ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 6, 1989 Математика

УДК 517.98

Ф. Э. МЕЛИК-АДАМЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КАНОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В работе рассматриваются уравнения и операторы, порожденные дифференциальным выражением*

$$(\mathrm{D}x)(r) = W^*(r)\, J \frac{d}{dr}(W(r)\, x(r)),\ (r \in R_+ := [0,\ \infty)), \tag{0.1}$$

где J—$(2n \times 2n)$-матрица со свойствами: $J^* = -J$; $J^* = -I_{2n}$, а $W(r)$—непрерывная $(2n \times 2n)$-матрица-функция, J-унитарная при каждом $r \in R_+$: $W^*(r)\, J\, W(r) = W(r)\, J\, W^*(r) = J$.

Исследования таких уравнений и операторов определенным образом связаны с задачами продолжений, рассмотренных в работах [1, 2]. В основном мы будем придерживаться обозначений этих работ.

Рассмотрим матрицу J как оператор в комплексном $2n$-мерном пространстве C^{2n}. Тогда $J = iP_+ - iP_-$, где $P_\pm = \frac{1}{2}(I_{2n} \pm iJ)$ суть ортопроекторы на собственные подпространства $H_\pm = P_\pm \mathrm{C}^{2n}$ оператора J, отвечающие собственным значениям $\pm i$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $\dim H_\pm = n$, и будем отождествлять подпространства $H_\pm$ с C^n.

Операторы, действующие в C^{2n}, часто будем задавать их блочно-матричными представлениями в разложении $\mathrm{C}^{2n} = H_+ \oplus H_-$. Так, например

$$J = \begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix},\ \exp(\lambda t J) = \begin{bmatrix} \exp(-i\lambda t)\, I_n & 0 \\ 0 & \exp(i\lambda t)\, I_n \end{bmatrix}.$$

Дифференциальное выражение (0.1) в том частном случае, когда M-функция $W(r)$ абсолютно непрерывна, совпадает с выражением вида

$$(\mathrm{D}_V x)(r) = J \frac{dx(r)}{dr} - V(r)\, x(r), \tag{0.2}$$

где „потенциал" $V(r)$ определяется равенством $V(r) = W^*(r)\, J \frac{dW(r)}{dr}$. M-функция $V(r)$ суммируема на полуоси R_+ и принимает эрмитовы значения. Последнее является следствием J-унитарности $W(r)$:

---

* Дифференциальное выражение (0.1) в дальнейшем мы будем называть каноническим.

$$V(r) - V^*(r) = W^*(r) J \frac{dW(r)}{dr} + \frac{dW^*(r)}{dr} J W(r) =$$

$$= \frac{d}{dr}(W^*(r) J W(r)) = 0.$$

Обратно, выражение (0.2) с указанным потенциалом $V(r)$ ($V(r) = V^*(r)$; $V \in L^1_{2n \times 2n}(R_+)$) всегда можно представить в виде (0.1) с абсолютно непрерывной J-унитарной $м$-функцией $W(r)$, определенной из уравнения $\frac{dW(r)}{dr} = -W(r) J V(r)$ при том или ином J-унитарном условии Коши.

С дифференциальным выражением вида (0.1), точнее с задачей Коши вида

$$W^*(r) J \frac{d}{dr}(W(r) U(r, \lambda)) = \lambda U(r, \lambda); \; U^*(r_0, \lambda) J U(r_0, \lambda) = J \; (r_0 \in R_+) \tag{0.3}$$

тесно связано матричное соотношение вида

$$\frac{d}{dr}(U^*(r, \mu) J U(r, \lambda)) = (\lambda - \mu) U^*(r, \mu) U(r, \lambda);$$

$$U^*(r_0, \lambda) J U(r_0, \lambda) = J \begin{pmatrix} r_0 \in R_+ \\ \lambda, \; \mu \in R \end{pmatrix}. \tag{0.4}$$

Действительно, если $м$-функция $U(r, \lambda)$ ($\lambda \in R$) удовлетворяет задаче (0.3), то легко проверить, что она удовлетворяет соотношению (0.4). Обратно, если $U(r, \lambda)$ удовлетворяет соотношению (0.4), то она удовлетворяет задаче Коши (0.3) при $W(r) = U^*(r, 0) J$.

§ 1. Класс K канонических дифференциальных выражений

Определение 1.1 Через K_Γ обозначим класс $(2n \times 2n)$-матриц-функций $\Gamma_\Delta(t)$ ($t \in R_+$), обладающих свойствами:

1) $\Gamma_\Delta(t)$—суммируемая на полуоси R_+ $м$-функция, принимающая эрмитовы и J-эрмитовы значения:

a) $\Gamma_\Delta \in L^1_{2n \times 2n}(R_+)$; b) $\Gamma_\Delta(t) = \Gamma^*_\Delta(t)$; c) $\Gamma_\Delta(t) J = -J \Gamma_\Delta(t)$; (1.1)

2) ганкелев оператор Γ_Δ, определяемый формулой

$$(\Gamma_\Delta f)(t) = \int_0^\infty \Gamma_\Delta(t+s) f(s) \, ds, \tag{1.2}$$

является в пространстве $L^2_{2n \times 1}(R_+)$ сжимающим оператором: $\|\Gamma_\Delta\|_2 < 1$.

Условие $\Gamma_\Delta \in K_\Gamma$ можно выразить еще в виде

$$1) \; \Gamma_\Delta(t) = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma^*(t) \\ \Gamma(t) & 0 \end{bmatrix}, \; 2) \; \Gamma \in L^1_{n \times n}(R_+), \; 3) \; \|\Gamma\|_2 < 1. \tag{1.3}$$

Легко проверить следующие свойства ганкелевых операторов Γ_Δ и Γ.

1° Оператор $\Gamma_\Delta(\Gamma)$ является вполне непрерывным в каждом из пространств $L^p_{2n\times 1}(R_+)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ и $AC_{2n\times 1}(R_+)$*.

2° Собственные числа (s-числа) и отвечающие им собственные подпространства (подпространства пар Шмидта) оператора $\Gamma_\Delta(\Gamma)$ одни и тех же во всех пространствах $L^p_{2n\times 1}(R_+)(1\leq p\leq\infty)$ и $AC_{2n\times 1}(R_+)$.

3° Спектр $\sigma(\Gamma_\Delta)$ оператора Γ_Δ симметричен относительно нуля и $\sigma(\Gamma_\Delta)\cap R_+\setminus\{0\}$ совпадают с множеством s-чисел оператора Γ.

Определение 1.2. Через $\mathbf{K}_U$ обозначим класс $(2n\times 2n)$-матриц-функций $U(\lambda)$ $(\lambda\in R)$, обладающих свойствами:

1) $U(\lambda)$ — J-унитарная м-функция, допускающая представление

$$U(\lambda) = I_{2n} + \int_0^\infty K(t)\exp(-\lambda t J)\,dt, \quad \text{где} \quad K\in L^1_{2n\times 2n}(R_+); \tag{1.4}$$

2) блоки $U_{11}(\lambda)$ и $U_{22}(\lambda)$ в блочно-матричном представлении м-функции $U(\lambda)$ $(U(\lambda)=\|U_{jk}(\lambda)\|^2_{j,k=1})$ обратимы при $\operatorname{Im}\lambda\leq 0$ и $\operatorname{Im}\lambda\geq 0$ соответственно и, следовательно, $U_{11}^{\pm 1}\in W^-_{n\times n}$, $U_{22}^{\pm 1}\in W^+_{n\times n}$**.

Теорема 1. *Между множествами* $\mathbf{K}_\Gamma$ *и* $\mathbf{K}_U$ *существует* (1.1)-*значное соответствие. А именно:*

а) *если* $\Gamma_\Delta\in\mathbf{K}_\Gamma$, *то уравнение*

$$K(t) - \int_0^\infty K(s)\,\Gamma_\Delta(s+t)\,ds = \Gamma_\Delta(t) \quad (t\in R_+) \tag{1.5а}$$

имеет единственное решение $K\in L^1_{2n\times 2n}(R_+)$ *и тогда по формуле* (1.4) *определяется м-функция* $U(\lambda)$ *из класса* $\mathbf{K}_\Gamma$;

в) *если* $U\in\mathbf{K}_U$ *и* $K(t)$ *есть м-функция из представления* (1.4), *то уравнение*

$$\Gamma_\Delta(t) + \int_t^\infty K(s-t)\,\Gamma_\Delta(s)\,ds = K(t) \quad (t\in R_+) \tag{1.5в}$$

имеет единственное решение Γ_Δ *из класса* $\mathbf{K}_\Gamma$.

Доказательство. Утверждение а) с заменой $U(\lambda)$ на $U^*(\lambda)$ доказано в [1] (см. лемма 1.1 и теорема 2.1). Докажем утверждение в). Пусть задана м-функция $U\in\mathbf{K}_U$:

---

* Через $AC_{2n+1}(R_+)$ обозначено пространство абсолютно непрерывных на полуоси R_+ $2n$-мерных вектор-функций $f(r)$ с нормой

$$\|f\| = \max_{r\in R_+}|f(r)| + \int_0^\infty |f'(r)|\,dr.$$

** Через $W^\pm_{n\times n}$ обозначены классы $(n\times n)$-матриц-функций, элементы которых принадлежат винеровским алгебрам $W^\pm$.

$$U(\lambda)=\begin{bmatrix} I_n+\int\limits_0^\infty K_{11}(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt & \int\limits_0^\infty K_{12}(t)\,e^{i\lambda t}\,dt \\ \int\limits_0^\infty K_{21}(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt & I+\int\limits_0^\infty K_{22}(t)\,e^{i\lambda t}\,dt \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$U_{11}^{\pm 1}(\lambda)=\Big(I_n+\int\limits_0^\infty K_{11}(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\Big)^{\pm 1}\in W_{n\times n}^{-};$$

$$U_{22}^{\pm 1}(\lambda)=\Big(I_n+\int\limits_0^\infty K_{22}(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\Big)^{\pm 1}\in W_{n\times n}^{+}.$$

Рассмотрим уравнения

$$\Gamma_1(t)+\int\limits_t^\infty K_{22}(s-t)\,\Gamma_1(s)\,ds=K_{21}(t), \tag{1.6$_1$}$$

$$\Gamma_2(t)+\int\limits_t^\infty K_{11}(s-t)\,\Gamma_2(s)\,ds=K_{12}(t). \tag{1.6$_2$}$$

Символами для них служат м-функции $U_{22}(\lambda)$ и $U_{11}(\lambda)$, имеющие нулевые индексы.* Поэтому, на основании общих теорем из [3] (теоремы 21 и 91) можем утверждать, что уравнение (1.6$_1$) и (1.6$_2$) однозначно разрешимы в классе $L^1_{n\times n}(R_+)$. Покажем, что $\Gamma_1^*(t)=\Gamma_2(t)$. Положим $U_0(t,\lambda)=\exp(-i\lambda tJ)$ и заметим, что J-унитарность м-функции $U(\lambda)$ равносильна тождеству

$$\int\limits_0^\infty K(t)\,U_0(t,\lambda)\,J\,dt+\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K(t+s)\,U_0(t,\lambda)\,J\,K^*(s)\,ds\,dt=$$

$$=-\int\limits_0^\infty J\,U_0^*(t,\lambda)\,K^*(t)\,dt-\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K(t)\,U_0^*(s,\lambda)\,J\,K^*(t+s)\,dt\,ds. \tag{1.7}$$

В. самом деле, имеем

$$\int\limits_0^\infty K(t)\,U_0(t,\lambda)\,dt\,J\int\limits_0^\infty U_0^*(t,\lambda)\,K^*(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^t K(t)\,U_0(t-s,\lambda)\,J\,K^*(s)\,ds\,dt+$$

---

* Определение правых (левых) частных индексов см. в [3].

$$+\int_0^\infty\int_t^\infty K(t)\,U_0(t-s,\lambda)\,JK^*(s)\,ds\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\int_s^\infty K(t)\,U_0(t-s,\lambda)\,JK^*(s)\,dt\,ds+$$

$$+\int_0^\infty\int_t^\infty K(t)\,U_0(t-s,\lambda)\,JK^*(s)\,ds\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty K(t+s)\,U_0(t,\lambda)\,JK^*(s)\,dt\,ds+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty K(t)\,U_0^*(s,\lambda)\,JK^*(t+s)\,ds\,dt.$$

и, следовательно, соотношение

$$\left(I_{2n}+\int_0^\infty K(t)\,U_0(t,\lambda)\,dt\right)J\left(I_{2n}+\int_0^\infty K(t)\,U_0(t,\lambda)\,dt\right)^*=J$$

равносильно тождеству (1.7).

Из (1.7) получаем в частности

$$K_{12}(t)+\int_0^\infty K_{12}(t+s)\,K_{22}^*(s)\,ds=K_{21}^*(t)+\int_0^\infty K_{11}(s)\,K_{21}^*(t+s)\,ds, \quad (1.7_1)$$

$$K_{11}(t)+\int_0^\infty K_{11}(t+s)\,K_{11}^*(s)=\int_0^\infty K_{12}(s)\,K_{12}^*(t+s)\,ds. \quad (1.7_2)$$

Подставив в (1.7_1) значение K_{21}^* и K_{12} из (1.6_1) и (1.6_2), получим

$$\left(\Gamma_2(t)+\int_0^\infty K_{11}(s)\,\Gamma_2(t+s)\,ds\right)+$$

$$+\int_0^\infty\left(\Gamma_2(t+s)+\int_0^\infty K_{11}(u)\,\Gamma_2(t+s+u)\,du\right)K_{22}^*(s)\,ds=$$

$$=\left(\Gamma_1(t)+\int_0^\infty K_{22}(s)\,\Gamma_1(t+s)\,ds\right)^*+$$

$$+\int_0^\infty K_{11}(s)\left(\Gamma_1(t+s)+\int_0^\infty K_{22}(u)\,\Gamma_1(t+s+u)\,du\right)^*ds=$$

$$=\left(\Gamma_1^*(t)+\int_0^\infty K_{11}(s)\,\Gamma_1^*(t+s)\,ds\right)+$$

$$+\int_0^\infty\left(\Gamma_1^*(t+s)+\int_0^\infty K_{11}(u)\,\Gamma_1^*(t+s+u)\,du\right)K_{21}^*(s)\,ds.$$

Это в силу единственности решений уравнений (1.6_1) и (1.6_2) означает, что $\Gamma_1^*(t)=\Gamma_2(t)$.

Покажем теперь, что *м*-функция $\Gamma_\Delta(t)$, определенная формулой

$$\Gamma_\Delta(t)=\begin{bmatrix}0 & \Gamma_1^*(t)\\ \Gamma_1(t) & 0\end{bmatrix},$$

удовлетворяет уравнению (1.5в).
Для этого достаточно проверить справедливость равенств

$$K_{11}(t)=\int_0^\infty K_{12}(s)\,\Gamma_1(t+s)\,ds;\quad K_{22}(t)=\int_0^\infty K_{21}(s)\,\Gamma_1^*(t+s)\,ds.$$

Положим

$$\Phi(t)=\int_0^\infty K_{12}(s)\,\Gamma_1(t+s)\,ds.$$

В силу (1.6_1) и (1.7_2) имеем

$$\Phi(t)=\int_0^\infty K_{12}(s)\left(K_{12}^*(t+s)-\int_0^\infty\Gamma_1(t+s+u)\,K_{11}^*(u)\,du\right)ds=$$

$$=\int_0^\infty K_{12}(s)\,K_{12}^*(t+s)\,ds-\int_0^\infty\int_0^\infty K_{12}(s)\,\Gamma_1(t+s+u)\,K_{11}^*(u)\,du\,ds=$$

$$=K_{11}(t)+\int_0^\infty K_{11}(t+s)\,K_{11}^*(s)\,ds-\int_0^\infty\int_0^\infty K_{12}(s)\,\Gamma_1(t+s+u)\,K_{11}^*(u)\,du\,ds=$$

$$=K_{11}(t)+\int_0^\infty\left(K_{11}(t+s)-\int_0^\infty K_{12}(u)\,\Gamma_1(t+s+u)\,du\right)K_{11}^*(s)\,ds=$$

$$=K_{11}(t)+\int_0^\infty\left(K_{11}(t+s)-\Phi(t+s)\right)K_{11}^*(s)\,ds.$$

Отсюда

$$(K_{11}(t)-\Phi(t))+\int_0^\infty\left(K_{11}(t+s)-\Phi(t+s)\right)K_{11}^*(s)\,ds=0.$$

Это в силу единственности решения уравнения (1.6_1) дает $K_{11}(t) = \Phi(t)$. Второе равенство доказывается аналогично.

Остается доказать, что $\|\Gamma_\Delta\| < 1$. Введем для этого м-функцию $S_0(\lambda) = U_{22}^{-1}(\lambda) U_{21}(\lambda)$. Ясно, что она представима в виде

$$S_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\Gamma}(t) e^{-i\lambda t} dt \quad (\widetilde{\Gamma} \in L^1_{n\times n}(R)).$$

Легко проверить, что в этом представлении м-функция $\widetilde{\Gamma}(t)$ при $t>0$ совпадает с $\Gamma_1(t)$. Используя тождество $U_{22}(\lambda) U_{22}^*(\lambda) - U_{21}(\lambda) U_{21}^*(\lambda) = I_n$, являющееся одним из следствий J-унитарности $U(\lambda)$, получаем

$$I_n - S_0(\lambda) S_0^*(\lambda) = U_{22}^{-1}(\lambda)[U_{22}(\lambda) U_{22}^*(\lambda) -$$

$$- U_{21}(\lambda) U_{21}^*(\lambda)] U_{22}^{*^{-1}}(\lambda) = U_{22}^{-1}(\lambda) U_{22}^{*^{-1}}(\lambda) \gg 0.$$

Отсюда, учитывая, что $S_0(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, имеем $|S_0(\lambda)| \leqslant q < 1$.

Рассмотрим отображение

$$(\mathbf{S}_0 \widetilde{f})(\lambda) = S_0(\lambda) \widetilde{f}(\lambda),$$

$$\text{где } \widetilde{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt \quad (f \in L^1_{n\times 1}(R_+) \cap L^2_{n\times 1}(R_+)).$$

Легко проверить, что

$$(S_0 \widehat{f})(\lambda) = \int_0^{\infty} (\Gamma f)(t) e^{-i\lambda t} dt + \widehat{\Psi}(\lambda),$$

где $\widehat{\Psi} \in H^2_{n\times 1}$, а Γ — ганкелев оперотор, порожденный м-функцией $\Gamma_1(t)$.

Отсюда получаем, что $\|\Gamma f\|^2 \leqslant \|S_0 \widehat{f}\|^2 \leqslant q^2 \|\widehat{f}\|^2 = q^2 \|f\|^2$. Таким образом получаем $\|\Gamma\| \leqslant q < 1$, которое равносильно неравенству $\|\Gamma_\Delta\| \leqslant q < 1$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Произвольную м-функцию $U(\lambda)$ из K_U можно рассматривать как значение в точке $r=0$ некоторой м-функции $U(r, \lambda)$, являющейся решением уравнения* (0.3) *и имеющей на бесконечности асимптотику*

$$U(r, \lambda) = U_0(r, \lambda) + o(1) \text{ при } r \to \infty. \tag{1.8}$$

При этом м-функция $W(r)$, определяющая это уравнение, начиная с некоторого r_0 $(r_0 > 0)$ представляется в виде:

$$W(r) = I_{2n} + \int_r^{\infty} G(t) dt \quad (r_0 < r < \infty;\ G \in L^1_{2n\times 2n}(r_0, \infty)). \tag{1.9}$$

Доказательство. Вместе с заданной м-функцией $U \in K_U$ рассмотрим соответствующую ей м-функцию $\Gamma_\Delta \in K_\Gamma$. Мы покажем, что для произвольного $r \in R_+$ можно определить м-функцию $K(r, t)$ из уравнения

$$K(r, t) - \int_r^\infty K(r, s)\Gamma_\Delta(t+s)\,ds = \Gamma_\Delta(t+r)\,(0 \leqslant r < t < \infty) \quad (1.10)$$

и положив

$$U(r, \lambda) = U_0(r, \lambda) + \int_r^\infty K(r, t)\,U_0(t, \lambda)\,dt, \quad (1.11)$$

получить искомую $м$-функцию $U(r, \lambda)$.

В пространстве $L^2_{2n\times 1}(r, \infty)$ рассмотрим ганкелевы операторы $\Gamma_{\Delta, r}$:

$$(\Gamma_{\Delta, r} f)(t) = \int_r^\infty \Gamma_\Delta(t+s) f(s)\,ds \quad (0 \leqslant r \leqslant t < \infty).$$

Операторы $\Gamma_{\Delta, r}$ можно представить в виде $\Gamma_{\Delta, r} = P_r \Gamma_\Delta P_r$, где P_r — операторы ортогонального проектирования $L^2_{2n\times 1}(R_+)$ на $L^2_{2n\times 1}(r, \infty)$. Поэтому $\|\Gamma_{\Delta, r}\|_2 \leqslant \|\Gamma_\Delta\|_2 \leqslant q < 1$.

В силу свойств $1^\circ - 3^\circ$ ганкелевых операторов можно утверждать, что спектральный радиус $\rho(\Gamma_{\Delta, r})$ оператора $\Gamma_{\Delta, r}$ в пространстве $L^1_{2n\times 1}(r, \infty)$ удовлетворяет неравенству: $\rho(\Gamma_{\Delta, r}) \leqslant \|\Gamma_{\Delta, r}\|_2 \leqslant q < 1$. Поэтому при каждом фиксированном $r \in R_+$ уравнение (1.10) имеет единственное решение $K(r, t)$ из класса $L^1_{2n\times 2n}(r, \infty)$. Более того, это решение представимо в виде ряда:

$$K(r, t) = \sum_{n=0}^\infty K_n(r, t),$$

где $K_0(r, t) = \Gamma_\Delta(r+t)$, $K_n(r, t) = \int_r^\infty K_{n-1}(r, s)\,\Gamma_\Delta(s+t)\,ds \; (n \geqslant 1)$.

Ряд этот сходится по t в метрике пространства $L^1_{2n\times 2n}(r, \infty)$ равномерно по $r \in R_+$. Действительно, так как $K_n(r, t) = \Gamma^n_{\Delta, r}\Gamma_\Delta(r+t)$ и $\rho(\Gamma_{\Delta, r}) \leqslant q < 1$, то начиная с некоторого n_0 справедливо неравенство

$$\int_r^\infty |K_n(r, t)|\,dt = \int_r^\infty |\Gamma^n_{\Delta, r}\Gamma(r+t)|\,dt \leqslant C\,\|\Gamma^n_{\Delta, r}\|_1 \leqslant Cq^n \; (n > n_0).$$

Для $м$-функции $U(r, \lambda)$, введенной по формуле (1.11), имеем $U(r, \lambda) = \sum_{n=0}^\infty U_n(r, \lambda)$, где $U_n(r, \lambda) = \int_r^\infty K_{n-1}(r, t)\,U_0(t, \lambda)\,dt$ и следовательно $|U_n(r, \lambda)| \leqslant Cq^{n-1}$. M-функции $K_{n-1}(r, t)$ и $U_n(r, \lambda)$ представим в развернутом виде:

$$K_{n-1}(r, t) = \underbrace{\int_r^\infty \cdots \int_r^\infty}_{n-1} \Gamma_\Delta(r+s_1)\,\Gamma_\Delta(s_1+s_2)\cdots\Gamma_\Delta(s_{n-1}+t)\,ds_1\,ds_2\cdots ds_{n-1},$$

$$U_n(r, \lambda) = \underbrace{\int_r^{\infty} \cdots \int_r^{\infty}}_{n} \Gamma_\Delta(r + s_1)\ \Gamma_\Delta(s_1 + s_2) \cdots$$

$$\cdots \Gamma_\Delta(s_{n-1} + t)\ U_0(t, \lambda)\ ds_1\ ds_2 \cdots ds_{n-1}\ dt.$$

Введя новые переменные: $\tau_1 = r + s_1$, $\tau_2 = s_1 + s_2, \cdots$, $\tau_{n-1} = s_{n-2} + s_{n-1}$, $\tau_n = s_{n-1} + t \left(s_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \tau_j + (-1)^k\ r\ (k = 1, 2, \cdots, n-1);\ t = = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \tau_j + (-1)^n r\right)$, получим

$$K_{n-1}(r, t) = \int_{2r}^{\infty} \Gamma_\Delta(\tau_1) \int_{\tau_1}^{\infty} \Gamma_\Delta(\tau_2) \int_{\tau_2 - \tau_1 + 2r}^{\infty} \Gamma_\Delta(\tau_3) \cdots$$

$$\cdots \int_{\sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-2-j} \tau_j + (-1)^{n-2} r + r}^{\infty} \Gamma_\Delta(\tau_{n-1})\ \Gamma_\Delta\Bigg(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-1-j} \tau_j +$$

$$+ (-1)^{n-1} r + t\Bigg) d\tau_1\ d\tau_2 \cdots d\tau_{n-1}, \qquad (1.12)$$

$$U_n(r, \lambda) = \int_{2r}^{\infty} \Gamma_\Delta(\tau_1) \int_{\tau_1}^{\infty} \Gamma_\Delta(\tau_2) \int_{\tau_2 - \tau_1 + 2r}^{\infty} \Gamma_\Delta(\tau_3) \cdots$$

$$\cdots \int_{\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-1-j} \tau_j + (-1)^{n-1} r + r}^{\infty} \Gamma_\Delta(\tau_n)\ U_0\Bigg(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \tau_j +$$

$$+ (-1)^n r\Bigg) d\tau_1\ d\tau_2 \cdots d\tau_n. \qquad (1.13)$$

Из (1.12) следует, что при четных n имеют смысл $\mathcal{M}$-функция $K_n(r, r)$ и выполняются неравенства

$$\int_{r_0}^{\infty} |K_{2n}(r, r)|\ dr \leqslant \left(\int_{r_0}^{\infty} |\Gamma_\Delta(t)|\ dt\right)^{2n+1} \quad (0 \leqslant r_0 < \infty). \qquad (1.14)$$

Следовательно, $K_{2n}(r, r)$ является суммируемой $\mathcal{M}$-функцией на полуоси R_+.

Из (1.13) следует дифференцируемость $\mathcal{M}$-функции $U_n(r, \lambda)$ по r и формула

$$J \frac{d}{dr} U_n(r, \lambda) = \lambda\ U_n(r, \lambda) - 2J \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]^*} K_{2j}(r, r)\ U_{n-1-2j}(r, \lambda). \qquad (1.15)$$

---

* Через $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ обозначена целая часть числа $\frac{n-1}{2}$.

Рассмотрим теперь выражение

$$U^*(r,\mu)\,JU(r,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n^*(r,\mu)\,J\sum_{k=0}^{\infty}U_k(r,\lambda)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}U_{n-k}^*(r,\mu)\,JU_k(r,\lambda).$$

Воспользовавшись формулой (1.15) и учитывая, что $JK_{2j}(r,r)=-$ $-K_{2j}(r,r)\,J$, получим

$$\frac{d}{dr}\sum_{k=0}^{n}U_{n-k}^*(r,\mu)\,JU_k(r,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\frac{d}{dr}(U_{n-k}^*(r,\mu)\,J)\,U_k(r,\lambda)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}U_{n-k}^*(r,\mu)\frac{d}{dr}(JU_k(r,\lambda))=$$

$$=-\sum_{k=0}^{n}\left(\mu\,U_{n-k}(r,\mu)-2J\sum_{\substack{j=0\\k\neq n}}^{\left[\frac{n-k-1}{2}\right]}K_{2j}(r,r)\,U_{n-k-1-2j}(r,\mu)\right)^*U_k(r,\lambda)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}U_{n-k}^*(r,\mu)\left(\lambda\,U_k(r,\lambda)-2J\sum_{\substack{j=0\\k\neq 0}}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}K_{2j}(r,r)\,U_{k-1-2j}(r,\lambda)\right)=$$

$$=(\lambda-\mu)\sum_{k=0}^{n}U_{n-k}^*(r,\mu)\,U_k(r,\lambda)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}U_{n-k-2j}^*(r,\mu)\,2JK_{2j}(r,r)\,U_k(r,\lambda)-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}U_{n-k}^*(r,\mu)\,2JK_{2j}(r,r)\,U_{k-1-2j}(r,\lambda).$$

С другой стороны, поскольку $\sum\limits_{k=0}^{n}U_{n-k}^*(r,\mu)\,JU_k(r,\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{n}U_k^*(r,\mu)\times$ $JU_{n-k}(r,\lambda)$, аналогичным образом получаем также равенство

$$\frac{d}{dr}\sum_{p=0}^{n}U_p^*(r,\mu)\,J\,U_{n-p}(r,\lambda)=(\lambda-\mu)\sum_{p=0}^{n}U_p^*(r,\mu)\,U_{n-p}(r,\lambda)+$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}U_{p-1-2j}^*(r,\mu)\,2JK_{2j}(r,r)\,U_{n-p}(r,\lambda)-$$

$$-\sum_{p=1}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-p}{2}\right]}U_p^*(r,\mu)\,2JK_{2j}(r,r)\,U_{n-p-2j}(r,\lambda).$$

Подставляя в последнее равенство $p=n-k-1$ и сравнивая полученное с предыдущим равенством, можем утверждать, что

$$\frac{d}{dr}\sum_{k=0}^{n}U_{n-k}^*(r,\mu)\,JU_k(r,\lambda)=(\lambda-\mu)\sum_{k=0}^{n}U_{n-k}^*(r,\mu)\,U_k(r,\lambda).$$

Таким образом, для м-функции $U(r, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(r, \lambda)$ получаем тождество (0,4)

Для завершения доказательства теоремы остается доказать представление (1.9) для м-функции $W(r) = U^*(r, 0)\, J$. Заметим для этого, что в силу неравенства (1.14) ряд $\sum_{j=0}^{\infty} K_{2j}(r, r)$ при некотором $r_0 \geqslant 0$ абсолютно сходится в метрике пространства $L^1_{2n\times 2n}(r_0, \infty)$. Поэтому суммируя почленно равенства (1.15) получим

$$J \frac{d}{dr} U(r, \lambda) = \lambda U(r, \lambda) - 2J \sum_{j=0}^{\infty} K_{2j}(r, r)\, U(r, \lambda).$$

Это означает, что дифференциальное выражение вида (0.1), порожденное м-функцией $U(\lambda)$ из $\mathbf{K}_U$, при $r \geqslant r_0$ принимает вид (0.2), где $V(r) = -2J \sum_{j=0}^{\infty} K_{2j}(r, r)$ является эрмитовой и J-эрмитовой м-функцией, суммируемой в интервале $[r_0, \infty)$:

$$1)\ V \in L^1_{2n\times 2n}(r_0, \infty),\ 2)\ V(r) = V^*(r)\ (r_0 \leqslant r < \infty),$$

$$3)\ JV(r) = -V(r)\, J\ (r_0 \leqslant r < \infty). \tag{1.16}$$

Теперь остается добавить, что м-функция $K(r, t)$, определенная из уравнения (1.10), удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to\infty} \int_r^{\infty} |K(r, t)|\, dt = 0,$$

так что $U(r, \lambda)$ имеет асимптотику (1.8), а потому $W(r)$ представима в виде (1.19). Теорема доказана.

Определение 3. Множество канонических дифференциальных выражений вида (0.1), отвечающих по теореме 2 м-функциям $U \in \mathbf{K}_U$, обозначим через $\mathbf{K}$.

§ 2. Канонические дифференциальные выражения (0.2) как подмножество класса K

Рассмотрим множество $\mathbf{V}_0$ канонических дифференциальных выражений вида (0.2) с потенциалами $V(r)$, удовлетворяющими условиям (1.16) при $r_0 = 0$. Покажем, что $\mathbf{V}_0 \subset \mathbf{K}$ и в некотором смысле плотно в нем.

Заметим, во-первых, что при рассмотрении операторов, порожденных выражениями вида (0.2), всегда можно ограничиться выражениями с так называемыми „нормализованными“ потенциалами $V(r)$, т. е. потенциалами, удовлетворяющими условию $JV(r) = -V(r)\, J$.

В самом деле, представим рассматриваемый потенциал $V(r)$ в виде $V(r) = V_+(r) + V_-(r)$, где $V_\pm(r) = \frac{1}{2}[V(r) \mp JV(r)\, J]$ ($JV_\pm(r) = \pm V_\pm J$), и рассмотрим матричное решение $Q(r)$ следующей задачи Коши:

$$J \frac{dQ(r)}{dr} - V_{+}(r)\,Q(r) = 0, \quad Q(r_0) = I_{2n} \; (0 \leqslant r_0 \leqslant \infty).^{*}$$

Используя свойства: $V_{+}(r) = V_{+}^{*}(r)$, $JV_{+}(r) = V_{+}(r)\,J$ легко проверить, что *м*-функция $Q(r)$ J-унитарна и унитарна: $Q^{*}(r)\,J\,Q(r) = J$, $Q^{*}(r)\,Q(r) = I_{2n}$. Отсюда получаем

$$Q^{*}(r)\left(J\frac{d}{dr} - V(r)\right)Q(r)\,x(r) = Q^{*}(r)\left(J\frac{dQ(r)}{dr} - V(r)\,Q(r)\right)x(r) +$$

$$+ Q^{*}(r)\,JQ(r)\frac{dx(r)}{dr} - Q^{*}(r)\,V(r)\,Q(r)\,x(r) = J\frac{dx(r)}{dr} - \widetilde{V}(r)\,x(r).$$

Очевидно потенциал $\widetilde{V}(r) = Q^{*}(r)\,V_{-}(r)\,Q(r)$ суммируем, эрмитов и нормализован.

Рассмотрим класс операторов вида

$$[(\mathbf{I} + \mathbf{K})\,f](r) = f(r) + \int_{r}^{\infty} K(r, t)\,f(t)\,dt, \tag{2.1}$$

где ядро $K(r, t)$ $(0 \leqslant r \leqslant t < \infty)$ удовлетворяет условиям

$$1)\ \sup_{r \in R_{+}} \int_{r}^{\infty} |K(r, t)|\,dt < \infty, \quad 2)\ \sup_{t \in R_{+}} \int_{0}^{t} |K(r, t)|\,dr < \infty,$$

$$3)\ \lim_{r \to \infty} \int_{r}^{\infty} |K(r, t)|\,dt = 0. \tag{2.2}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество локально-абсолютно непрерывных $(2n \times 1)$-вектор-функций $f(r)\,(r \in R_{+})$ таких, что $f \in L_{2n \times 1}^{\infty}(R_{+})$, $f' \in L_{2n \times 1}^{p}(R_{+})$ при некотором p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Через $\mathfrak{M}_0$ обозначим подмножество $\mathfrak{M}$, элементы которого удовлетворяют условию $f(0) = 0$.

Лемма 2.1. *Пусть задан оператор вида* (2.1) — (2.2). *Тогда равенство*

$$\left(J\frac{d}{dr} - V(r)\right)[(\mathbf{I} + \mathbf{K})\,f](r) = [(\mathbf{I} + \mathbf{K})\,Jf'](r) \tag{2.3}$$

выполняется для всех $f \in \mathfrak{M}$ *в том и только в том случае, когда* J*-перестановочная и* J*-антиперестановочная компоненты* $K_{\pm}(r, t) = \frac{1}{2}(K(r, t) \mp JK(r, t)\,J)$ *ядра* $K(r, t)$ *уодовлетворяют системе уравнений*

$$K_{+}(r, t) = J\int_{r}^{\infty} V(\tau)\,K_{-}(\tau, \tau + t - r)\,d\tau,$$

---

* Легко видеть, что в силу суммируемости $V_{+}(r)$, всегда существует $\lim_{r \to \infty} Q(r) := Q(\infty)$.

$$K_-(r, t) = -\frac{1}{2} J V\left(\frac{r+t}{2}\right) + J \int_r^{\frac{r+t}{2}} V(r) K_+(\tau, r+t-\tau)\, d\tau.$$

Доказательство. Пусть $K_+(r, t)$ удовлетворяет системе (2.4). Тогда после соответствующих замен переменных и порядка интегрирования получим

$$\int_r^\infty K(r, t) f(t)\, dt = \int_r^\infty K_+(r, t) f(t)\, dt + \int_r^\infty K_-(r, t) f(t)\, dt =$$

$$= J \int_r^\infty \int_\tau^\infty V(\tau) K_-(\tau, t) f(t+r-\tau)\, dt\, d\tau + J \int_r^\infty V(t) f(2t-r)\, dt +$$

$$+ J \int_r^\infty \int_\tau^\infty V(\tau) K_+(\tau, t) f(t+\tau-r)\, dt\, d\tau.$$

Отсюда, учитывая, что $J V(r) = -V(r) J$, имеем

$$J \frac{d}{dr} \int_r^\infty K(r, t) f(t)\, dt = V(r) \int_r^\infty K_-(r, t) f(t)\, dt +$$

$$+ J \int_r^\infty \int_\tau^\infty V(\tau) K_-(\tau, t) J f'(t+r-\tau)\, dt\, d\tau + V(r) f(r) +$$

$$+ J \int_r^\infty V(t) J f'(2t-r)\, dt + V(r) \int_r^\infty K_+(r, t) f(t)\, dt +$$

$$+ J \int_r^\infty \int_\tau^\infty V(\tau) K_+(\tau, t) J f'(t-r+\tau)\, dt\, d\tau =$$

$$= V(r) [(\mathbf{I} + \mathbf{K}) f](r) + \int_r^\infty K(r, t) J f'(t)\, dt.$$

Полученное равенство равносильно равенству (2.3).

Обратно, пусть справедливо равенство (2.3) для любого $f \in \mathfrak{M}$. Тогда $м$-функция $U(r, \lambda) = (\mathbf{I} + \mathbf{K}) U_0(r, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$J \frac{dU(r, \lambda)}{dr} - V(r) U(r, \lambda) = \lambda U(r, \lambda) \tag{2.5}$$

и асимптотике (1.8). Следовательно, $U(r, \lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$U(r, \lambda) = U_0(r, \lambda) + \int_r^\infty U_0(r-s, \lambda) J V(s) U(s, \lambda)\, ds.$$

Отсюда получаем

$$\int_r^\infty K(r, t)\, U_0(t, \lambda)\, dt =$$

$$= \int_r^\infty U_0(r-s, \lambda)\, JV(s) \left(U_0(s, \lambda) + \int_s^\infty K(s, t)\, U_0(t, \lambda)\, dt \right) ds.$$

Преобразуем последнее равенство, учитывая соотношение: $K_+(r, t) \times \times U_0(t, \lambda) = U_0(t, \lambda) K_+(r, t)$; $K_-(r, t)\, U_0(t, \lambda) = U_0^*(t, \lambda)\, K_-(r, t)$. Имеем

$$\int_r^\infty U_0(t, \lambda)\, K_+(r, t)\, dt + \int_r^\infty U_0^*(t, \lambda)\, K_-(r, t)\, dt =$$

$$= \int_r^\infty U_0(r-2s, \lambda)\, JV(s) ds + \int_r^\infty \int_s^\infty U_0(r-s+t, \lambda)\, JV(s)\, K_-(s, t)\, dt\, ds +$$

$$+ \int_r^\infty \int_s^\infty U_0(r-s-t, \lambda)\, JV(s)\, K_+(s, t)\, dt ds =$$

$$= \int_r^\infty U_0^*(s, \lambda) \frac{1}{2} J V\left(\frac{r+s}{2}\right) ds + \int_r^\infty \int_{2s-r}^\infty U_0^*(t, \lambda)\, JV(s)\, K_+(s, r+t-s)\, dt ds +$$

$$+ \int_r^\infty \int_r^\infty U_0(t, \lambda)\, JV(s)\, K_-(s, s+t-r)\, dt\, ds =$$

$$\int_r^\infty U_0(t, \lambda) \int_r^\infty JV(s)\, K_-(s, s+t-r)\, ds\, dt +$$

$$+ \int_r^\infty U_0^*(t, \lambda) \left[\frac{1}{2} JV\left(\frac{r+t}{2}\right) + J \int_r^{\frac{r+t}{2}} V(s)\, K_+(s, t+r-s)\, ds \right] dt.$$

Приравнивая в полученном равенстве члены при $U_0(t, \lambda)$ и $U_0^*(t, \lambda)$, приходим к системе (2.4).

Аналогично первой части доказательства леммы 1 доказывается

Лемма 2.2. *Если ядро $L(r, t)$ оператора вида* (2.1) — (2.2) *удовлетворяет системе*

$$L_+(r, t) = -J \int_r^\infty L_1(\tau + r - t, \tau)\, V(\tau)\, d\tau,$$

$$L_-(r,t) = -\frac{1}{2} J V\left(\frac{r+t}{2}\right) - J \int\limits_{\frac{r+t}{2}}^{r} L_+(t+r-\tau, \tau)\, V(\tau)\, d\tau, \quad (2.6)$$

то выполняются равенства

$$J\frac{d}{dr}[(\mathrm{I}+\mathrm{L})f](r) = [\mathrm{I}+\mathrm{L}]\left(J\frac{d}{dr} - V(r)f\right)(r)\ \forall f \in \mathfrak{M}. \quad (2.7)$$

$$\left(J\frac{d}{dr} - V(r)\right)[(\mathrm{I}+\mathrm{L}^*)f](r) = [(\mathrm{I}+\mathrm{L}^*)Jf'](r)\ \forall f \in \mathfrak{M}_0. \quad (2.8)$$

Замечание 1. Существование решений систем (2.4) и (2.6) в классе m-функций, удовлетворяющих условиям (2.2; 1), 2)), доказывается методом последовательных приближений. Затем, исходя из этих систем, легко проверить справедливость равенств типа

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_r^\infty |L(r,t)|\, dt = 0; \ \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t |L(r,t)|\, dr = 0. \quad (2.9)$$

Лемма 2.3 *Операторы* $\mathrm{I}+\mathrm{K}$ *и* $\mathrm{I}+\mathrm{L}$, *определенные с помощью систем* (2.1) *и* (2.6), *взаимно обратные.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $\mathrm{I}+\mathrm{M} = (\mathrm{I}+\mathrm{L})(\mathrm{I}+\mathrm{K})$ и покажем, что ядро $M(r,t)$ этого оператора равно нулю. Для m-функции $(\mathrm{I}+\mathrm{M})\, U_0(r,\lambda)$ в силу равенств (2.3) и (2.4) имеем

$$J\frac{d}{dr}[(\mathrm{I}+\mathrm{M})\, U_0(r,\lambda)] = \lambda(\mathrm{I}+\mathrm{M})\, U_0(r,\lambda).$$

Отсюда

$$U_0(r,\lambda) + \int\limits_r^\infty M(r,t)\, U_0(t,\lambda)\, dt = \left(I_{2n} + \int\limits_0^\infty M(0,t)\, U_0(t,\lambda)\, dt\right) U_0(r,\lambda).$$

Это приводит к равенству

$$\int\limits_0^\infty M(r, r+t)\, U_0(t,\lambda)\, dt = \int\limits_0^\infty M(0,t)\, U_0(t,\lambda)\, dt,$$

т. е. $M(r, r+t) = M(0,t)\ \forall r \in R_+$. Но ядро $M(r,t)$ также удовлетворяет условиям (2.9). Следовательно $M(r,t) \equiv 0$.

Теорема 3 *Оператор* $\Gamma_\Delta = -(\mathrm{I}+\mathrm{L})(\mathrm{I}+\mathrm{L}^*) + \mathrm{I}$ *есть ганкелев оператор, порожденный* m*-функцией* $\Gamma_\Delta(t)$ *из класса* K_Γ.

Доказательство. Легко видеть, что для ядра $\Gamma(r,t)$ оператора $\mathrm{I} - \Gamma_\Delta = (\mathrm{I}+\mathrm{L})(\mathrm{I}+\mathrm{L}^*)$ имеем представление

$$\Gamma(r,t) = \begin{cases} L(r,t) + \int\limits_t^\infty L(r,s)\, L^*(t,s)\, ds, & \text{при } r < t \\ L^*(t,r) + \int\limits_r^\infty L(r,s)\, L^*(t,s)\, ds, & \text{при } r > t. \end{cases}$$

Отсюда $\Gamma^*(r, t) = \Gamma(t, r)$ и в силу (2.9)

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^\infty |\Gamma(r, t)|\, dt = 0. \tag{2.10}$$

Далее, в силу (2.7) и (2.8) для произвольного $f \in \mathfrak{M}_0$ имеем

$$J \frac{d}{dr} \int_0^\infty \Gamma(r, t) f(t)\, dt = \int_0^\infty \Gamma(r, t)\, Jf'(t)\, dt.$$

Отсюда следует (см. [4], стр. 20), что $\Gamma(r, t)$ представимо в виде: $\Gamma(r, t) = \Gamma_+(r - t) + \Gamma_-(r + t)$, где $J\Gamma_\pm(t) = \pm\Gamma_\pm(t)\, J$. Но в силу (2.10) $\Gamma_+(t) \equiv 0$ и следовательно оператор $\mathbf{\Gamma}_\Delta$ является ганкелевым оператором, порожденным суммируемой функцией $\Gamma_\Delta(t) := \Gamma_-(t)$.

Остается доказать, что $\|\mathbf{\Gamma}_\Delta\|_2 < 1$. Заметим для этого, что $\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_\Delta = (\mathbf{I} + \mathbf{L})(\mathbf{I} + \mathbf{L}^*) = (\mathbf{I} + \mathbf{K})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{K}^*)^{-1}$ — обратимый оператор по самому построению.

Рассмотрим теперь операторы $\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_{\Delta, a}$, построенные соответственно потенциалом $V_a(r) = V(r + a)(a \geqslant 0)$: $\mathbf{I} - \mathbf{I}_{\Delta, a} = (\mathbf{I} + \mathbf{L}_a)(\mathbf{I} + \mathbf{L}_a^*)$. С помощью системы (2.6) легко убедиться, что ядра $L_a(r, t)$ связаны с ядром $L(r, t)$ соотношением: $L_a(r, t) = L(r + a, t + a)$. Поэтому ганкелевы операторы $\mathbf{\Gamma}_{\Delta, a}$ порождаются $м$-функциями $\Gamma_{\Delta, a}(t) = \Gamma_\Delta(t + a)$. Это позволяет утверждать, что $\|\mathbf{\Gamma}_{\Delta, a}\|_2 < 1$ для достаточно больших a. Заметим теперь, что $\|\mathbf{\Gamma}_{\Delta, a}\|_2$ есть непрерывная неубывающая функция от $a \in R_+$, которая не может принимать значение 1, так как условие $\|\mathbf{\Gamma}_{\Delta, a}\|_2 = 1$ противоречит обратимости оператора $\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_{\Delta, a}$. Следовательно $\|\mathbf{\Gamma}_{\Delta, a}\|_2 < 1$ $\forall a \in R_+$. Теорема доказана.

Равенство $\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_\Delta = (\mathbf{I} + \mathbf{K})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{K}^*)^{-1}$ в терминах ядер этих операторов равносильно уравнению (1.10). Поэтому восстанавливая уравнение (0.3) по процедуре, указанной в теореме 2, мы приходим к уравнению (2.5), где потенциал $V(r)$ удовлетворяет условиям (1.16) при $r_0 = 0$.

З а м е ч а н и е. 2 Нам неизвестны условия на $м$-функцию $\Gamma_\Delta \in \mathbf{K}_\Gamma$ для того, чтобы она соответствовала каноническому дифференциальному выражению из класса $\mathbf{V}_0$. Однако легко показать, что если Γ_Δ абсолютно непрерывна, то ей отвечает выражение вида (0.2) из класса $\mathbf{V}_0$. В качестве другого достаточного условия можно указать условие: $\Gamma_\Delta \in L^2_{2n\times 2n}(R_+)$.

§ 3 S-матрица канонического дифференциального оператора класса K и обратная задача

Рассмотрим операторы в пространстве $L^2_{2n\times 1}(R_+)$, порожденные дифференциальным выражением вида (0.1). Через A_0 обозначим „минимальный" симметрический оператор, порожденный выражением (0.1). $D(A_0)$ состоит из финитных (в нуле и на бесконечности) вектор-функций $x \in L^2_{2n\times 1}(R_+)$ таких, что $W(r)\, x(r)$—локально абсолютно непрерывна и $\frac{d}{dr}(W(r)\,x(r)) \in L^2_{2n\times 1}(R_+)$. Оператор $\overset{*}{A_p}$ определяется выражением (0.1) на многообразии $D(\overset{*}{A_0}) \subset L^2_{2n\times 1}(R_+)$ таких вектор-функций $x(r)$, для которых $W(r)\,x(r)$ — локально абсолютно непрерывна и $\frac{d}{dr}(W(r)\,x(r)) \in L^2_{2n\times 1}(R_+)$. Произвольное самосопряженное расширение A_p оператора A_0 получается сужением оператора $\overset{*}{A_0}$ на многообразии $D(A_p) \subset D(\overset{*}{A_0})$, определенном самосопряженным граничным условием в нуле. Известно (см. [4], стр. 14), что каждое такое условие можно задать в виде $P_K\,x(0) = x(0)$, где P_K — ортопроектор на гипермаксимальное J-нейтральное подпространство* $L \subset C^{2n}$. Легко показать, что такой проектор P_K в разложении $C^{2n} = H_+ \oplus H_-$ представляется в вида

$$P_K = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_n & K^* \\ K & I_n \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

где K так называемый угловой оператор подпространства L, унитарно отображает H_+ на H_-.

Пусть задано дифференциальное выражение (0.1) из класса K. Рассмотрим $(2n\times n)$-матричное решение $X(r, \lambda)$ уравнения

$$W^*(r)\,J\frac{d}{dr}(W(r)\,X(r, \lambda)) = \lambda\,X(r, \lambda), \tag{3.1}$$

удовлетворяющее какому-либо самосопряженному граничному условию

$$P_K\,X(0, \lambda) = X(0, \lambda). \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. *Среди всех $(2n\times n)$-матричных решений $X(r, \lambda)$ уравнения (3.1), удовлетворяющих заданному граничному условию (3.2) существует единственное решение $X_0(r, \lambda)$ такое, что $P_+\,X_0(r, \lambda) = e^{-i\lambda r}\,I_n + o(1)$ при $r \to \infty$.*

При этом $P_-\,X_0(r, \lambda) = e^{Dr}\,S(\lambda) + o(1)$ при $r \to \infty$, где $S(\lambda)$ — однозначно определенная $(n\times n)$-матрица, зависящая от параметра $\lambda \in R$.

Доказательство. Ясно, что решение $X(r, \lambda)$ задачи (3.1) — (3.2) можно представить в виде

$$X(r, \lambda) = U(r, \lambda)\,U^{-1}(0, \lambda)\,P_K\begin{bmatrix} C(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $U(r, \lambda)$—$(2n\times 2n)$-матричное решение уравнения (0.3), удовлетворяющее асимптотике (1.8), а $C(\lambda)$ — произвольная $(n\times n)$-марица, зависящая от параметра $\lambda \in R$.

---

* В пространстве $C^{2n} = H_+ \oplus H_-$ наряду с обычным скалярным произведением можно рассмотреть индефинитное скалярное произведение $[x, y] = (Jx, y)$. Подпространство $L \subset C^{2n}$ называется J-нейтральным гипермаксимальным, если $L = L^{[\perp]}$, где $L^{[\perp]} = \{x \in C^{2n} / [x, y] = 0 \ \forall y \in L\}$. Подробнее о геометрии J-пространств см. в [5].

Отсюда, учитывая, что $U^{-1}(0, \lambda) = -JU^*(0, \lambda)J$, и вид матрицы P_K, получим

$$X(r, \lambda) = U(r, \lambda)\begin{bmatrix}(U_{11}^*(0, \lambda) - U_{21}^*(0, \lambda)K)C(\lambda)\\(-U_{12}^*(0, \lambda) + U_{22}^*(0, \lambda)K)C(\lambda).\end{bmatrix}.$$

Подставим $C(\lambda) = (U_{11}^*(0, \lambda) - U_{21}^*(0, \lambda)K)^{-1}$. Получим

$$X_0(r, \lambda) = U(r, \lambda)\begin{vmatrix}I_n\\S(\lambda)\end{vmatrix},$$

где

$$S(\lambda) = (-U_{12}^*(0, \lambda) + U_{22}^*(0, \lambda)K)(U_{11}^*(0, \lambda) - U_{21}^*(0, \lambda)K)^{-1}. \quad (3.3)$$

Теперь для $м$-функции $X_0(r, \lambda)$, учитывая асимптотику (1.8), получаем

$$X_0(r, \lambda) = e^{-i\lambda r}I_n + e^{i\lambda r}S(\lambda) + o(1), \text{ при } r \to \infty. \quad (3.4)$$

Лемма доказана.

Определение 3.1. M-функция $S(\lambda)$ ($\lambda \in R$), однозначно определенная с помощью задачи (3.1)—(3.2), называется S-матрицей уравнения (3.1), отвечающей граничному условию (3.2), или оператора A_p, порожденного дифференциальным выражением (0.1) и граничным условием (3.2).

Матрицу $U^{-1}(0, \lambda)$ естественно назвать матрицей асимптотической эквивалентности уравнений

$$W^*(r)J\frac{d}{dr}(W(r)x(r, \lambda)) = \lambda x(r, \lambda) \text{ и } J\frac{d}{dr}x_0(r, \lambda) = \lambda x_0(r, \lambda),$$

поскольку $x(r, \lambda) = x_0(r, \lambda) + o(1)$ при $r \to \infty$ тогда и только тогда, когда $x(0, \lambda) = U^{-1}(0, \lambda)x_0(0, \lambda)$.

Теорема 4*. *Для того, чтобы некоторая м-функция* $S(\lambda)$ ($\lambda \in R$) *являлась S-матрицей некоторого уравнения вида* (3.1) *из класса K необходимо и достаточно, чтобы она обладала следующими свойствами;*

1) $S(\lambda)$ — *непрерывная на сомкнутой оси* $\bar{R} = R \cup \{\pm\infty\}$ *унитарная м-функция, допускающая представление*

$$S(\lambda) = S(\infty) - \int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(t)e^{-i\lambda t}dt \quad (\Gamma \in L^1_{n\times n}(R)). \quad (3.5)$$

2) *Частные индексы м-функции* $S(\lambda)$ *равны нулю.*

Определение частных индексов невырожденной $м$-функции вида (3.5) см. в [3], стр. 33. Здесь мы в пояснение условия 2) отметим только, что оно эквивалентно условию

2') $S(\lambda)$ допускает факторизацию в виде

$$S(\lambda) = S_-(\lambda)S_+(\lambda), \quad (3.6)$$

* В работе [6] эта теорема ошибочно формулировалась для канонических уравнений класса V_0, а не K.

где $S_{\pm}(\lambda)$ принадлежат, соответственно, $W^{\pm}_{n\times n}$ и $\det S_{\pm}(\lambda) \neq 0$ в соответствующих полуплоскостях $Jm\lambda > 0$ и $Jm\lambda < 0$.

Доказательство. Необходимость. Из леммы 3.1 следует, что S-матрица $S(\lambda)$ определяется дробно-линейным преобразованием (3.3) унитарной матрицы K с J-унитарной матрицей преобразования $U^{-1}(0, \lambda)$. Можно показать (см. [1], теорема 3.1), что $(U^{*}_{11}(\lambda) - U^{*}_{21}(\lambda)K)^{\pm 1} \in W^{+}_{n\times n}$ и $(-U^{*}_{12}(\lambda) + U^{*}_{22}(\lambda)K)^{\pm 1} \in W^{-}_{n\times n}$. Таким образом свойства 1), 2) S-матрицы $S(\lambda)$ являются непосредственным следствием представления (3.3) матрицы $S(\lambda)$.

Достаточность. В силу теоремы 4.3 работы [1] ганкелев оператор Γ, порожденный $м$-функцией $\Gamma(t)$ при $t > 0$ в представлении (3.5) матрицы $S(\lambda)$, удовлетворяет условию $\|\Gamma\|_2 < 1$. Следодовательно $м$-функция $\Gamma_{\Delta}(t)$, определенная формулой (1. 3.1) принадлежит классу $\mathbf{K}_{\Gamma}$. Теперь нетрудно проверить, что $S(\lambda)$ является S-матрицей задачи (3.1)—(3.2), в которой дифференциальное выражение порождено $м$-функцией $-\Gamma_{\Delta}(t)$,* а граничное условие — унитарной матрицей $S(\infty) = K$. (см. [1], следствие 4.2). Теорема доказана.

В заключение рассмотрим связь между спектральной функцией $\Sigma(\lambda)$ оператора A_p, порожденного дифференциальным выражением (0.1) и граничным условием (3.2) и его S-матрицей.

Теорема 5. *Спектральная функция* $\Sigma(\lambda)$ $(\lambda \in R)$ *оператора* A_P *и его S-матрица* $S(\lambda)$ *связаны соотношением*

$$\frac{d\Sigma(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\pi} S_{+}^{-1}(\lambda) S_{+}^{*-1}(\lambda) \left(= S_{-}^{-1}(\lambda) S_{-}^{*-1}(\lambda)\right), \tag{3.7}$$

где $S_{\pm}(\lambda)$—*множители в представлении* (3.6) *матрицы* $S(\lambda)$.

Доказательство. Рассмотрим многообразие L финитных вектор-функций из $L^2_{2n\times 1}(R_+)$ и покажем, что выражение

$$\Phi(f, \lambda) = [I, 0]\, \mathbf{P}_k\, U^{*^{-1}}(0, \lambda) \int_0^{\infty} U^*(s, \lambda) f(s)\, ds \quad (f \in L),$$

где $U(r, \lambda)$ есть решение уравнения (0.3), удовлетворяющее асимптотике (1.8), является направляющим функционалом для оператора A_P Это означает (см. [17]). что уравнение

$$(A_P - \lambda \mathrm{I})\, x = f$$

имеет решение в $D(A_p) \cap L$ в том и только в том случае, если $\Phi(f, \lambda) = 0$.

Для проверки этого заметим, что финитное решение уравнения

$$W^*(r)\, J \frac{d}{dr}\left(W(r)\, x(r)\right) - \lambda\, x(r) = f(r)$$

---

* Дело в том, что в представлении $м$-функции— $JU(0, \lambda) J$ в виде (1.4) участвует $м$-функция $-JK(t) J$ и, следовательно, из уравнения (1.5в) определяется $м$-функция—$\Gamma_{\Delta}(t)$.

можно приндставить в виде

$$x(r, \lambda) = U(r, \lambda)\, J \int_0^\infty U^*(s, \lambda) f(s)\, ds.$$

Отсюда

$$x(0, \lambda) = U(0, \lambda)\, J \int_0^\infty U^*(s, \lambda) f(s)\, ds.$$

Поэтому для выполнения условия $\mathbf{P}_K x(0, \lambda) = x(0, \lambda)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$0 = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_K)\, x(0, \lambda) = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_K)\, J U^{*-1}(0, \lambda) \int_0^\infty U^*(s, \lambda) f(s)\, ds =$$

$$= J \mathbf{P}_K\, U^{*-1}(0, \lambda) \int_0^\infty U^*(s, \lambda) f(s)\, ds.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_K)\, J = J\mathbf{P}_K$ и $JU^{*-1}(0, \lambda) = U(0, \lambda)\, J$. Остается заметить, что полученное равенство равносильно условию

$$P_+ \mathbf{P}_K\, U^{*-1}(0, \lambda) \int_0^\infty U^*(s, \lambda) f(s)\, ds = 0.$$

Поэтому теорема будет доказана, если показать, что

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\chi(f, \lambda), \chi(g, \lambda))\, d\lambda \quad \forall f, g \in L,$$

где $\chi(f, \lambda) = \overset{\bullet}{S}{}_+^{-1}(\lambda)\, \Phi(f, \lambda)$.

Предположим сперва, что дифференциальное выражение, определяющее оператор A_p, имеет вид (0.2). Тогда для *м*-функции $U(r, \lambda$ имеем $U(r, \lambda) = (\mathbf{I} + \mathbf{K})\, U_0(r, \lambda)$, где $\mathbf{I} + \mathbf{K}$ есть ограниченный оператор, действующий в каждом из пространств $L^p_{2n\times 1}(R_+)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ по формуле (2.1). С другой стороны $\overset{\bullet}{S}{}_+^{-1}(\lambda)\, P_+ \mathbf{P}_k\, \overset{\bullet}{U}{}^{-1}(0, \lambda) = [I_n, S^*(\lambda)]$, так что, положив $X_0(r, \lambda) = [I_n, S^*(\lambda)]\, \overset{\bullet}{U}_0(r, \lambda) = [e^{i\lambda r} I_n, e^{-i\lambda r} S^*(\lambda)]$, получим

$$\chi(f, \lambda) = \overset{\bullet}{S}{}_+^{-1}(\lambda)\, P_+ \mathbf{P}_K\, \overset{\bullet}{U}{}^{-1}(0, \lambda) \int_0^\infty U^*(s, \lambda) f(s)\, ds =$$

$$= \int_0^\infty \overset{\bullet}{X}_0(s, \lambda)\, [(\mathbf{I} + \mathbf{K}^*) f](s)\, ds.$$

Отсюда, положив $[(\mathbf{I}+\mathbf{K})f](r)=f_1(r)$, $[(\mathbf{I}+\mathbf{K})g](r)=g_1(r)$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\chi(f,\lambda),\chi(g,\lambda))\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(f_1(t),X_0^*(t,\lambda)\cdot X_0(s,\lambda)\,g_1(s))\,ds\,dt\,d\lambda=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\Bigg(f_1(t),$$

$$\begin{bmatrix} e^{-i\lambda(t-s)}I_n & e^{-i\lambda(t+s)}\left(S^*(\infty)-\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma^*(\tau)e^{i\lambda\tau}d\tau\right)\\ e^{i\lambda(t+s)}\left(S(\infty)-\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(\tau)e^{-i\lambda\tau}d\tau\right) & e^{i\lambda(t-s)}I_n\end{bmatrix}g(s)\Bigg)\,ds\,dt\,d\lambda=$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f_1(t),\begin{bmatrix} e^{-i\lambda(t-s)}I_n & e^{-i\lambda(t+s)}S^*(\infty)\\ e^{i\lambda(t+s)}S(\infty) & e^{i\lambda(t-s)}I_n\end{bmatrix}g_1(s)\right)d\lambda\,ds\,dt-$$

$$-\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(f_1(t)\,\Gamma_\Delta(t+s)\,g_1(s)\,ds\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{f}_1(\lambda),\hat{g}_1(\lambda))\,d\lambda-$$

$$-\int_0^{\infty}(f_1(t),(\Gamma_\Delta g_1)(t))\,dt=\int_0^{\infty}(f_1(t),(\mathbf{I}-\Gamma_\Delta)\,g_1(t))\,dt=$$

$$=\int_0^{\infty}((\mathbf{I}+\mathbf{K}^*)f(t),(\mathbf{I}-\Gamma_\Delta)(\mathbf{I}+\mathbf{K}^*)\,g(t))\,dt=$$

$$=\int_0^{\infty}(f(t),(\mathbf{I}+\mathbf{K})(\mathbf{I}-\Gamma_\Delta)(\mathbf{I}+\mathbf{K}^*)\,g(t))\,dt=(f,g).$$

Общий случай получается предельным переходом, поскольку множество *м*-функций $\Gamma\in\mathbf{K}_\Gamma$, отвечающее дифференциальным выражениям из класса $\mathbf{V}_0$, плотно в $\mathbf{K}_\Gamma$. Теорема доказана.

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что спектральную плотность оператора A_p можно представить в виде

$$\frac{d\Sigma(\lambda)}{d\lambda}=\frac{1}{\pi}\left(I_n+\int_{-\infty}^{\infty}H(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\right)>0, \tag{3.8}$$

где $H(t)$ — суммируемая на оси эрмитова акселеранта*.

* Определение и свойства акселерант см., например, в [2].

Теперь формулу (3.7) можно рассматривать как правую и левую каноническую факторизации правой части равенства (3.8), которая однозначно определяет факторы $S_{\pm}(\lambda)$. Таким образом, между множествами S-матриц уравнений класса **K** и эрмитовых акселерант, удовлетворяющих условию (3.8) существует (1—1)— значное соответствие.

Это предложение можно рассматривать как решение прямой и обратной спектральной задачи для операторов класса **K**.

Ереванский государственный
университет

Поступила 21.III.1987.

Ֆ. Է. ՄԵԼԻՔ-ԱԴԱՄՅԱՆ. Կանոնական դիֆերենցիալ օպերատորների մի դասի մասին *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է

$$(Dx)(r) = W^*(r)\, J \frac{d}{dr}(W(r)\, x(r))\ (r \in [0, \infty)). \tag{0.1}$$

տեսքի դիֆերենցիալ արտահայտությունը, որտեղ J-ը $(2n \times 2n)$-մատրից է $J^* = -J$, $J^2 = -I_{2n}$ հատկություններով, իսկ $W(r)$-ը անընդհատ $(2n)$-մատրից-ֆունկցիա է J-ունիտար արժեքներով ($W^*(r)\, J\, W(r) = J$, $r \in [0, \infty)$)։ (0.1) տեսքի արտահայտությունը ընդհանրացնում է էրմիտյան $V(r)$ պոտենցիալով ($V^*(r) = V(r)$) կանոնական դիֆերենցիալ արտահայտությունը՝

$$(D_V x)(r) = J \frac{dx(r)}{dr} - V(r)\, x(r)$$

$(Dx)(r,\lambda) = \lambda x(r,\lambda)$ հավասարումների մի դասի համար, որը ընդգրկում է իր մեջ հանրագումարելի $V(r)$ պոտենցիալով $(D_V x)(r,\lambda) = \lambda x(r, \lambda)$ հավասարումները, լուծվում է ցրման տեսության և սպեկտրալ տեսության խնդիրները։

F. E. MELIK—ADAMIAN. *On a class of canonical differential operators* (summary)

Differential expression of the type

$$(Dx)(r) = W^*(r)\, J \frac{d}{dr}(W(r)\, x(r))((r \in [0, \infty)); \tag{0.1}$$

where J is $(2n \times 2n)$-matrix with the properties $J^* - J$, $J_2^2 - I_{2n}$ and $W(r)$ is a continuous $(2n \times 2n)$--matrix function with J-unitary values ($W^*(r)\, J W(r) = J \forall r \in [0, \infty)$) is considered.

The expression of this type generalized the canonical differential expression

$$(D_v x)(r) = J \frac{dx(r)}{dr} - V(r)\, x(r)$$

with Hermitian potential $V(r)\ V^*(r) = V(r)$).

For the special class of equations $(Dx)(r, \lambda) = \lambda x(r, \lambda)$ which include equations $(D_v x)(r, \lambda) = \lambda x(r, \lambda)$ with summable potential $V(r)(V \in L^1_{2n \times 2n}(0, \infty))$, the problems of scattering and spectral theory are solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян*. Интегральные ганкелевы операторы и связанные с ними проблемы продолжения, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XIX, № 4, 5, 1984, 311—360.

2. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян.* Матрично-континуальные аналоги задачи Шура и Каратеодори-Теплица, Изв. АН Арм.ССР, Математика, т. XXI, № 2, 1986, 107—141.
3. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, XIII, вып. 2 (80), 1958, 3—72.
4. *Ф. Э. Мелик-Адамян.* О канонических дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XII, № 1, 1977, 10—31.
5. *М. Г. Крейн.* Введение в геометрию J-пространств и теория операторов в этих пространствах, Вторая летняя мат. школа, часть I, «Наукова думка», Киев, 1956, 15—93.
6. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян.* К теории S-матриц канонических уравнений с суммируемым потенциалом, ДАН Арм.ССР, XVI, № 4, 1968, 150—155.
7. *М. Г. Крейн.* При эрмітові оператори с напрямними функціоналами, Збірник проць математики, АН УССР, № 10, 1948, 83—105.