ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, №6, 1989 Математика

УДК 517.984

С. В. БАБАСЯН, И. Г. ХАЧАТРЯН

ОБ ОПЕРАТОРЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

В статье рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)}(x)+\sum_{k=0}^{n-2}q_{n-2-k}(x)\,y^{(k)}(x)+\int_x^\infty M(x,\ t)\,y(t)\,dt=\mu\,y(x),$$

$$a<x<\infty, \tag{1}$$

порядка $n\geqslant 3$, где μ — комплексный параметр, а коэффициенты $q_k(x)$ и ядро $M(x,\ t)$ — непрерывные функции, для которых существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to\infty} q_k(x)=A_k,\ k=0,\ 1,\cdots,n-2,$$

$$\lim_{x+t\to\infty} M(x,\ t)=0.$$

Указываются эффективные достаточные условия на функции $q_k(x)$ ($k=0,\ 1,\cdots,n-2$) и $M(x,\ t)$, при которых уравнение (1) обладает оператором преобразования с условиями на бесконечности. т. е. уравнение (1) при всех μ из некоторой области имеет решение вида

$$y(x,\ \lambda)=e^{\lambda x}+\int_x^\infty e^{\lambda t}K(x,\ t)\,dt,\ a<x<\infty, \tag{2}$$

где параметр λ связан с параметром μ равенством

$$\mu=\lambda^n+\sum_{k=0}^{n-2}\lambda^k A_{n-2-k}, \tag{3}$$

а ядро $K(x,\ t)$ не зависит от λ.

В частном случае, когда $A_k=0$ ($k=0,\ 1.\cdots,n-2$) и $M(x,\ t)\equiv 0$, этот вопрос был решен И. Г. Хачатряном [1]. Основной результат работы [1] является обобщением результата, полученного Б. Я. Левиным [2] в случае $n=2$. Использованый в работе [1] метод является развитием метода, предложенного В. А. Марченко [3] для случая $n=2$. В рассматриваемом здесь общем случае применяется метод работы [1]. В случае, когда хотя бы один из пределов A_k ($k=0,\ 1,\cdots,n-3$) отличен от нуля, возникают дополнительные трудности. Нетривиален, например, аналог исходного интегрального уравнения для $y(x,\ \lambda)$, использованного в [1].

Теорема. *Пусть в уравнении* (1) *коэффициенты* $q_k(x)$, $k=0, 1, \cdots, n-2$) *и функция* $M_0(x, \tau)=M(x, x+\tau)$ $(x>a, \tau\geqslant 0)$ *по переменной* x *аналитически продолжаются с интервала* (a, ∞) *в сектор*

$$S=\left\{ z;\ \arg(z-a) < \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right\},$$

причем функции

$$Q_k(z)=\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}\, C_{n-2-\nu}^{k-\nu}\,[q_\nu(z)-A_\nu]^{(k-\nu)},\quad k=0, 1, \cdots, n-2 \tag{4}$$

и $M_0(z, \tau)$ *удовлетворяют оценкам*

$$\int_0^\infty \zeta^k |Q_k(\zeta+z)|\, d\zeta \leqslant h_k(x)\, e^{-b_k x},\quad x=\operatorname{Re} z,\ z\in S,\ k=0, 1, \cdots, n-2, \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \zeta^{n-2}\, |M_0(\zeta+z, \tau)|\, d\zeta < h_{n-1}(x)\, e^{-b_{n-1}\left(x+\frac{\tau}{2}\right)},\quad x=\operatorname{Re} z,\ z\in S,\ \tau\geqslant 0, \tag{6}$$

где $h_k(x)$ $(k=0, 1, \cdots, n-1)$ — *невозрастающие функции на интервале* (a, ∞), *причем функции* $h_k(x)$ $(k=0, 1, \cdots, n-2)$ *и* $(x-a)\, h_{n-1}(x)$ *суммируемы на интервале* (a, ∞), *а* $b_k (k=0, 1, \cdots, n-1)$ — *неотрицательные числа, причем число* $b=\min\{b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}\}$ *может равняться нулю лишь при* $A_k=0$ $(k=0, 1, \cdots, n-3)$. *Тогда для всех* λ *из полуплоскости*

$$\Lambda=\left\{\lambda;\ \operatorname{Re}\lambda \leqslant \frac{b}{2}-\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-3}|A_k|\left(\frac{2}{b}\right)^{k+1}\right\} \tag{7}$$

(при $b=0$ *в качестве* Λ *принимается полуплоскость* $\operatorname{Re}\lambda<0$) *уравнение* (1) *имеет решение* $y(x, \lambda)$, *представимое в виде* (2), *где ядро* $K(x, t)$ $(a\leqslant x\leqslant t<\infty,\ x+t\neq 2a)$ *не зависит от* λ, *непрерывно по совокупности аргументов в области* $a<x\leqslant t<\infty$ *и при каждом* $t>a$ *непрерывно по* x *на отрезке* $[a, t]$. *Кроме того, функция* $K_0(x, \tau)=K(x, x+\tau)$ *при каждом* $\tau\geqslant 0$ *по переменной* x *аналитически продолжается с интервала* (a, ∞) *в сектор* S *и удовлетворяет оценке*

$$|K_0(z, \tau)| < \left[h\left(x+\frac{\tau}{2}\right)+\tau\bar{h}\left(x+\frac{\tau}{2}\right)\right] e^{H(x, \tau)},\quad x=\operatorname{Re} z,\ z\in S,\ \tau>0, \tag{8}$$

где

$$h(x)=\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{2^k}{k!}\, h_k(x)\, e^{-xb_k}, \tag{9}$$

$$\bar{h}(x)=\frac{2^{n-2}(n-1)}{(n-2)!\, n}\, h_{n-1}(x)\, e^{-xb_{n-1}}, \tag{10}$$

$$H(x, \tau)=\tau\left[\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-3}|A_k|\left(\frac{2}{b}\right)^{k+1}\right]+\int_0^{\tau}\left[h\left(x+\frac{u}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+u\,\tilde{h}\left(x+\frac{u}{2}\right)\right]du. \tag{11}$$

Доказательство. При фиксированном λ из области

$$\Omega=\left\{\lambda;\ \pi-\frac{\pi}{n}<\arg\lambda<\pi+\frac{\pi}{n},\ Re\lambda<\frac{b}{2}-\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-3}|A_k|\left(\frac{2}{b}\right)^{k+1}\right\}. \tag{12}$$

рассмотрим на интервале $a<x<\infty$ следующее интегральное уравнение относительно функции $y(x, \lambda)$:

$$y(x, \lambda)=e^{\lambda x}+\sum_{k=0}^{n-3}\frac{A_k}{\lambda^n}\int_x^{\infty}[\varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda)-\lambda^{n-2-k}\varphi'(x-t, \lambda)]\times$$

$$\times[y(t, \lambda)-e^{\lambda t}]\,dt+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{\lambda^n}\int_x^{\infty}\varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda)\,Q_k(t)\,y(t, \lambda)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\lambda^n}\int_x^{\infty}\varphi'(x-t, \lambda)\int_t^{\infty}M(t, \tau)\,y(\tau, \lambda)\,d\tau\,dt, \tag{13}$$

где

$$\varphi(x, \lambda)=\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}e^{\omega_s\lambda x}, \tag{14}$$

$$\omega_s=\exp\left(i\frac{2\pi s}{n}\right),\quad s=0, 1,\cdots, n-1.$$

Докажем, что интегральное уравнение (13) разрешимо, причем определенная из этого уравнения функция $y(x, \lambda)$ представляется в виде (2) и является решением интегро-дифференциального уравнения (1). С этой целью обозначим

$$\tilde{y}(x, \lambda)=e^{-\lambda x}\,y(x, \lambda)-1 \tag{15}$$

и интегральное уравнение (13) перепишем в виде

$$\tilde{y}(x, \lambda)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{\lambda^n}\int_x^{\infty}e^{\lambda(t-x)}\,\varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda)\,Q_k(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\lambda^n}\int_x^{\infty}\varphi'(x-t, \lambda)\int_t^{\infty}e^{\lambda(\tau-x)}M(t, \tau)\,d\tau\,dt+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-3}\frac{A_k}{\lambda^n}\int_x^{\infty}e^{\lambda(t-x)}[\varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda)-\lambda^{n-2-k}\varphi'(x-t, \lambda)]\,\tilde{y}(t, \lambda)\,dt+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{\lambda^n}\int\limits_x^{\infty} e^{\lambda(t-x)}\varphi^{(n-1-k)}(x-t,\lambda)\,Q_k(t)\,\tilde{y}(t,\lambda)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\lambda^n}\int\limits_x^{\infty}\varphi'(x-t,\lambda)\int\limits_t^{\infty} e^{\lambda(\tau-x)}M(t,\tau)\,\tilde{y}(\tau,\lambda)\,d\tau\,dt. \tag{16}$$

Относительно интегрального уравнения (16) применим метод последовательных приближений, т. е. решение $\tilde{y}(x,\lambda)$ этого уравнения ищем в виде ряда

$$\tilde{y}(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{y}_j(x,\lambda), \tag{17}$$

где функции $\tilde{y}_j(x,\lambda)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\tilde{y}_1(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{\lambda^n}\int\limits_x^{\infty} e^{\lambda(t-x)}\varphi^{(n-1-k)}(x-t,\lambda)\,Q_k(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\lambda^n}\int\limits_x^{\infty}\varphi'(x-t,\lambda)\int\limits_t^{\infty} M(t,\tau)\,e^{\lambda(\tau-x)}\,d\tau\,dt, \tag{18}$$

$$\tilde{y}_{j+1}(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n-3}\frac{A_k}{\lambda^n}\int\limits_x^{\infty} e^{\lambda(t-x)}\left[\varphi^{(n-1-k)}(x-t,\lambda)-\right.$$

$$\left.-\lambda^{n-2-k}\varphi'(x-t,\lambda)\right]\tilde{y}_j(t,\lambda)\,dt+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{\lambda^n}\int\limits_x^{\infty} e^{\lambda(t-x)}\varphi^{(n-1-k)}(x-t,\lambda)\,Q_k(t)\,\tilde{y}_j(t,\lambda)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\lambda^n}\int\limits_x^{\infty}\varphi'(x-t,\lambda)\int\limits_t^{\infty} e^{\lambda(\tau-x)}M(t,\tau)\,\tilde{y}_j(\tau,\lambda)\,d\tau\,dt,\ j=1,2,3,\cdots. \tag{19}$$

Методом индукции докажем, что функции $\tilde{y}_j(x,\lambda)$ представляются в виде

$$\tilde{y}_j(x,\lambda)=\int\limits_0^{\infty} e^{\lambda\tau}K_j(x,\tau)\,d\tau,\ j=1,2,3,\cdots, \tag{20}$$

где ядра $K_j(z,\tau)$ определены и непрерывны в области $z\in S$, $0<\tau<<\infty$, при каждом $\tau>0$ голоморфны по z в секторе S и удовлетворяют оценкам

$$|K_j(z,\tau)|<\frac{1}{(j-1)}\left[h\left(Re\,z+\frac{\tau}{2}\right)+\tau\tilde{h}\left(Re\,z+\frac{\tau}{2}\right)\right]H^{j-1}(Re\,z,\tau),$$
$$j=1,2,3,\cdots. \tag{21}$$

С этой целью используем легко проверяемые равенства

$$\frac{1}{\lambda^n} e^{\lambda(t-x)} \varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) =$$

$$= \frac{1}{k!\, n} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\omega_s} - 1\right)^{k+1} \int_x^t (t-v)^k e^{\lambda(1-\omega_s)(v-x)}\, dv, \tag{22}$$

$$\frac{1}{\lambda^n} e^{\lambda(t-x)} \left[\varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) - \lambda^{n-2-k} \varphi'(x-t, \lambda)\right] =$$

$$= \frac{1}{k!\, n} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\omega_s} - 1\right)^{k+1} (1-\omega_s^{k+2}) \int_x^t (t-v)^k e^{\lambda(1-\omega_s)(v-x)}\, dv,$$

$$k = 0, 1, \cdots, n-2. \tag{23}$$

Из соотношения (18) имеем

$$\tilde{y}_1(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{k!\, n} \left(\frac{1}{\omega_s} - 1\right)^{k+1} \int_x^\infty Q_k(t) \int_x^t (t-v)^k e^{\lambda(1-\omega_s)(v-x)} dv\, dt +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-2} \frac{\omega_s (1-\omega_s)^{n-1}}{(n-2)!\, n} \int_x^\infty \int_t^\infty M(t, \tau) \int_x^t (t-v)^{n-2} e^{\lambda[\tau - t + (1-\omega_s)(v-x)]}\, dv\, d\tau\, dt.$$

Отсюда, учитывая обозначение $M_0(x, \xi) = M(x, x+\xi)$, при помощи простых замен переменных и перестановки порядка интегрирования получаем равенство

$$\tilde{y}_1(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{k!\, n} \left(\frac{1}{\omega_s} - 1\right)^{k+1} \int_0^\infty e^{\lambda\xi(1-\omega_s)} \int_0^\infty \zeta^k Q_k(\zeta + x + \xi)\, d\zeta\, d\xi +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\omega_s (1-\omega_s)^{n-1}}{(n-2)!\, n} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\lambda(u+\xi(1-\omega_s))} \int_0^\infty \zeta^{n-2} M_0(\zeta + x + \xi, u)\, d\zeta\, d\xi\, du.$$

Это равенство после замены пременной $\tau = \xi(1-\omega_s)$ принимает вид

$$\tilde{y}_1(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{k!\, n\, \omega_s^{k+1}} \int_{\gamma_s} e^{\lambda\tau} \int_0^\infty \zeta^k Q_k\left(\zeta + x + \frac{\tau}{1-\omega_s}\right) d\zeta\, d\tau +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\omega_s (1-\omega_s)^{n-2}}{(n-2)!\, n} \int_0^\infty \int_{\gamma_s} e^{\lambda(u+\tau)} \int_0^\infty \zeta^{n-2} M_0\left(\zeta + x + \frac{\tau}{1-\omega_s}, u\right) d\zeta\, d\tau\, du, \tag{24}$$

где γ_s—луч $\arg\tau = \arg(1-\omega_s)$.

Заметим, что при $\lambda \in \Omega$ и $z \in S$ имеет место неравенство $|e^{\lambda z}| \leqslant 1$. Поэтому в силу голоморфности функций $Q_k(z)$ и $M_0(z, \xi)$ по переменной z в секторе S и оценок (5) и (6) в формуле (24) интегриревание вдоль луча γ_s можно заменить интегрированием вдоль положительной полуоси:

$$\bar{y}_1(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{k!\, n\, \omega_s^{k+1}} \int_0^{\infty} e^{\lambda\tau} \int_0^{\infty} \zeta^k Q_k\left(\zeta + x + \frac{\tau}{1-\omega_s}\right) d\zeta\, d\tau +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\omega_s (1-\omega_s)^{n-2}}{(n-2)!\, n} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{\lambda(u+\tau)} \int_0^{\infty} \zeta^{n-2} M_0\left(\zeta + x + \frac{\tau}{1-\omega_s}, u\right) d\zeta\, d\tau\, du.$$

Полученное равенство легко приводится к виду

$$\bar{y}_1(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{k!\, n\, \omega_s^{k+1}} \int_0^{\infty} e^{\lambda\tau} \int_0^{\infty} \zeta^k Q_k\left(\zeta + x + \frac{\tau}{1-\omega_s}\right) d\zeta\, d\tau +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\omega_s (1-\omega_s)^{n-2}}{(n-2)!\, n} \int_0^{\infty} e^{\lambda\tau} \int_0^{\tau}\int_0^{\infty} \zeta^{n-2} M_0\left(\zeta + x + \frac{\tau-u}{1-\omega_s}, u\right) d\zeta\, du\, d\tau.$$

Таким образом, получили представление (20) при $j=1$ с ядром

$$K_1(z, \tau) = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{k!\, n\, \omega_s^{k+1}} \int_0^{\infty} \zeta^k Q_k\left(\zeta + z + \frac{\tau}{1-\omega_s}\right) d\zeta +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\omega_s (1-\omega_s)^{n-2}}{(n-2)!\, n} \int_0^{\tau}\int_0^{\infty} \zeta^{n-2} M_0\left(\zeta + z + \frac{\tau-u}{1-\omega_s}, u\right) d\zeta\, du, \tag{25}$$

удовлетворяющим оценке (21) с $j=1$.

Предположим теперь, что при некотором $j \geqslant 1$ представление (20) и оценка (21) верны. Тогда с использованием формул (22) и (23) из соотношения (19) получим равенство

$$\tilde{y}_{j+1}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-3} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{A_k}{k!\, n} \left(\frac{1}{\omega_s} - 1\right)^{k+1} (1-\omega_s^{k+2})\, G_{ks}(x, \lambda) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{k!\, n} \left(\frac{1}{\omega_s} - 1\right)^{k+1} T_{ks}(x, \lambda) + \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\omega_s (1-\omega_s)^{n-1}}{(n-2)!\, n} R_s(x, \lambda), \tag{26}$$

где

$$G_{ks}(x, \lambda) = \int_x^{\infty}\int_0^{\infty} K_j(t, u) \int_x^t (t-v)^k e^{\lambda[u+(1-\omega_s)(v-x)]}\, dv\, du\, dt,$$

$$T_{ks}(x, \lambda) = \int_x^{\infty} Q_k(t) \int_0^{\infty} K_j(t, u) \int_x^t (t-v)^k e^{\lambda[u+(1-\omega_s)(v-x)]}\, dv\, du\, dt,$$

$$R_s(x, \lambda) = \int_x^{\infty}\int_t^{\infty} M(t, \tau) \int_0^{\infty} K_j(\tau, u) \int_x^t (t-v)^{n-2} e^{\lambda[u+\tau-t+(1-\omega_s)(v-x)]}\, dv\, du\, d\tau\, dt.$$

При помощи замен переменных и перестановки порядка интегрирования получаем равенства

$$G_{ks}(x, \lambda)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\lambda[u+(1-\omega_s)\xi]}\int_0^\infty \zeta^k K_j(\zeta+x+\xi,\ u)\,d\zeta\,d\xi\,du,$$

$$T_{ks}(x, \lambda)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\lambda[u+(1-\omega_s)\xi]}\int_0^\infty \zeta^k Q_k(\zeta+x+\xi)\,K_j(\zeta+x+\xi,\ u)\,d\zeta\,d\xi\,du,$$

$$R_s(x, \lambda)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\lambda[u+(1-\omega_s)\xi]}\int_0^\infty \zeta^{n-2}\widetilde{K}_j(\zeta+x+\xi,\ u)\,d\zeta\,d\xi\,du,$$

где для кратности использовано обозначение

$$\widetilde{K}_j(\zeta,\ u)=\int_0^u M_0(\zeta,\ \eta)\,K_j(\zeta+\eta,\ u-\eta)\,d\eta. \tag{27}$$

Эти равенства после замены переменной $w=\xi(1-\omega_s)$ принимают вид

$$G_{ks}(x, \lambda)=\frac{1}{1-\omega_s}\int_0^\infty\int_{\gamma_s} e^{\lambda(u+w)}\int_0^\infty \zeta^k K_j\left(\zeta+x+\frac{w}{1-\omega_s},\ u\right)d\zeta\,dw\,du,$$

$$T_{ks}(x, \lambda)=\frac{1}{1-\omega_s}\int_0^\infty\int_{\gamma_s} e^{\lambda(u+w)}\int_0^\infty \zeta^k\,\times$$

$$\times\,Q_k\left(\zeta+x+\frac{w}{1-\omega_s}\right)K_j\left(\zeta+x+\frac{w}{1-\omega_s},\ u\right)d\zeta\,dw\,du,$$

$$R_s(x, \lambda)=\frac{1}{1-\omega_s}\int_0^\infty\int_{\gamma_s} e^{\lambda(u+w)}\int_0^\infty \zeta^{n-2}\widetilde{K}_j\left(\zeta+x+\frac{w}{1-\omega_s},\ u\right)d\zeta\,dw\,du.$$

В силу наложенных на функции $Q_k(z)$, $M_0(z, \tau)$ и $K_j(z, \tau)$ условий, в полученных равенствах интегрирование вдоль луча γ_s можно заменить интегрированием вдоль положительной полуоси:

$$G_{ks}(x, \lambda)=\frac{1}{1-\omega_s}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\lambda(u+w)}\int_0^\infty \zeta^k K_j\left(\zeta+x+\frac{w}{1-\omega_s},\ u\right)d\zeta\,dw\,du,$$

$$T_{ks}(x, \lambda)=\frac{1}{1-\omega_s}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\lambda(u+w)}\int_0^\infty \zeta^k Q_k\left(\zeta+x+\frac{w}{1-\omega_s}\right)\times$$

$$\times\,K_j\left(\zeta+x+\frac{w}{1-\omega_s},\ u\right)d\zeta\,dw\,du,$$

$$R_s(x, \lambda) = \frac{1}{1-\omega_s} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\lambda(u+w)} \int_0^\infty \zeta^{n-2} \widetilde{K}_j\left(\zeta + x + \frac{w}{1-\omega_s}, u\right) d\zeta\, dw\, du.$$

Отсюда легко получаются равенства

$$G_{ks}(x, \lambda) = \frac{1}{1-\omega_s} \int_0^\infty e^{\lambda\tau} \int_0^\tau \int_0^\infty \zeta^k K_j\left(\zeta + x + \frac{\tau - u}{1-\omega_s}, u\right) d\zeta\, du\, d\tau, \quad (28)$$

$$T_{ks}(x, \lambda) = \frac{1}{1-\omega_s} \int_0^\infty e^{\lambda\tau} \int_0^\tau \int_0^\infty \zeta^k Q_k\left(\zeta + x + \frac{\tau - u}{1-\omega_s}\right) \times$$

$$\times K_j\left(\zeta + x + \frac{\tau - u}{1-\omega_s}, u\right) d\zeta\, du\, d\tau, \quad (29)$$

$$R_s(x, \lambda) = \frac{1}{1-\omega_s} \int_0^\infty e^{\lambda\tau} \int_0^\tau \int_0^\infty \zeta^k \widetilde{K}_j\left(\zeta + x + \frac{\tau - u}{1-\omega_s}, u\right) d\zeta\, du\, d\tau. \quad (30)$$

Из равенств (26), (28), (29) и (30) получаем представление

$$\tilde{y}_{j+1}(x, \lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda\tau} K_{j+1}(x, \tau)\, d\tau,$$

где ядро $K_{j+1}(z, \tau)$ определяется по формуле

$$K_{j+1}(z, \tau) = \sum_{k=0}^{n-3} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{A_k (1-\omega_s)^k}{k!\, n\, \omega_s^{k+1}} (1 - \omega_s^{k+2}) \times$$

$$\times \int_0^\tau \int_0^\infty \zeta^k K_j\left(\zeta + z + \frac{\tau - u}{1-\omega_s}, u\right) d\zeta\, du + \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{k!\, n\, \omega_s^{k+1}} \times$$

$$\times \int_0^\tau \int_0^\infty \zeta^k Q_k\left(\zeta + z + \frac{\tau - u}{1-\omega_s}\right) K_j\left(\zeta + z + \frac{\tau - u}{1-\omega_s}, u\right) d\zeta\, du +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\omega_s (1-\omega_s)^{n-2}}{(n-2)!\, n} \int_0^\tau \int_0^u \int_0^\infty \zeta^{n-2} M_0\left(\zeta + z + \frac{\tau - u}{1-\omega_s}, \eta\right) \times$$

$$\times K_j\left(\zeta + \eta + z + \frac{\tau - u}{1-\omega_s}, u - \eta\right) d\zeta\, d\eta\, du \quad (31)$$

(при этом мы учли обозначение (27)).

Выведем оценку для ядра $K_j(z, \tau)$. Заметим, что в оценке (21) функции $h(x)$, $\tilde{h}(x)$ и $H(x, \tau)$ монотонно убывают по x.

Учитывая это, из формулы (31) получаем следующее неравенство, где использованы оценки (5), (6), (21)) и обозначения (9), (10) и $x = Re\, z$:

$$|K_{j+1}(z, \tau)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-3} \frac{2^{k+1}(n-1)|A_k|}{(j-1)!\,k!\,n} \int_0^\tau H^{j-1}\left(x+\frac{\tau-u}{2}, u\right) \times$$

$$\times \int_0^\infty \zeta^k \left[h\left(\zeta+x+\frac{\tau}{2}\right) + u\tilde{h}\left(\zeta+x+\frac{\tau}{2}\right)\right] d\zeta\, du +$$

$$+ \frac{1}{(j-1)!}\left[h\left(x+\frac{\tau}{2}\right) + \tau\tilde{h}\left(x+\frac{\tau}{2}\right)\right] \int_0^\tau h\left(x+\frac{\tau-u}{2}\right) \times$$

$$\times H^{j-1}\left(x+\frac{\tau-u}{2}, u\right) du + \frac{1}{(j-1)!}\left[h\left(x+\frac{\tau}{2}\right) + \tau\tilde{h}\left(x+\frac{\tau}{2}\right)\right] \times$$

$$\times \int_0^\tau \int_0^u \tilde{h}\left(x+\frac{\tau-u+\eta}{2}\right) H^{j-1}\left(x+\eta+\frac{\tau-u}{2}, u-\eta\right) d\eta\, du. \tag{32}$$

Однако в силу (9) и (10) имеет место неравенство

$$\int_0^\infty \zeta^k \left[h\left(\zeta+x+\frac{\tau}{2}\right) + u\tilde{h}\left(\zeta+x+\frac{\tau}{2}\right)\right] d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k!}{b^{k+1}} \left[h\left(x+\frac{\tau}{2}\right) + u\tilde{h}\left(x+\frac{\tau}{2}\right)\right], \tag{33}$$

где $b = \min\{b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}\}$. Кроме того

$$\int_0^\tau \int_0^u \tilde{h}\left(x+\frac{\tau-u+\eta}{2}\right) H^{j-1}\left(x+\eta+\frac{\tau-u}{2}, u-\eta\right) d\eta\, du \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\tau \int_0^u \tilde{h}\left(x+\frac{\tau-u+\eta}{2}\right) H^{j-1}\left(x+\frac{\tau-u+\eta}{2}, u-\eta\right) d\eta\, du =$$

$$= \int_0^\tau (\tau-u)\,\tilde{h}\left(x+\frac{\tau-u}{2}\right) H^{j-1}\left(x+\frac{\tau-u}{2}, u\right) du. \tag{34}$$

Из неравенств (32) — (34) следует, что

$$|K_{j+1}(z, \tau)| \leqslant \frac{1}{(j-1)!}\left[h\left(x+\frac{\tau}{2}\right) + \tau\tilde{h}\left(x+\frac{\tau}{2}\right)\right] \times$$

$$\times \int_0^\tau H^{j-1}\left(x+\frac{u}{2}, \tau-u\right)\left[\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-3}|A_k|\left(\frac{2}{b}\right)^{k+1} +\right.$$

$$\left. + h\left(x+\frac{u}{2}\right) + u\tilde{h}\left(x+\frac{u}{2}\right)\right] du.$$

Заметим, что в силу (11)

$$\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-3}|A_k|\left(\frac{2}{b}\right)^{k+1}+h\left(x+\frac{u}{2}\right)+u\tilde{h}\left(x+\frac{u}{2}\right)=\frac{d}{du}H(x, u),$$

$$H\left(x+\frac{u}{2}, \tau-u\right)\leqslant H(x, \tau)-H(x, u).$$

Поэтому

$$|K_{j+1}(z, \tau)|\leqslant\frac{1}{(j-1)!}\left[h\left(x+\frac{\tau}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\tau\tilde{h}\left(x+\frac{\tau}{2}\right)\right]\int_0^\tau[H(x, \tau)-H(x, u)]^{j-1}\,dH(x, u)=$$

$$=\frac{1}{j!}\left[h\left(x+\frac{\tau}{2}\right)+\tau\tilde{h}\left(x+\frac{\tau}{2}\right)\right]H^j(x, \tau).$$

Тем самым возможность представления функций $\tilde{y}_j(x, \lambda)$ $(j=1, 2, 3, \cdots)$ в виде (20) и справедливость оценок (21) доказаны:

В силу оценок (21) сходится ряд

$$K_0(z, \tau)=\sum_{j=1}^{\infty}K_j(z, \tau),\ z\in S,\ \tau\geqslant 0; \tag{35}$$

а его сумма удовлетворяет оценке (8). Кроме того, из равенств (25) и (31) следует, что функция $K_0(z, \xi)$ удовлетворяет интегральную уравнению

$$K_0(z, \tau)=\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(1-\omega_s)^k}{k!\,n\,\omega_s^{k+1}}\int_0^\infty\zeta^k Q_k\left(\zeta+z+\frac{\tau}{1-\omega_s}\right)d\zeta+$$

$$+\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\omega_s(1-\omega_s)^{n-2}}{(n-2)!\,n}\int_0^\tau\int_0^\infty\zeta^{n-2}M_0\left(\zeta+z+\frac{\tau-u}{1-\omega_s}, u\right)d\zeta\,du+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-3}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{A_k(1-\omega_s)^k}{k!\,n\,\omega_s^{k+1}}(1-\omega_s^{k+2})\int_0^\tau\int_0^\infty\zeta^k K_0\left(\zeta+z+\frac{\tau-u}{1-\omega_s}, u\right)d\zeta\,du+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(1-\omega_s)^k}{k!\,n\,\omega_s^{k+1}}\int_0^\tau\int_0^\infty\zeta^k Q_k\left(\zeta+z+\frac{\tau-u}{1-\omega_s}\right)\times$$

$$K_0\left(\zeta+z+\frac{\tau-u}{1-\omega_s}, u\right)d\zeta\,du+$$

$$+\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\omega_s(1-\omega_s)^{n-2}}{(n-2)!\,n}\int_0^\tau\int_0^u\int_0^\infty\zeta^{n-2}M_0\left(\zeta+z+\frac{\tau-u}{1-\omega_s}, \eta\right)\times$$

$$\times K_0\left(\zeta+z+\eta+\frac{\tau-u}{1-\omega_s}, u-\eta\right)d\zeta\,d\eta\,du. \tag{36}$$

Из представления (20) и сходимости ряда (35) следует, что сходится также ряд (17), а его сумма $\bar{y}(x, \lambda)$ представляется в виде

$$\bar{y}(x, \lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda\tau} K_0(x, \tau)\, d\tau. \qquad (37)$$

Таким образом, разрешимость интегрального уравнения (13) доказана. Из равенств (15) и (37) для решения $y(x, \lambda)$ интегрального уравнения (13) получаем представление

$$y(x, \lambda) = e^{\lambda x}\left[1 + \int_0^\infty e^{\lambda\tau} K_0(x, \tau)\, d\tau\right], \quad a < x < \infty, \qquad (38)$$

которое можно записать также в виде (2) с ядром $K(x, t) = K_0(x, t - x)$.

Покажем, что при каждом $\tau \geqslant 0$ ядро $K_0(z, \tau)$ имеет граничные значения во всех точках $z\,(z + \tau \neq a)$ границы ∂S сектора S. Действительно, пусть $z_0 \in \partial S$ и $z_0 + \tau \neq a$. Легко заметить, что правая часть равенства (36), а следовательно и функция $K_0(z, \tau)$, стремится к конечному пределу, когда $z \to z_0$ по пути, параллельному вещественной оси. Но тогда функция $K_0(z, \tau)$ стремится к этому пределу, когда $z \to z_0$ по любому некасательному к границе ∂S пути (см. книгу И. И. Привалова [4], стр. 31). Очевидно, что ядро $K(x, t)$ непрерывно в области $a < x \leqslant t < \infty$. Положим в равенстве (36) $z = x$ и $\tau = t - x$, где $a < x < t < \infty$. Указанным способом можно доказать, что правая часть полученного равенства, а следовательно и функция $K(x, t)$, стремится к конечному пределу при $x \to a$. Тем самым ядро $K(k, t)$ определяется в области $a \leqslant x \leqslant t < \infty$, $x + t \neq 2a$. Отсюда следует, что функция $y(x, \lambda)$ стремится к конечному пределу $y(a, \lambda)$ при $x \to a$ и представления (2) и (38) справедливы также при $x = a$.

Теперь убедимся в том, что функция $y(x, \lambda)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (1). Из представления (38) и оценки (8) следует, что при каждом $\lambda \in \Omega$ (см. (12)) функция $e^{-\lambda x}\, y(x, \lambda)$ ограничена на интервале (a, ∞). На этом интервале ограничены также функции $e^{\lambda x}\varphi^{(k)}(-x, \lambda)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$. Непосредственно из формулы (14) следует, что функция $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет равенствам $\varphi^{(n)}(x, \lambda) = \lambda^n \varphi(x, \lambda)$, $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi^{(\nu)}(0, \lambda) = 0$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n-1)$. Если обе части равенства (13) продифференцировать n раз и учесть равенство (3) и указанные свойства функций $\varphi(x, \lambda)$ и $y(x, \lambda)$, то, как нетрудно убедиться, получим равенство

$$y^{(n)}(x, \lambda) = \rho\, y(x, \lambda) - \sum_{k=0}^{n-2} A_{n-2-k}\, y^{(k)}(x, \lambda) -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-2} \left[Q_k(x)\, y(x, \lambda)\right]^{(n-2-k)} - \int_x^\infty M(x, \tau)\, y(\tau, \lambda)\, d\tau.$$

Полученное равенство с использованием формул (4) легко приводится к виду (1).

Заметим, что в силу оценки (8) правая часть формулы (38) определена для всех λ из замкнутой полуплоскости Λ (см. (7)), которая содержит область Ω. Остается показать, что определенная по формуле (38) функция $y(x, \lambda)$ является решением интегро-дифференциального уравнения (1) при всех λ из полуплоскости Λ. Для этого достаточно доказать, что все производные по x функции $y(x, \lambda)$ до порядка n включительно голоморфны в полуплоскости Λ и непрерывны вплоть до ее границы. С этой целью воспользуемся формулой Коши

$$K_0(x, \tau)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S}\frac{K_0(\zeta, \tau)}{\zeta-x}\,d\zeta,\quad a<x<\infty.$$

Отсюда имеем

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}K_0(x, \tau)=\frac{\nu!}{2\pi i}\int\limits_{\partial S}\frac{K_0(\zeta, \tau)}{(\zeta-x)^{\nu+1}}\,d\zeta,\quad \nu=1, 2, 3,\cdots.$$

Из этих равенств с учетом (8) легко получаются оценки

$$\left|\frac{d^\nu}{dx^\nu}K_0(x, \tau)\right|\leqslant\nu!\left[(x-a)\cos\frac{\pi}{n}\right]^{-\nu}\left[h\left(a+\frac{\tau}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\tau\tilde{h}\left(a+\frac{\tau}{2}\right)\right]e^{H(a, \tau)},\quad \nu=1, 2, 3,\cdots.$$

В силу полученных оценок из формулы (38) вытекает требуемое свойство функции $y(x, \lambda)$. Теорема доказана.

Ереванский государственный университет,
Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 1.IV.1987

Ս. Վ. ԲԱԲԱՍՅԱՆ, Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Բարձր կարգի ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների համար ձևափոխության օպերատորի մասին *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է կամայական կարգի սովորական գծային ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարում, որի գործակիցներն անվերջությունում ձգտում են վերջավոր սահմանների։ Նշված են էֆեկտիվ բավարար պայմաններ դիֆերենցիալ արտահայտության գործակիցների և ինտեգրալ արտահայտության կորիզի վրա, որոնց դեպքում գոյություն ունի ձևափոխության օպերատոր։

S. V. BABASIAN, I. G. KHACHATRIAN. *On transformation operator for integro-differential equations of high order* (summary)

The ordinary linear integro-differential equation of arbitrary order with the coefficients which converge at infinity to a finte limit is considered. Effective sufficient conditions on the coefficients of the differential expression and the kernel of the integral expression, under which the transform operator exists, are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Г. Хачатрян.* О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, сохраняющего асимптотику решений, Изв. АН АрмССР, серия матем., 14, № 6, 1979, 424—445.
2. *Б. Я. Левин.* Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка, ДАН СССР, 106, № 2, 1956, 187—190.
3. *В. А. Марченко.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, Киев, «Наукова думка», 1977.
4. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., Ленинград, «Гос. изд. технико-теор. лит.», 1950.