) \leqslant \int\limits_0^h d\eta_1 \int\limits_{\lambda^{-1}\eta_1}^{\lambda\eta_1} (\eta_1 L_1(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2) + \eta_2 L_2)\, d\eta_1 d\eta_2.$$

Подобные величины для функций одной переменной были рассмотрены в работах [4], [5], а для функций, определенных в $C_n^+ = E_n \times (0, \infty)$, в работе [6]. Указанный круг вопросов в настоящей статье рассматриваем для функций, определенных в области $C_n^{+\cdots+} = E_n + i(0, \infty)^n = E_n \times (0, \infty)^n$.

2. Основные неравенства для введенных величин

Предложение 1.2. *Пусть $f \in L_1(E_2)$. Тогда для $(x_1, x_2) \in E_2$, $\alpha > 0$, $h > 0$, $\lambda \geqslant 1$ выполнено неравенство*

$$g(U_f, x_1, x_2) \leqslant CS(U_f, x_1, x_2, \alpha_0, h_0, \lambda_0),$$

где $C > 0$ не зависит от f, (x_1, x_2), а

$$U_f(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2) = U_f(x_1, x_2) = \int\limits_{E_2} f(x_1 + t, x_2 + \tau)\, P_{\eta_1}(t)\, P_{\eta_2}(\tau)\, dt\, d\tau,$$

где $P_\eta(t) = \dfrac{\eta}{t^2 + \eta^2}$, $t \in E_1$, $\eta > 0$, $\alpha_0 > \alpha$, $h_0 > h$, $\lambda_0 > \lambda$.

Доказательсво. Зафиксируем $0 < \alpha < 1$, $h > 0$, $1 \leqslant \lambda$, $(x_1, x_2) \in E_2$ и рассмотрим выражение

$$g^2(U_f, x_1, x_2) \leqslant \int\limits_0^h d\eta_1 \int\limits_{\lambda^{-1}\eta_1}^{\lambda\eta_1} [\eta_1 L_1 + \eta_2 L_2]\, d\eta_2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_1^\infty \Big[\int\limits_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} d\eta_1 \int\limits_{\lambda^{-1}\eta_1}^{\lambda\eta_1} + \int\limits_1^h d\eta_1 \int\limits_{\lambda^{-1}\eta_1}^{\lambda\eta_1} \Big| (\eta_1 L_1 + \eta_2 L_2)\, d\eta_2 = J_1 + J_2, \tag{1.2}$$

$$J_1 = \sum_1^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} d\eta_1 \int_{\lambda^{-1}\eta_1}^{\lambda\eta_1} (\eta_1 L_1 + \eta_2 L_2)\, d\eta_2 = J_{11} + J_{12}.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Имеем

$$J_{1.1} \leqslant C \sum_1^{\infty} 2^{-3k} M_k, \tag{2.2}$$

где C не зависит от (x_1, x_2), f, а

$$M_k = \max L_1 (U_f, x_1, x_2, \eta_1, \eta_2),$$

при

$$2^{-k-1} \leqslant \eta_1 \leqslant 2^{-k},\ \lambda^{-1} \eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \lambda \eta_1. \tag{3.2}$$

Пусть в точке $Q_k(x_1, x_2, a_k, b_k)$ достигается максимум. Тогда

$$J_{1,1} \leqslant C \sum_1^{\infty} 2^{-3k} \left[\left| \frac{\partial U_f(Q_k)}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial U_f(Q_k)}{\partial \eta_1} \right|^2 \right].$$

Обозначим через $\sigma_k = \sigma(Q_k, r_k)$ сферу в C_2^{++} с центром в точке Q_k и радиусом $r_k = \alpha 2^{-k-2}$, соответствующий шар через T_k. Для произвольной точки $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \in T_k$ и так как $0 < \alpha < 1$ имеем

$$0 \leqslant a_k - \alpha 2^{-k-2} \leqslant \eta_1 \leqslant a_k + \alpha 2^{-k-2};\ 0 \leqslant b_k - \alpha 2^{-k-2} \leqslant \eta_2 \leqslant b_k + \alpha 2^{-k-2},$$

$$1/\lambda \leqslant \frac{a_k}{b_k} \leqslant \lambda,\ |\xi_1 - x_1| \leqslant \alpha 2^{-k-2} < \alpha\eta_1;\ |\xi_2 - x_2| \leqslant \alpha 2^{-k-2} \leqslant \alpha \lambda \eta_2, \tag{4.2}$$

$$\frac{2-\alpha}{\lambda(4+\alpha)} \leqslant \frac{\eta_1}{\eta_2} \leqslant \frac{4+\alpha}{2-\alpha} \lambda.$$

Пусть $\lambda_0 \geqslant \lambda \dfrac{4+\alpha}{2-\alpha} > \lambda$, $\alpha_0 > \alpha\lambda$, $h_0 \geqslant h\lambda$. Тогда в силу (4.2) точка $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ будет принадлежать $\Delta(x_1, x_2, \alpha_0, h_0, \lambda_0)$. Следовательно, $T_k \subset \Delta(x_1, x_2, \alpha_0, h_0, \lambda_0)$. Далее функция $L_1(U_f, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ является субгармонической в C_2^{++}, а потому справедлива формула

$$M_k \leqslant \frac{1}{|\sigma(Q_k, r_k)|} \int_{\sigma_k} L_1 (U_f, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)\, d\xi_1 d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2 \leqslant$$

$$< C 2^{3k} \int_{\sigma_k} L_1\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2,$$

где $|\sigma_k|$ есть площадь поверхности σ_k, а C не зависит от f, $k \geqslant 1$.

Теперь заметим, что для всех $k \geqslant 1$

$$\sigma_k \cap \sigma_{k+3} = \varnothing. \tag{5.2}$$

В самом деле, в силу (4.2) для точек $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \in \sigma_k$ и $(\xi_1', \xi_2', \eta_1', \eta_2') \in \sigma_{k+3}$ $\eta_1' \leqslant 2^{-k-3} + \alpha 2^{-k-5} = 2^{-k-3}(1 + \alpha/4) : \eta_1 \geqslant 2^{-k-1} - \alpha 2^{-k-2} > 2^{-k-1}(1 - \alpha/2)$, то есть $\eta_1' < \eta_1$. Стало быть (5.2) выполнено. Отсюда получаем

$$J_{1,1} \leqslant C\left(\sum_{k=3j} + \sum_{k=3j+1} + \sum_{k=3j+2}\right) M_k\, 2^{-3\nu} \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{\Delta(x_1, x_2)} L_1\, d\xi_1 d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2, \tag{6.2}$$

где C не зависит от f, (x_1, x_2). Аналогично имеем

$$J_{2,1} \leqslant C \int\limits_{\Delta(x_1, x_2)} L_2\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2. \tag{7.2}$$

Из (6.2), (7.2) вытекает

$$J_1 \leqslant C \int\limits_{\Delta(x_1, x_2, \alpha_0, h_0, \lambda_0)} (L_1 + L_2)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2.$$

Подобным рассуждением получим

$$J_2 \leqslant C \int\limits_{\Delta(x_1, x_2)} (L_1 + L_2)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2,$$

где C не зависит от f, (x_1, x_2). Из последних соотношений вытекает требуемое неравенство и предложение доказано.

Предложение 2.2. *Пусть $f \in L_2(E_2)$. Тогда для $\alpha > 0$, $h > 0$, $\lambda \geqslant 1$*

$$\| S(U_f, x_1, x_2, \alpha, h, \lambda)\|_2 \leqslant C \|f\|_2,$$

где C не зависит от f.

Доказательство. Заметим, что если $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \in \Delta(0, 0, \alpha, h, \lambda)$, то $(\xi_1 + x_1, \xi_2 + x_2, \eta_1, \eta_2) \in \Delta(x_1, x_2, \alpha, h, \lambda)$. Положим $\Psi(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = \Psi(z_1, z_2)$, $z_k = \xi_k + i\eta_k$, $k = 1, 2$ есть характеристическая функция множества $\Delta(0, 0, \alpha, h, \lambda)$ и рассмотрим выражение

$$\int\limits_{E_2} S^2(U_f, x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int\limits_{E_2} dx_1\, dx_2 \int\limits_{\Delta(x_1, x_2)} (L_1 + L_2)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2 =$$

$$= \int\limits_{E_2} dx_1\, dx_2 \int\limits_{C_2^{++}} \Psi(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)\, [L_1(\xi_1 + x_1, \xi_2 +$$

$$+ x_2, \eta_1, \eta_2) + L_2]\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2. \tag{8.2}$$

Используя свойства преобразования Фурье получим

$$\left|\mathrm{F}\left[\frac{\partial U_f(\xi_1 + t, \xi_2 + \tau, \eta_1, \eta_2)}{\partial \xi_1} : x_1\, x_2\right]\right| =$$

$$= |\mathrm{F}[f, x_1, x_2]| \left|\mathrm{F}\left[\frac{\partial}{\partial t} P_{\eta_1}, x_1\right]\right| |\mathrm{F}[P_{\eta_2}, x_2]|,$$

$$\left|\mathrm{F}\left[\frac{\partial U_f(\xi_1 + t, \xi_2 + \tau, \eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1}; x_1, x_2\right]\right| =$$

$$= |\mathbf{F}[f, x_1, x_2]| \left|\mathbf{F}\left[\frac{\partial}{\partial\eta_1} P_{\eta_1}, x_1\right]\right| |\mathbf{F}[P_{\eta_2}, x_2]|.$$

С другой стороны

$$\left|\mathbf{F}\left[\frac{\partial}{\partial t} P_{\eta}, x\right]\right| \leqslant C|x| |\mathbf{F}[P_{\eta}, x]| \leqslant C|x| e^{-2\pi\eta|x|} < \frac{C}{\eta},$$

$$\left|\mathbf{F}\left[\frac{\partial}{\partial\eta} P_{\eta}, x\right]\right| \leqslant C|x| e^{-2\pi\eta|x|} < \frac{C}{\eta},$$

для всех $x \in E_1$, а $C > 0$ не зависит от x, η. Таким образом

$$\int\limits_{\Delta(0,0)} d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2 \int\limits_{E_2} \left|\frac{\partial U_f(\xi_1+x_1, \xi_2+x_2, \eta_1, \eta_2)}{\partial\xi_1}\right|^2 dx_1\, dx_2 \leqslant \int\limits_{E_2} |\mathbf{F}[f, x_1, x_2]|^2 \times$$

$$\times \int\limits_{\Delta(0,0)} d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2 \left|\mathbf{F}\left[\frac{\partial}{\partial t} P_{\eta_1}, x_1\right]\right|^2 |\mathbf{F}[P_{\eta_2}, x_2]|^2\, dx_1\, dx_2 \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{E_2} |\mathbf{F}[f, x_1, x_2]|^2\, dx_1\, dx_2 \int\limits_0^h \frac{d\eta_1}{\eta_1^2} \int\limits_{\lambda^{-1}\eta_1}^{\lambda\eta_1} \eta_2\, d\eta_2 \leqslant$$

$$< C \int\limits_{E_2} |f(x_1, x_2)|^2\, dx_1\, dx_2, \tag{9.2}$$

где C не зависит от f. Подобные оценки получим для $\frac{\partial U}{\partial\eta_1}, \frac{\partial U}{\partial\xi_2}, \frac{\partial U}{\partial\eta_2}$, и из полученных неравенств вытекает предложение (2.2).

Предложение 3.2. *Пусть $f \in L_1(E_2)$. Тогда существует константа $C > 0$, не зависящая от f и x_1, x_2 такая, что*

$$\sup \eta_1 \left(\left|\frac{\partial U_f(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)}{\partial\xi_1}\right| + \left|\frac{\partial U_f}{\partial\eta_1}\right|\right) \leqslant CM(f, x_1, x_2),$$

$$\sup \eta_2 \left(\left|\frac{\partial U_f(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)}{\partial\xi_2}\right| + \left|\frac{\partial U_f}{\partial\eta_2}\right|\right) \leqslant CM(f, x_1, x_2),$$

где $\sup$ *берётся по* $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \in \Delta(x_1, x_2, a, h, \lambda)$.

Доказательство. Положим

$$Q_\eta(t) = \eta\, \frac{\partial P_\eta(t)}{\partial t};\quad G_\eta(t) = \eta\, \frac{\partial P_\eta(t)}{\partial\eta},\quad t \in E_1\ \eta > 0.$$

Непосредственными вычислениями получим

$$|Q_\eta(t)| < C/\eta,\ |G_\eta(t)| < C/\eta,\ |Q_\eta(t)| \leqslant C\eta/t^2,$$

$$|G_\eta(t)| \leqslant C\eta/t,\ \int\limits_{E_1} |Q_\eta(t)|\, dt < C:\ \int\limits_{E_1} |G_\eta(t)|\, dt < C \tag{10.2}$$

и для всех $(\xi, \eta) \in \{(\xi, \eta) : |\xi| \leqslant a\eta\}$, $t \in E_2$,

$$|t - \xi|^2 + \eta^2 > C t^2, \tag{10.2'}$$

где константа C не зависит от t, ξ, η.

Зафиксируем $(x_1, x_2) \in E_2$ и $\varphi(t, \tau) = f(x_1 + t, x_2 + \tau)$. Пусть $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \in \Delta(0, 0, \alpha, h, \lambda)$ и $U_f(\xi_1 + x_1, \xi_2 + x_2, \eta_1, \eta_2) = U_\varphi(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$. Полагая $\delta > 0$, рассмотрим выражение

$$\eta_1 \left| \frac{\partial U_f(\xi_1 + x_1, \xi_2 + x_2, \eta_1, \eta_2)}{\partial \xi_1} \right| = \eta_1 \left| \frac{\partial U_\varphi(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)}{\partial \xi_1} \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{E_2} \varphi(t, \tau) Q_{\eta_1}(t - \xi_1) P_{\eta_2}(\tau - \xi_2)\, dt\, d\tau \right| < \left(\left| \int\limits_{-\infty}^{-\delta} \int\limits_{-\infty}^{-\delta} \right| + \left| \int\limits_{-\delta}^{\delta} \int\limits_{-\infty}^{-\delta} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \int\limits_{\delta}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{-\delta} \right| + \cdots + \left| \int\limits_{\delta}^{\infty} \int\limits_{\delta}^{\infty} \varphi\, Q_{\eta_1} P_{\eta_2}\, dt\, d\tau \right| \right) = J_1 + \cdots + J_9.$$

Используя (10.2) и уже известные рассуждения ([2], стр. 88—95; [7], стр. 465—470), получим неравенства

$$|J_k| < CM(\varphi, 0, 0) = CM(f, x_1, x_2),\ k = 1, 9,$$

где C не зависит от f, (x_1, x_2). Подобные оценки получим и для $\dfrac{\partial U_f}{\partial \eta_1}$, $\dfrac{\partial U_f}{\partial \xi_2}$, $\dfrac{\partial U_f}{\partial \eta_2}$. Предложение доказано.

3. Связь между угловыми характеристиками и граничными значениями

Теорема 1.3. *Пусть $f \in L_1(E_2)$ и $\nu > 0$. Тогда*

$$|\{(x_1, x_2) : S(U_f, x_1, x_2) > \nu\}| \leqslant C/\nu \, \|f\|_1, \tag{1.3}$$

где C не зависит от f, ν.

Доказательство. Не ограничивая общности положим $f \geqslant 0$. В силу предположения (3.2) имеем

$$S_1^2 = \int\limits_{\Delta(x_1, x_2)} \left| \frac{\partial U_f(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)}{\partial \xi_1} \right|^2 d\xi_1\, d\xi_2, d\eta_1\, d\eta_2 \leqslant CM(f, x_1, x_2) \times$$

$$\times \int\limits_{\Delta(x_1, x_2)} \left| \frac{\partial U_f}{\partial \xi_1} \right| \frac{d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2}{\eta_1} = CM(f, x_1, x_2)\, B(x_1, x_2). \tag{2.3}$$

Исследуем выражение

$$\int\limits_{E_2} B(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 < \int\limits_{E_2} dx_1\, dx_2 \int\limits_{\Delta(0, 0)} \frac{d\xi_2\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2}{\eta_1} \times$$

$$\times \int\limits_{E_2} f(\xi_1 + x_1 + t, \xi_2 + x_2 + \tau) \left| \frac{\partial P_{\eta_1}(t)}{\partial t} \right| \cdot |P_{\eta_2}(\tau)|\, dt\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Delta(0, 0)} \frac{d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2}{\eta_1} \int\limits_{E_2} \left| \frac{\partial P_{\eta_1}(t)}{\partial t} \right| P_{\eta_2}(t)\, dt\, d\tau \int\limits_{E_2} f(u, v)\, du\, dv \leqslant$$

$$< \|f\|_1 \int\limits_{\Delta(0,\,0)} \frac{d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2}{\eta_1^2} \leqslant C\|f\|_1, \tag{3.3}$$

где C не зависит от f. Теперь из (3.3), (2.3), (2.1) имеем

$$|\{(x_1,\, x_2) : S_1^2 > \nu^2\}| \leqslant |\{M(f,\, x_1,\, x_2)\cdot B(x_1,\, x_2) > \nu^2/C\}| \leqslant$$

$$\leqslant |\{M(f,\, x_1,\, x_2) > \nu/C\}| + |\{B(x_1,\, x_2) > \nu\}| \leqslant \frac{C}{\nu}\|f\|_1.$$

Аналогичные неравенства получим для $\dfrac{\partial U_f}{\partial \eta_1}$, $\dfrac{\partial U_f}{\partial \xi_2}$, $\dfrac{\partial U_f}{\partial \eta_2}$. Отсюда следует требуемое неравенство.

Следствие 1.3. *Пусть $f \in L_p(E_2)$, $1 < p < 2$. Тогда*

$$\|S(U_f)\|_p \leqslant C_p \|f\|_p, \tag{4.3}$$

где $C_p > 0$ не зависит от f.

Доказательство. Справедливость (4.3) вытекает из предложения (2.2), теоремы (1.3) и теоремы Марцинкевича об интерполировании операторов ([8], [9], [10], [7], стр. 169).

Теорема 2.3. *Пусть $f \in L_p(E_2)$, $1 < p < \infty$. Тогда справедливо неравенство*

$$\|S(U_f)\|_p \leqslant C_p \|f\|_p, \tag{4.3}$$

где C_p не зависит от f.

Доказательство. Положим $p \geqslant 4$, $1/q + \dfrac{2}{p} = 1$. Имеем

$$\|S(U_f)\|_p^2 = \left(\int\limits_{E_2} |S^2(U_f,\, x_1,\, x_2)|^{p/2}\, dx_1\, dx_2 \right)^{2/p} =$$

$$= \sup_{\varphi} \int\limits_{E_2} S^2(U_f,\, x_1,\, x_2)\, \varphi(x_1,\, x_2)\, dx_1\, dx_2, \tag{5.3}$$

где sup рассматривается на функциях $\varphi \in L_q(E_2)$; $\|\varphi\|_q \leqslant 1$, $\varphi \geqslant 0$. Рассмотрим выражение

$$J_1 = \int\limits_{E_2} \varphi(x_1,\, x_2)\, dx_1\, dx_2 \int\limits_{\Delta(x_1,\, x_2)} \left| \frac{\partial U_f(\xi_1,\, \xi_2,\, \eta_1,\, \eta_2)}{\partial \xi_1} \right|^2 d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2 =$$

$$= \int\limits_{E_2} \varphi\, dx_1\, dx_2 \int\limits_{\Delta(0,\,0)} d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2 \times$$

$$\times \left| \int\limits_{E_2} f(\xi_1 + x_1 + t,\, \xi_2 + x_2 + \tau) \frac{\partial}{\partial t} P_{\eta_1} P_{\eta_2}\, dt\, d\tau \right|^2.$$

Отсюда и в силу предложения (3.2) имеем

$$J_1 \leqslant C \int\limits_{E_2} \varphi \int\limits_{\Delta(0,\,0)} \frac{d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2}{\eta_1^2} M^2(f,\, x_1 + \xi_1,\, x_2 + \xi_2)\, dx_1\, dx_2 <$$

$$\leqslant C_p \int\limits_{\Delta(0,\,0)} \frac{d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2}{\eta_1^2} \Big(\int\limits_{E_2} |\varphi|^q\, dx_1\, dx_2 \Big)^{1/q} \times$$

$$\times \Big(\int\limits_{E_2} [M^2(f,\, x_1+\xi_1,\, x_2+\xi_2)]^{p/2} dx_1\, dx_2 \Big)^{2/p} \leqslant$$

$$< C_p \| M(f,\, x_1,\, x_2)\|_p^2,$$

где C_p не зависит от f. Аналогичные неравенства получаются для $\frac{\partial U}{\partial \eta_1}$, $\frac{\partial U}{\partial \xi_2}$, $\frac{\partial U}{\partial \eta_2}$. Из полученных неравенств и (5.3) вытекает (4.3) для $p \geqslant 4$. Отсюда и из предложеиия (2.2), теоремы Марцинкевича заключаем, что (4.3) верно для всех $p > 1$ и теорема доказана.

На основании предложения (1.2) доказанные теоремы распространяются на величину $g(F)$, а именно справедлива

Теорема 3.3. *Пусть $f \in L_p(E_2)$, $p \geqslant 1$. Тогда*

$$|\{(x_1,\, x_2) : g(U_f,\, x_1,\, x_2) > \nu\}| \leqslant C/\nu \, \|f\|_1,$$

если $p = 1$, и

$$\|g(U_f)\|_p \leqslant C_p \|f\|_p,$$

если $p > 1$, где C, C_p не зависят от f.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе АН Грузинской ССР

Поступила 3. XI. 1987

Ա. Գ. ՋՎԱՇԵԻՇՎԻԼԻ Բազմակի փոփոխականի ներդաշնակ ֆունկցիաների անկյունային որոշ բնութագրեր *(ամփոփում)*

Հոդվածի մեջ մտցվում են $S(F, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(F, x_1, x_2, \ldots x_n)$ անկյունային բնութագրերը և Պուասոնի ինտեգրալի համար ապացուցված է (1,3), (4,3) անհավասարությունները.

A. G. JVASHEISHVILI. *Various non-tangential characterizations for harmonic functions of many variables* (summary)

In the paper the non-tangential characterizations $S(F)$ and $g(F)$ are introduced for the functions, difined In the domain $E_n^{+\cdots+}$. The inequalities (1.3) and (4.3) are proved for the Poisson singular integral.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Стейн, Г. Вейс.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, Изд. «Мир», М., 1974.
2. *В. Г. Челидзе.* Метод Абеля суммирования двойных рядов Фурье, Тр. Тбилисского ин-та матем., 1943, 79—101.
3. *J. Marcinkiewicz and A. Zygmund.* On the summability of double Fourier series, Fund- Math., 32, 1939, 111—132.
4. *N. Lusin.* Sur une propriete des fnnctions a Carre sommable, Bull. Calcuta Math, Soc., v. 20, 1930, 139—154.

5. *J. E. Littlewood and R. E. Paley.* Theorems on Fourier series and power series. (I). J. London Math. Soc., v. 6, 1931, 230—233; (II). P. L. M. S., v. 42, 1936, 52—89; (III). P. L. M. S., v. 43. 1937, 105—126.
6. *E. M. Stein.* On the functions of Littlewood—Paley, Lusin and Marcinkiewicz, Trans. Amer. Math. Soc., v. 89, № 2, 1958, 432—436.
7. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, 2, Изд. «Мир», 1965.
8. *J. Marcinkiewicz.* Sur l'interpolations. d'operations, C. R., 203, 1929, 1272—1273.
9. *A. Sygmund.* On theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operation, Journal de Math.. 35, 1956, 223—248.
10. A. *P. Calderon.* On the theorem of Marcinkiewicz and Zygmund, Trans. Amer. Math. Soc., v. 68, 1958, 51—60.