ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 6, 1989 Математика

УДК 519.2

Т. П. КАЗАНЧЯН

ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА В ФОРМЕ ЧЖУНА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В работе [1] Эрдеш и Кац для широкого класса последовательностей независимых случайных величин ξ_t, $t \in Z^1$, показали, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{1\leq k\leq n}|S_k| < s_n x\right) = P\left(\sup_{0\leq s\leq 1} B(s) < x\right) = T(x), \quad x > 0, \tag{1}$$

где $S_k = \sum_{t=1}^{k} \xi_t$, $s_n^2 = \sum_{t=1}^{n} D\xi_t$,

$(B(s),\ s \geq 0)$ — стандартное броуновское движение

$$T(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\exp\left(-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8x^2}\right).$$

Соотношение (1) обычно называют принципом инвариантности типа Эрдеша—Каца в отличие от общего принципа инвариантности Донскера—Прохорова [2]. Несколько позже Чжун [3] оценил скорость сходимости в принципе инвариантности Эрдеша—Каца и с помощью полученной оценки доказал следующую теорему:

Теорема. *Пусть ξ_t, $t = 1, 2, \cdots$ — такая последовательност независимых случайных величин, что*

$$E\xi_t = 0, \quad \gamma_t = E|\xi_t|^3 < +\infty, \quad t = 1, 2, \cdots$$

и, кроме того, выполнены условия:

1. $s_n^2 \to \infty$, $n \to \infty$;
2. $\max_{1\leq k\leq n} \gamma_k (D\xi_k)^{-1} = O(s_n^{1-\theta})$ *для некоторого* $\theta > 0$. *Тогда*

$$P\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{\max_{1\leq k\leq n}|S_k|}{8^{-1/2}\pi s_n(\lg\lg s_n)^{-1/2}} = 1\right) = 1. \tag{2}$$

Утверждение этой теоремы будем называть законом повторного логарифма в форме Чжуна. В дальнейшем много работ было посвящено уточнению оценок скорости сходимости в соотношении (1) как для последовательностей независимых случайных величин, так и для последовательностей с зависимыми членами (см., например, [4], [5]). В настоящей работе нас интересует справедливость соотношения (2) для слабо зависимых случайных последовательностей.

Говорят, что стационарная в узком смысле последовательность случайных величин ξ_t, $t \in Z^1$, удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания (р. с. п.) или φ-перемешивания, если

$$|P(A\cap B)-P(A)P(B)|\leqslant\varphi(n)P(B),\ \varphi(n)\to 0,\ n\to\infty,$$

при всех

$$B\in\sigma(\xi_t,\ t\leqslant 0)\ \text{и}\ A\in\sigma(\xi_t,\ t>n).$$

Последовательность ξ_t, $t\in Z^1$ удовлетворяет условию ψ-перемешивания, если

$$|P(A\cap B)-P(A)P(B)|\leqslant\psi(n)P(A)P(B),\ \psi(n)\to 0,\ n\to\infty,$$

при всех

$$B\in\sigma(\xi_t,\ t\leqslant\infty\ 0)\ \text{и}\ A\in\sigma(\xi_t,\ t\geqslant n).$$

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть стационарная случайная последовательность ξ_t, $t\in Z^1$, $E\xi_t=0$, $E|\xi_t|^3<+\infty$, удовлетворяет условию р. с. п., причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi^{1/2}(n)<+\infty$. Тогда ряд $\sigma_0^2=E\xi_0^2+2\sum\limits_{t=1}^{\infty}E\xi_1\xi_t<+\infty$ и если $\sigma_0^2>0$, то для последовательности ξ_t, $t\in Z^1$, справедлив закон повторного логарифма в форме Чжуна.*

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 справедливо следующее утверждение:*

$$P\left(\max_{1<k<n}|S_k|<s_nx\right)=T(x)+O\left(\left(\frac{\lg\lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right).$$

Приведенные теоремы усиливают результаты работы [4], в которой используются мартингальные методы, а также работы [6].

Отметим, что утверждения теорем 1 и 2 остаются справедливыми и для последовательностей с ψ-перемешиванием с заменой условия $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi^{1/2}(n)<+\infty$ на $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi(n)<+\infty$. Поскольку доказательства соответствующих утверждений проводятся точно так же как доказательства теорем 1 и 2, то мы их опускаем. Заметим также, что аналогичные результаты можно получить и для стационарных случайных последовательностей, удовлетворяющих условиям α, β и ρ-перемешивания, но это тема отдельной публикации автора.

Автор благодарит профессора В. В. Петрова за внимание к настоящей работе.

Доказательства сформулированных результатов. Прежде всего докажем теорему 2. Доказательство будем проводить путем сведения к независимым случайным величинам с дальнейшей проверкой условий теоремы Чжуна. Заметим, что в отличие от традиционных доказательств предельных теорем с использованием метода Бернштейна, нами в процессе доказательства будут использоваться блоки разной длины.

Пусть

$$f(n)=[n^\alpha],\ g(n)=[n^\beta],\ \text{где}\ \frac{1}{2}<\beta<\alpha<1,\ [\cdot]\text{ — целая часть числа.}$$

Обозначим через $k(n)$ наибольшее целое число такое, что

$$\sum_{j=1}^{k(n)}f(j)+\sum_{j=1}^{k(n)}g(j)\leqslant n. \tag{3}$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *При любом $n \in N$ существуют константы $0 < c_1 < < c_2 < +\infty$ такие, что*

$$c_1 n^{\frac{1}{1+\alpha}} < k(n) < c_2 n^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Доказательство. Из определения функции $k(n)$ следует что

$$n < \sum_{j=1}^{k(n)+1} f(j) + \sum_{j=1}^{k(n)+1} g(j) < 2f(k(n)+1)K(n)+1 \leqslant a_1 k^{\alpha+1}(n),\ a_1 > 0,$$

т. о. $c_1 n^{\frac{1}{1+\alpha}} < k(n),\ c_1 > 0$.

Далее имеем

$$n > \sum_{j=1}^{k(n)} f(j) > \sum_{j > \frac{k(n)}{2}}^{k(n)} f(j) > a_2 k^{\alpha+1}(n),\ a_2 > 0.$$

Лемма 2. *При любом $n \in N$ имеют место следующие оценки:*

$$1 - \frac{\sum\limits_{j=1}^{k(n)} f(j)}{n} < C_3 n^{\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha}},\quad \frac{\sum\limits_{j=1}^{k(n)} g(j)}{n} < C_4 n^{\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha}}.$$

Доказательство. Имеем

$$n < \sum_{j=1}^{k(n)+1} f(j) + \sum_{j=1}^{k(n)+1} g(j).$$

Отсюда

$$\frac{n}{\sum\limits_{j=1}^{k(n)} f(j)} - 1 < \frac{f(k(n)+1)}{\sum\limits_{j=1}^{k(n)} f(j)} + \frac{\sum\limits_{j=1}^{k(n)} g(j)}{\sum\limits_{j=1}^{k(n)} f(j)} + \frac{g(k(n)+1)}{\sum\limits_{j=1}^{k(n)} f(j)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{f(k(n)+1)}{\sum\limits_{j > \frac{k(n)}{2}}^{k(n)} f(j)} + \frac{\sum\limits_{j=1}^{k(n)} g(j)}{\sum\limits_{j > \frac{k(n)}{2}}^{k(n)} f(j)} + \frac{g(k(n)+1)}{\sum\limits_{j > \frac{k(n)}{2}}^{k(n)} f(j)} \leqslant$$

$$\leqslant a_3 \frac{(k(n)+1)^{\alpha} + k(n)k^{\beta}(n) + (k(n)+1)^{\beta}}{\left(\frac{k(n)}{2}\right)^{\alpha} \frac{k(n)}{2}} < C_3 n^{\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha}},\ a_3 > 0,\ C_3 > 0.$$

Далее

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{k(n)} g(j)}{n} \leqslant a_4 \frac{k(n)k^{\beta}(n)}{n} < C_4 n^{\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha}},\ a_4 > 0,\ C_4 > 0.$$

Лемма 3. [7]. *В условиях теоремы 1*

$$s_n^2 = \sigma_0^2 n(1 + o(1)),\ n \to \infty.$$

Лемма 4. [8]. *В условиях теоремы 1*

$$s_n^2 = \sigma_0^2 n + O(n^{2/3}).$$

Лемма 5. [7]. *В условиях теоремы 1*

$$E|S_n|^3 \leqslant C_5 s_n^3, \quad C_5 > 0.$$

Лемма 6. [9]. *Пусть при некотором* $\nu \geqslant 2$

$$E|S_n|^\nu \leqslant C_6 n^{1/2\,\nu}, \quad C_6 > 0.$$

Тогда

$$E(\max_{1 < k < n} |S_k|)^\nu \leqslant C_6 n^{\nu/2}.$$

Лемма 7. [10]. *Пусть* ξ_t, $t \in Z^1$ — *стационарная случайная последовательность, удовлетворяющая условию* φ-*перемешивания, и* $L(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ — *некоторая ограниченная борелевская функция, т. е.* $L(x_1, x_2, \cdots, x_k) \leqslant M$. *Пусть далее* $F^{(1)}(x_1, x_2, \cdots, x_j)$ *и* $F^{(2)}(x_{j+1}, \cdots, x_k)$ — *функции распределения случайных векторов* $(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \cdots, \xi_{i_j})$ *и* $(\xi_{i_{j+1}}, \cdots, \xi_{i_k})$, *соответственно, где* $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. *Тогда*

$$|EL(\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_k}) - \int \cdots \int_{R^k} L(x_1, x_2, \cdots, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_k)\, dF^{(1)}(x_1, x_2, \cdots$$

$$\cdots, x_j) \times dF^{(2)}(x_{j+1}, \cdots, x_k)| \leqslant 2M\varphi(i_{j+1} - i_j).$$

Лемма 8. *Пусть* ξ *и* η — *случайные величины такие, что*

$$E\xi = E\eta = 0, \quad E\xi^2 < +\infty, \quad E\eta^2 < +\infty.$$

Тогда при любом $n \in N$, $n > 1$

$$|P(\xi + \eta < x) - P(\xi < x)| \leqslant C_7 E^{1/2}|\eta|^2 \ln n + \frac{C_8}{\ln n}, \quad C_7 > 0, \; C_8 > 0.$$

Доказательство. Для оценки выражения $|P(\xi + \eta < x) - P(\xi < x)|$ воспользуемся теоремой Эссеена (см. [11], стр. 137). Непосредственно здесь теорему Эссеена применить мы не можем, так как в последней имеется условие ограниченности производной функции распределения. Но мы поступим следующим образом. Пусть ζ_n — нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и дисперсией $1/n$. Тогда $\xi + \eta + \zeta_n$ будет иметь абсолютно непрерывное распределение с ограниченной плотностью (см. [7], § 2). Далее

$$|P(\xi + \eta < x) - P(\xi < x)| \leqslant |P(\xi + \eta + \zeta_n < x) - P(\xi < x)| +$$
$$+ |P(\xi + \eta + \zeta_n < x) - P(\xi + \eta < x)|.$$

Кроме того

$$|Ee^{it(\xi+\eta+\zeta_n)} - Ee^{it\xi}| \leqslant |t|\, E|\eta + \zeta_n| \leqslant$$
$$\leqslant |t|\, E^{1/2}|\eta + \zeta_n|^2 \leqslant |t|\,(E^{1/2}|\eta|^2 + E^{1/2}|\zeta_n|^2).$$

Применяя теорему Эссеена получим

$$|P(\xi + \eta + \zeta_n < x) - P(\xi < x)| \leqslant b \int_{-T}^{T} \frac{1}{|t|} |Ee^{it(\xi+\eta+\zeta_n)} - Ee^{it\xi}|\, dt +$$

$$+r(b)\frac{C^*}{T} \leqslant b\,(E^{1/2}|\eta|^2 + E^{1/2}|\zeta_n|^2)\cdot 2\,T + r(b)\frac{C^*}{T},$$

где C^*, b, $r(b)$ — константы, не зависящие от T. Аналогично

$$|P(\xi+\eta+\zeta_n<x) - P(\xi+\eta<x)| \leqslant 2\,b\,TE|\zeta_n| + r(b)\frac{C^*}{T}.$$

Полагая теперь, $T=\ln n$ и учитывая, что $E|\zeta_n|^2 = \frac{1}{n}$, завершаем доказательство леммы 8.

Обозначим $a(\nu)=\sum_{s=0}^{\nu} f(s)$, $b(\nu)=\sum_{s=0}^{\nu} g(s)$, и представим сумму $S_n=\sum_{l=1}^{n}\xi_l$ следующим образом

$$S_n = S_n' + S_n'',$$

где

$$S_n' = \sum_{\nu=1}^{k(n)} X_\nu,\quad X_\nu = \sum_{j=a(\nu-1)+b(\nu-1)}^{a(\nu)+b(\nu-1)} \xi_j,\quad \nu=1,2,\cdots,k(n),$$

$$S_n'' = \sum_{\nu=1}^{k(n)+1} Z_\nu,\quad Z_\nu = \sum_{j=a(\nu)+b(\nu-1)}^{a(\nu)+b(\nu)} \xi_j,\quad \nu=1,2,\cdots,k(n),$$

$$Z_{k(n)+1} = \sum_{j=a(k)+b(k)}^{n} \xi_j,\quad k=k(n).$$

Пусть

$$S_n^* = \max_{1\leqslant m\leqslant n}|S_m|,\quad S_n'^* = \max_{1\leqslant m\leqslant n}|S_m'|,\quad S_n''^* = \max_{1\leqslant m\leqslant n}|S_m''|.$$

Кроме того, введем в рассмотрение последовательность независимых случайных величин Y_ν, $\nu=1,2,\cdots,k(n)$, где Y_ν распределены так же как X_ν и пусть

$$\tilde S_n = \sum_{\nu=1}^{k(n)} Y_\nu,\quad \tilde s_n^2 = \sum_{\nu=1}^{k(n)} DY_\nu,\quad \tilde S_n^* = \max_{1\leqslant m\leqslant n}|\tilde S_m|.$$

Далее имеем

$$\left|P\left(\frac{S_n^*}{s_n}<x\right) - T(x)\right| \leqslant \left|P\left(\frac{S_n^*}{s_n}<x\right) - P\left(\frac{S_n'^*}{s_n}<x\right)\right| +$$

$$+\left|P\left(\frac{S_n'^*}{s_n}<x\right) - P\left(\frac{\tilde S_n^*}{s_n}<x\right)\right| + \left|P\left(\frac{\tilde S_n'^*}{s_n}<x\right) - T(x)\right| = A_1+A_2+A_3.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности

Поскольку

$$S_n'^* - S_n''^* \leqslant S_n^* \leqslant S_n'^* + S_n''^*,$$

то

$$A_1 \leqslant \max\left\{\left|P\left(\frac{S_n'^* - S_n''^*}{s_n}<x\right) - P\left(\frac{S_n'^*}{s_n}<x\right)\right|,\right.$$

$$\left.\left|P\left(\frac{S_n'^* + S_n''^*}{s_n}<x\right) - P\left(\frac{S_n'^*}{s_n}<x\right)\right|\right\}.$$

Согласно лемме 8

$$A_1 \leqslant C_7 E^{1/2}\left|\frac{S_n^{**}}{s_n}\right|^2 \ln n + \frac{C_8}{\ln n}.$$

Но так как

$$E|S_n'|^2 \leqslant E\left|\sum_{\nu=1}^{k(n)} Z_\nu\right|^2 + 2\sqrt{E\left|\sum_{\nu=1}^{k(n)} Z_\nu\right|^2 E|Z_{k(n)+1}|^2} + E|Z_{k(n)+1}|^2,$$

то, воспользовавшись леммами 6 и 2, имеем

$$E\left|\frac{S_n^{**}}{s_n}\right|^2 \leqslant C_9 n^{\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha}}. \tag{4}$$

Отсюда ясно, что $A_1 = O\left(\left(\frac{\lg\lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right)$.

Оценим A_2. Пусть $\tau(n) = [n^\mu]$, $0 < \mu < \frac{1}{2}$. Тогда можем написать

$$S_n' = Q_n' + Q_n'',$$

где

$$Q_n' = \sum_{\nu=1}^{\tau(n)} X_\nu,\quad Q_n'' = \sum_{\nu=\tau(n)+1}^{k(n)} X_\nu.$$

Аналогично

$$\tilde{S}_n = \tilde{Q}_n' + \tilde{Q}_n'',$$

где

$$\tilde{Q}_n' = \sum_{\nu=1}^{\tau(n)} Y_\nu,\quad \tilde{Q}_n'' = \sum_{\nu=\tau(n)+1}^{k(n)} Y_\nu.$$

Далее обозначим

$$Q_n''^* = \max_{\tau(n)+1<m<n} |Q_m''|,\quad \tilde{Q}_n''^* = \max_{\tau(n)+1<m<n} |\tilde{Q}_m''|.$$

Тогда

$$A_2 \leqslant \left|P\left(\frac{S_n'^*}{s_n} < x\right) - P\left(\frac{Q_n''^*}{s_n} < x\right)\right| +$$

$$+\left|P\left(\frac{Q_n''^*}{s_n} < x\right) - P\left(\frac{\tilde{Q}_n''^*}{s_n} < x\right)\right| + \left|P\left(\frac{\tilde{Q}_n''^*}{s_n} < x\right) - P\left(\frac{\tilde{S}_n^*}{s_n} < x\right)\right| =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Оценим I_1.

$$I_1 \leqslant \left|P\left(\frac{S_n'^*}{s_n} < x\right) - P\left(\frac{\max\limits_{\tau(n)+1<m<n} |S_m'|}{s_n} < x\right)\right| +$$

$$+\left|P\left(\frac{\max\limits_{\tau(n)+1<m<n} |S_m'|}{s_n} < x\right) - P\left(\frac{\max\limits_{\tau(n)+1<m<n} |Q_m''|}{s_n} < x\right)\right| = I_1' + I_1''.$$

$$I_1' = \left| P\left(\bigcup_{m=1}^{n} \left\{ \frac{|S_m'|}{s_n} > x \right\} \right) - P\left(\frac{\max\limits_{\tau(n)+1 \le m \le n} |S_m'|}{s_n} > x \right) \right| =$$

$$= \left| P\left(\left(\bigcup_{m=1}^{\tau(n)} \left\{ \frac{|S_m'|}{s_n} > x \right\} \right) \cup \left(\bigcup_{m=\tau(n)+1}^{n} \left\{ \frac{|S_m'|}{s_n} > x \right\} \right) \right) - \right.$$

$$\left. - P\left(\frac{\max\limits_{\tau(n)+1 \le m \le n} |S_m'|}{s_n} > x \right) \right| = \left| P\left(\bigcup_{m=\tau(n)+1}^{n} \left\{ \frac{|S_m'|}{s_n} > x \right\} \right) + \right.$$

$$+ P\left(\left(\overline{\bigcup_{m=\tau(n)+1}^{n} \left\{ \frac{|S_m'|}{s_n} > x \right\}} \right) \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\tau(n)} \left\{ \frac{|S_m'|}{s_n} > x \right\} \right) \right) -$$

$$\left. - P\left(\frac{\max\limits_{\tau(n)+1 \le m \le n} |S_m'|}{s_n} > x \right) \right| \leqslant P\left(\bigcup_{m=1}^{\tau(n)} \left\{ \frac{|S_m'|}{s_n} > x \right\} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\tau(n)} P\left(\frac{|S_m'|}{s_n} > x \right) \leqslant \frac{1}{x^2} \sum_{m=1}^{\tau(n)} E\left| \frac{S_m'}{s_n} \right|^2 \leqslant c_{10} \frac{1}{x^2} \sum_{m=1}^{\tau(n)} \frac{k^{\alpha+1}(m)}{n} \leqslant$$

$$\leqslant c_{10} \frac{1}{x^2} \frac{\tau(n)\, k^{\alpha+1}(\tau(n))}{n} \leqslant c_{11} \frac{n^{2\mu-1}}{x^2}.$$

Таким образом, при $x \geqslant \dfrac{1}{\ln n}$ имеем $I_1' = O\left(\left(\dfrac{\lg \lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right)$. Поскольку $S_m' = Q_m' + Q_m^{*}$, то точно так же, как и при выводе соотношения (4) можно показать, что

$$I_1' = O\left(\left(\frac{\lg \lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right).$$

Следовательно

$$I_1 = O\left(\left(\frac{\lg \lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right).$$

Совершенно аналогично показывается, что

$$I_3 = O\left(\left(\frac{\lg \lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right).$$

Оценим теперь I_2. Рассмотрим борелевскую функцию

$$L_n(x_{\tau(\tau(n)+1)+1}, \ldots, x_{k(n)}) = \begin{cases} 1, \text{ если } \dfrac{1}{s_n} \cdot \max\limits_{\tau(n)+1 \le m \le n} \left| \sum\limits_{\nu=\tau(m)+1}^{k(m)} x_\nu \right| < x \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда на основании леммы 7

$$I_2 = |EL_n(X_{\tau(\tau(n)+1)+1}, \ldots, X_{k(n)}) - EL_n(Y_{\tau(\tau(n)+1)+1}, \ldots, Y_{k(n)})| \leqslant$$

$$\leqslant c_{12} \sum_{j=\tau(\tau(n)+1)+1}^{k(n)} \varphi(g(j)) \leqslant c_{12} \sum_{j=\tau(\tau(n)+1)+1}^{\infty} \varphi(g(j)).$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(j) < +\infty, \text{ то } \varphi(j) < c_{13} \frac{1}{j^2}.$$

Отсюда

$$\sum_{j=\tau(\tau(n)+1)+1}^{\infty} \varphi(g(j)) < c_{13} \sum_{j=\tau(\tau(n)+1)+1}^{\infty} \frac{1}{g^2(j)} < c_{14} \frac{1}{(\tau(\tau(n)+1)+1)^{2\beta-1}} <$$

$$< c_{15}\, n^{(1-2\beta)\mu^2} \to 0,\ n \to \infty, \text{ так как } \beta > \frac{1}{2}\cdot \text{ Следовательно}$$

$$I_1 = O\left(\left(\frac{\lg\lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right).$$

Остается оценить A_3:

$$A_3 \leqslant \left| P\left(\frac{\tilde{S}_n^*}{\tilde{s}_n} < x\right) - T(x)\right| + \left| P\left(\frac{\tilde{S}_n^*}{\tilde{s}_n} < x\right) - P\left(\frac{\tilde{S}_n^*}{\bar{s}_n} < x\right)\right| = A_3' + A_3''.$$

Поскольку $\tilde{S}_n$ представляет собой нарастающую сумму независимых случайных величин Y_ν, $\nu = 1, 2, \cdots$, то для получения требуемой оценки для A_3' достаточно проверить справедливость условий теоремы Чжуна.

Воспользовавшись леммой 5, имеем

$$\frac{E|Y_\nu|^3}{E|Y_\nu|^2\left(\sum_{\nu=1}^{k(n)} E|Y_\nu|^2\right)^{\frac{1-\theta}{2}}} \leqslant \frac{C_{15}(E|Y_\nu|^2)^{3/2}}{E|Y_\nu|^2\left(\sum_{\nu=1}^{k(n)} E|Y_\nu|^2\right)^{\frac{1-\theta}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{16}(E|Y_\nu|^2)^{1/2}}{\left(\sum_{\nu=1}^{k(n)} f(\nu)\right)^{\frac{1-\theta}{2}}} \leqslant \frac{C_{17}\, k^{\alpha/2}(n)}{k^{\frac{1-\theta}{2}}(n)} =$$

$$= C_{18}\, n^{\frac{\alpha-1+\theta}{2(1+\alpha)}} \to 0,\ n \to \infty, \text{ при } \theta < 1-\alpha.$$

Отсюда $A_3' = O\left(\left(\dfrac{\lg\lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right)$.

Оценим теперь A_3''.

Воспользовавшись леммами 4 и 2 имеем

$$\left|Ee^{it\frac{\tilde{S}_n^*}{\tilde{s}_n}} - Ee^{it\frac{\tilde{S}_n^*}{\bar{s}_n}}\right| \leqslant |t|\left|\frac{1}{\tilde{s}_n} - \frac{1}{\bar{s}_n}\right| E|\tilde{S}_n^*| \leqslant$$

$$\leqslant |t|\frac{|\bar{s}_n - \tilde{s}_n|}{\tilde{s}_n} = |t|\frac{|\bar{s}_n^2 - \tilde{s}_n^2|}{\tilde{s}_n(\tilde{s}_n + \bar{s}_n)} =$$

$$= |t|\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{k(n)} E|Y_\nu|^2 - \sigma_0^2 n - O(n^{2/3})\right|}{\tilde{s}_n(\tilde{s}_n + \bar{s}_n)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{19}|t|\frac{\sigma_0^2\left|\sum_{\nu=1}^{k(n)} f(\nu) - n\right| + O\left(\sum_{\nu=1}^{k(n)} (f(\nu))^{2/3}\right) + O(n^{2/3})}{n} \leqslant$$

$$\leqslant C_{20}|t|\left(n^{\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha}}+n^{-\frac{\alpha}{8(1+\alpha)}}+n^{-\frac{1}{3}}\right)\to 0,\ n\to\infty.$$

Применяя теорему Эссеена, получим требуемую оценку, т. е.

$$A_3^{*}=O\left(\left(\frac{\lg\lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right).$$

Следовательно и $A_3=O\left(\left(\frac{\lg\lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right)$.

Из полученных оценок следует, что для $x\geqslant\frac{1}{\ln n}$

$$\sup_{x>\frac{1}{\ln n}}\left|P\left(\frac{S_n^{*}}{s_n}<x\right)-T(x)\right|=O\left(\left(\frac{\lg\lg s_n}{\lg s_n}\right)^{1/2}\right).$$

Для завершения доказательства теоремы 2 поступим следующим образом:

$$\sup_{0<x<+\infty}\left|P\left(\frac{S_n^{*}}{s_n}<x\right)-T(x)\right|\leqslant\sup_{0<x<\frac{1}{\ln n}}\left|P\left(\frac{S_n^{*}}{s_n}<x\right)-T(x)\right|+$$

$$+\sup_{x>\frac{1}{\ln n}}\left|P\left(\frac{S_n^{*}}{s_n}<x\right)-T(x)\right|\leqslant\sup_{0<x<\frac{1}{\ln n}}P\left(\frac{S_n^{*}}{s_n}<x\right)+$$

$$+\sup_{0<x<\frac{1}{\ln n}}T(x)+\sup_{x>\frac{1}{\ln n}}\left|P\left(\frac{S_n^{*}}{s_n}<x\right)-T(x)\right|.$$

Далее, используя оценку скорости сходимости в центральной предельной теореме, полученную в [12] (см. доказательство теоремы 2, формула 23), можем написать

$$\sup_{0<x<\frac{1}{\ln n}}P\left(\frac{S_n^{*}}{s_n}<x\right)\leqslant\sup_{0<x<\frac{1}{\ln n}}P\left(\frac{|S_n|}{s_n}<x\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|P\left(\frac{S_n}{s_n}<x\right)-\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right|+2\sup_{0<x<\frac{1}{\ln n}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du=$$

$$=O\left(\frac{1}{\ln^{5/4}n}\right)+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)=O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

Далее, поскольку ([3], стр. 221)

$$T(x)\leqslant\frac{4}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi^2}{8x^2}\right),$$

имеем

$$\sup_{0<x<\frac{1}{\ln n}}T(x)\leqslant T\left(\frac{1}{\ln n}\right)\leqslant\frac{4}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi^2}{8}\ln^2 n\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{\pi}\exp(-\ln n)=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\ln n}=O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 1 вытекает из теоремы 2. Доказательство этого факта проводится точно так же, как и для случая независимых случайных величин (см. [3]).

Ереванский государственный
университет

Поступила 7.V,1988

Տ. Պ. ՂԱԶԱՆՉՅԱՆ. Չունի կրկնակի լոգարիթմի օրենքի իրագործման թույլ կախյալ պատահական հաջորդականությունների համար *(ամփոփում)*

Չունի կրկնակի լոգարիթմի օրենքի իրագործման թույլ կախյալ պատահական հաջորդականությունների համար ստացված են բավարար պայմաններ։

T. P. KAZANCHIAN. *The Chung law of iterated logarithm for weakly dependent random sequences* (summary)

Some sufficient conditions for validity of Chung law of iterated logarithm for weakly dependent random sequences are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P. Erdős and M. Kac.* On certain limit theorems of the theory of probability. Bull. Amer. Math. Soc., v. 52, 1946, 292—302.
2. *Ю. В. Прохоров.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероят. и ее примен., 1, вып. 2, 1956, 177—238.
3. *K. L. Chung.* Sequences of independent random variables, Trans. Amer. Math. Soc., v. 64, 1948, 205—233.
4. *N. C. Jain, K. Jogdeo, W. F. Stout.* Upper and lower functions for martingales and mixing processes, Ann. Probab., v. 3, № 1, 1975, 119—145.
5. *S. Kanagawa.* Rates of convergence in the Erdős—Kac type invariance principle for weakly dependent random variables, Yokohama Math. J., v. 31, № 1, 2, 121—129.
6. *Т. П. Казанчян.* Закон повторного логарифма в форме Чжуна для m-зависимых случайных величин, Уч. зап. ЕГУ, 2, 1984, 22—29.
7. *И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник.* Независимые и стационарно связанные величины, М., «Наука», 1965.
8. *W. Philipp, F. Stant.* Almost sure invariance principles for partial sums of weayk ly dependent random variables, Mem. Amer. Math. Soc., 161.
9. *R. J. Serfling* Moment inequalities for the maximum cumulative sum, Ann. Math. Statist., 41, 1970, 1227—1234.
10. *K. Yoshihara.* Probability inequalities for sums of absolutely regular processes and their applications, Z. Wahrscheinlirhkeitstheorie verw. Gebicte, 43, 1979, 319—329.
11. *В. В. Петров.* Суммы независимых случайных величин, М., «Наука», 1972.
12. *H. Oodaira, K. Yoshihara.* The law of the iterated logarithm for stationary processes saitsfying nixing conditions' Kodai Math. sem. rep., 23, 1971, 311—334.