ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 6, 1989 Математика

УДК 517.547

М. М. ДЖРБАШЯН, А. О КАРАПЕТЯН

ИНЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ОБОБЩЕННОМ ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

§ 0. Введение

0.1. В работах [1, 2] 40-х годов одного из авторов впервые были введены классы $H^p(\alpha)$ $(1 \leqslant p < +\infty,\ -1 < \alpha < +\infty)$ голоморфных в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z)$, подчиненных условию, вида

$$\iint\limits_{D} |f(\zeta)|^p \cdot (1 - |\zeta|^2)^\alpha \, d\xi d\eta < +\infty^{*} \qquad (\zeta = \xi + i\eta). \tag{0.1}$$

Здесь, во-первых, была установлена

Теорема I. *Любая функция* $f(z) \in H^p(\alpha)$ $(1 \leqslant p < +\infty\ -1 < \alpha < +\infty)$ *допускает интегральное представление*

$$f(z) = \frac{1+\alpha}{\pi} \iint\limits_{D} \frac{f(\zeta) \cdot (1 - |\zeta|^2)^\alpha}{(1 - z \cdot \bar{\zeta})^{2+\alpha}} \, d\xi d\eta, \quad z \in D. \tag{0.2}$$

Этот основной результат впоследствии положил начало целой серии работ, посвященных интегральным и факторизационным представлениям для широких классов мероморфных функций и нашел существенные применения в решении ряда задач комплексного анализа. Краткий обзор результатов, установленных в указанной серии работ приводится в статьях [3, 4]. Доказательства как первоначальных результатов работ [1, 2], так и дальнейших их многочисленных применений, изложены в монографии [5]. Одновременно, по мере того, как выяснилась важность введения классов $H^p(\alpha)$ и их интегрального представления, все чаще стали появляться исследования, посвященные установлению их аналогов в многомерном комплексном анализе.

Здесь, во-первых, следует отметить монографию Хуа Ло-кена [6], где для так называемых классических многомерных областей были получены интегральные представления типа (0.2) для определенных классов голоморфных функций из пространств L^2, но без веса. В интересах дальнейшего изложения считаем целесообразным привести один из основных результатов, установленных в монографии [6]. Но для этого нам следует привести формулировки некоторых необходи

---

* Считаем не лишним отметить, что в последние годы рядом авторов вопреки этому неоспоримому факту и в нарушение элементарных норм научной этики, классы $H^p(\alpha)$ именуются „пространства Бергмана A^p_α“.

мых понятий и ввести нужные обозначения, которые лежат в основе изложения § 1. настоящей работы.

Обозначим через $M_{m,n}$ $(m\geqslant 1,\ n\geqslant 1)$ множество всех комплексных матриц из m строк и n столбцов. Если $\zeta\in M_{m,n}$, то через $\zeta^*\in M_{n,m}$ обозначается эрмитово сопряженная к ζ матрица, а через $I^{(m)}\in M_{m,m}$ $(m\geqslant 1)$ — квадратная единичная матрица порядка m.

Наконец, через $R_{m,n}$ обозначим область, состоящую из тех матриц $\zeta\in M_{m,n}$, для которых матрица

$$I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*\in M_{m,m} \tag{0.3}$$

положительно определена.

Полезно отметить, что $M_{1,n}$ суть обычное комплексное координатное пространство $\mathbf{C}^n$, и при этом $R_{1,n}$ представляет собой единичный шар $\mathbf{B}_n=\{\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\in\mathbf{C}^n\colon |\zeta|^2=\sum\limits_{k=1}^{n}|\zeta_k|^2<1\}$ в $\mathbf{C}^n$.

Положим еще, что $d\mu_{m,n}(\zeta)$ — элемент объема в $M_{m,n}$, т. е.

$$d\mu_{m,n}(\zeta)=\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} dm_2(\zeta_{ij}), \tag{0.4}$$

где $\zeta=(\zeta_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}\in M_{m,n}$ и $m_2(\zeta_{ij})$ — мера Лебега в плоскости комплексного переменного ζ_{ij}.

Тогда справедлива следующая ([6])

Теорема II. *Пусть $f(Z)\in L^2(R_{m,n})$ — любая голоморфная в области $R_{m,n}$ функция.*

Тогда справедлива интегральная формула

$$f(Z)=\frac{1}{V_{m,n}}\cdot\int\limits_{R_{m,n}}\frac{f(\zeta)\,d\mu_{m,n}(\zeta)}{[\det(I^{(m)}-Z\cdot\zeta^*)]^{m+n}},\quad Z\in R_{m,n} \tag{0.5}$$

где $V_{m,n}$ — объем области $R_{m,n}$.

Отметим, что поскольку при $m=n=1$ $R_{m,n}$, очевидно, совпадает с единичным кругом $\mathbf{D}$ комплексной плоскости $\mathbf{C}$, то утверждение теоремы II является многомерным обобщением теоремы I, но лишь для значений параметров $p=2$ и $\alpha=0$.

Кроме того, при $m=1$, $n\geqslant 1$ теорема II устанавливает интегральное представление голоморфных в единичном шаре $\mathbf{B}_n\subset\mathbf{C}^n$ функций из пространства L^2, но без веса.

0.2. Таким образом, теорема II оставляет открытым вопрос о существовании аналогичных с (0.2) многомерных представлений для голоморфных функций из весовых L^p-пространств, когда параметр $p\in\in[1,+\infty)$. Но в последующих после монографии [6] работах ряда авторов для определенных областей было достигнуто решение этой задачи.

Чтобы сформулировать соответствующие результаты, введем некоторые необходимые обозначения.

Если $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n$ и $\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\in\mathbf{C}^n$, то положим

$$<z, \zeta> = \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \bar{\zeta}_k, \tag{0.6}$$

Далее, согласно общему определению (0.4), $\mu_{1,n}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbf{C}^n$, будет обозначать $2n$-мерную меру Лебега в пространстве $\mathbf{C}^n \cong \mathbf{R}^{2n}$.

Тогда справедлива следующая

Теорема III. *Пусть* $1 \leqslant p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$ *и комплексное число* β *выбрано так*:

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}\beta > \frac{1+\alpha}{p} - 1, \text{ при } 1 < p < +\infty, \\ \operatorname{Re}\beta \geqslant \alpha, \text{ при } p = 1. \end{gathered} \tag{0.7}$$

Тогда любая функция $f(z)$, *голоморфная в единичном шаре*

$$\mathbf{B}_n = \{\zeta \in \mathbf{C}^n: |\zeta| < 1\}$$

и удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathbf{B}_n} |f(\zeta)|^p \cdot (1 - |\zeta|^2)^\alpha d\mu_{1,n}(\zeta) < +\infty, \tag{0.8}$$

допускает интегральное представление

$$f(z) = \frac{\Gamma(1+n+\beta)}{\Gamma(1+\beta) \cdot \pi^n} \cdot \int_{\mathbf{B}_n} \frac{f(\zeta) \cdot (1 - |\zeta|^2)^\beta \, d\mu_{1,n}(\zeta)}{(1 - <z, \zeta>)^{1+n+\beta}}, \quad z \in \mathbf{B}_n. \tag{0.9}$$

Легко видеть, что при $n = 1$, т. е. для единичного круга $D \subset \mathbf{C}$ утверждение этой теоремы просто следует из приведенной выше теоремы I из работ [1, 2], а при $n > 1$, но $\alpha = 0$, она впервые была установлена в работе Форелли и Рудина [7], где к тому же случай $p = 1$, $\operatorname{Re}\beta = 0$ оказался вне рассмотрения. В недавней обзорной статье [4] одного из авторов данной работы показано, что сформулированный выше результат в наиболее общем случае, т. е. при $n > 1$ и $-1 < \alpha < +\infty$, может быть установлен методом, развитым в его работах [1, 2] в ходе доказательства теоремы I*. По ходу заметим, что утверждение теоремы III является существенным обобщением теоремы II, но лишь при $m = 1$, $n \geqslant 1$. Наконец, следует отметить, что в работе Штолля [8] для произвольных ограниченных симметрических областей, включающих в себя и области $R_{m,n}(m, n \geqslant 1)$, был установлен аналог интегрального представления (0.9), но, как и в работе Форелли и Рудина [7], для пространств без веса.

0.3. Настоящая работа посвящена установлению далеко идущих обобщений теорем I, II и III — установлению интегральных представлений функций, голоморфных в многомерных областях типа $R_{m,n}(m, n \geqslant 1)$ и принадлежащих там надлежащим весовым пространствам $L^p (1 \leqslant p < +\infty)$.

---

* В работе [4] параметр β в условиях (0.7) предполагается вещественным, однако доказательство по существу остается тем же и для комплексных значений β.

В § 1 работы приводится краткая сводка всех необходимых для дальнейшего изложения сведений из области анализа, линейной алгебры, теории меры и интегрирования, что, по убеждению авторов, существенно облегчает чтение статьи в целом.

В § 2 прежде всего изучаются свойства матричных областей $R_{m,n}$ $(m, n \geqslant 1)$ (предложение 2.2). Далее, при $0 < p + \infty$, $-\infty < \alpha < < +\infty$ вводятся классы $H^p_\alpha(R_{m,n})$ голоморфных в областях $R_{m,n}$ функций f, подчиненных условию

$$\int\limits_{R_{m,n}} |f(\zeta)|^p \cdot [\det(I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^\alpha \, d\mu_{m,n}(\zeta) < +\infty, \tag{0.10}$$

которое при $m = 1$, $n \geqslant 1$ совпадает с (0.8), а при $m = n = 1$ — с (0.1) Затем, на основании развитой в монографии [6] техники интегрирования в областях $R_{m,n}$ $(m, n \geqslant 1)$ устанавливается ряд важных свойств классов $H^p_\alpha(R_{m,n})$ (предложения 2.4—2.6).

В § 3 устанавливаются основные интегральные представления классов $H^p_\alpha(R_{m,n})$, $1 \leqslant p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$ (теоремы 3.1—3.3). Точнее, доказывается (см. теорему 3.3), что каждая функция $f \in H^p_\alpha(R_{m,n})$ допускает интегральное представление вида

$$f(Z) = c_{m,n}(\beta) \cdot \int\limits_{R_{m,n}} \frac{f(\zeta) \cdot [\det(I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^\beta \, d\mu_{m,n}(\zeta)}{[\det(I^{(m)} - Z \cdot \zeta^*)]^{m+n+\beta}}, \tag{0.11}$$

$$Z \in R_{m,n},$$

где $\beta \in C$, $\operatorname{Re}\beta > \dfrac{1+\alpha}{p} - 1$ $(1 < p < +\infty)$ и $\operatorname{Re}\beta \geqslant \alpha$ $(p = 1)$.

Таким образом, устанавливаемая нами теорема 3.3 является обобщением теоремы III и в точности совпадает с ней при $m = 1$, $n \geqslant 1$. С другой стороны, наш результат представляет собой существенное обобщение теоремы II, совпадая с ней лишь для специальных значений параметров $p = 2$, $\beta = \alpha = 0$. При этом развитые в монографии [6] методы доказательства теоремы II оказываются принципиально неприменимыми в случае гораздо более общего утверждения теоремы 3.3, когда $-1 < \alpha < +\infty$ и к тому же $1 \leqslant p < +\infty$. Приводимое нами доказательство интегрального представления (0.11), расчлененное ради удобства на последовательные шаги (см. теоремы 3.1—3.3), во многих отношениях близко к данным в работах [1, 2] и [4] доказательствам теорем I и III. Более того, мы существенно используем интегральное представление (0.9).

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Обозначим через $M_{m,n}$ $(m \geqslant 1, n \geqslant 1)$ множество всех комплексных матриц, состоящих из m строк и n столбцов. Каждую матрицу $A \in M_{m,n}$ принято записывать в виде

$$A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m,\, 1 \leqslant j \leqslant n}, \tag{1.1}$$

где $a_{ij} \in C$ — элемент матрицы A.

(а) На множестве комплексных матриц $M_{m,n}$ естественным образом вводятся операции сложения матриц и умножения комплексных чисел на матрицы. Как известно, это делается таким образом: если $A=(a_{ij})_{1\le i\le m,\,1\le j\le n}\in M_{m,n}$, $B=(b_{ij})_{1\le i\le m,\,1\le j\le n}\in M_{m,n}$, $\alpha\in\mathbf{C}$, то вводятся матрицы

$$\begin{aligned} A+B&=(a_{ij}+b_{ij})_{1\le i\le m,\,1\le j\le n},\\ \alpha\cdot A&=(\alpha\cdot a_{ij})_{1\le i\le m,\,1\le j\le n}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

очевидно, входящие в $M_{m,n}$.

Нетрудно убедиться в том, что после введения указанных операций, множество $M_{m,n}$ можно рассматривать как $m\times n$-мерное векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$.

(б) Если

$$\begin{aligned} A&=(a_{ij})_{1\le i\le m,\,1\le j\le n}\in M_{m,n},\\ B&=(b_{jk})_{1\le j\le n,\,1\le k\le l}\in M_{n,l}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

то произведение этих матриц определяется таким образом:

$$A\cdot B=(\gamma_{ik})_{1\le i\le m,\,1\le k\le l}\in M_{m,l}, \tag{1.4}$$

где

$$\gamma_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk}\ (1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant k\leqslant l). \tag{1.4'}$$

Операция умножения (1.4) ассоциативна, дистрибутивна (как справа, так и слева) относительно сложения матриц и удовлетворяет соотношениям

$$\alpha\cdot(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B=A\cdot(\alpha\cdot B)$$

для любых $\alpha\in\mathbf{C}$, $A\in M_{m,n}$, $B\in M_{n,l}$ и для произвольных $m,\ n,\ l\geqslant 1$.

(в) В предположении $A=(a_{ij})_{1\le i\le m,\,1\le j\le n}\in M_{m,n}$ эрмитово сопряженной к A называется матрица

$$A^*=(\gamma_{ji})_{1\le j\le n,\,1\le i\le m}\in M_{n,m},$$

где $\gamma_{ji}=\overline{a_{ij}}$.

Следующие известные соотношения легко проверяются:

$$\begin{aligned} (A+B)^*&=A^*+B^*;\ A,\ B\in M_{m,n},\\ (\alpha\cdot A)^*&=\bar{\alpha}\cdot A^*,\ (A^*)^*=A;\ \alpha\in\mathbf{C},\ \alpha\in M_{m,n},\\ (A\cdot B)^*&=B^*\cdot A^*;\ A\in M_{m,n},\ B\in M_{n,l}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.2. (а) Несколько подробнее рассмотрим тот случай, когда $m=n\geqslant 1$, т. е. когда $M_{m,n}=M_{m,m}$ совпадает с множеством всех квадратных комплексных матриц порядка $m\geqslant 1$. Каждой такой матрице $A\in M_{m,m}\,(m\geqslant 1)$ сопоставим ее комплексный определитель — $\det(A)$, вычисляемый по известным правилам. Отметим здесь пока лишь некоторые из наиболее употребляемых нами известных соотношений этих определителей:

$$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B);\ A,\ B\in M_{m,\,m},$$
$$\det(\alpha\cdot A)=\alpha^m\cdot\det(A);\ \alpha\in\mathbf{C},\ A\in M_{m,\,m},\tag{1.6}$$
$$\det(A^*)=\overline{\det(A)};\ A\in M_{m,\,m}.$$

(б) Матрица $A\in M_{m,\,m}$, как известно, называется обратимой, если существует матрица $B\in M_{m,\,m}$ такая, что

$$A\cdot B=B\cdot A=I^{(m)},\tag{1.7}$$

где $I^{(m)}\in M_{m,\,m}$ — единичная матрица.

Известно, что если существует матрица $B\in M_{m,\,m}$, обладающая свойством (1.7), то она единственна. Эту матрицу принято обозначать через A^{-1}, и для ее существования, т. е. для обратимости матрицы A необходимо и достаточно, чтобы

$$\det(A)\neq 0.\tag{1.8}$$

Наконец, положив

$$M^*_{m,\,m}=\{A\in M_{m,\,m}:\det(A)\neq 0\},\tag{1.9}$$

отметим, что $M^*_{m,\,m}$ суть множество всех обратимых матриц из пространства $M_{m,\,m}$.

1.3. Матрицу $A\in M_{m,\,m}$ принято называть эрмитовой, если $A=A^*$. Подмножество всех эрмитовых матриц из $M_{m,\,m}$ обозначим через H_m; оно з мкнуто относительно сложения матриц и их умножения на вещественное число.

Вкратце укажем ряд известных свойств эрмитовых матриц, необходимых нам дальше:

единичная матрица $I^{(m)}\in M_{m,\,m}$ эрмитова;

если A — обратимая эрмитова матрица, то и матрица A^{-1} эрмитова;

если $A\in\mathrm{H}_n$ и $B\in M_{m,\,n}$, то $B\cdot A\cdot B^*\in\mathrm{H}_m$; в частности, если $B\in M_{m,\,n}$, то $B\cdot B^*\in\mathrm{H}_m$;

если $A\in\mathrm{H}_m$, то $\det(A)$ является вещественным числом.

(б) Любую матрицу $A\in M_{m,\,m}$ можно единственным образом представить в виде

$$A=B+iC;\ B,\ C\in\mathrm{H}_m.\tag{1.10}$$

Кроме того, матрицы B и C представимы в виде

$$B=\frac{1}{2}(A+A^*),\ C=\frac{1}{2i}(A-A^*),\tag{1.11}$$

притом здесь будем употреблять также обозначения

$$B=\mathrm{Re}\,A,\ C=\mathrm{Im}\,A.$$

Легко видеть также, что для любой матрицы $A\in M_{m,\,m}$

$$\mathrm{Re}(A^*)=\mathrm{Re}\,A,\ \mathrm{Im}(A^*)=-\mathrm{Im}\,A$$

и еще, что если $A_1,\ A_2\in M_{m,\,m}$, $\alpha_1,\ \alpha_2\in\mathbf{R}$, то

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\alpha_1\cdot A_1+\alpha_2\cdot A_2)&=\alpha_1\cdot\mathrm{Re}\,A_1+\alpha_2\cdot\mathrm{Re}\,A_2,\\ \mathrm{Im}(\alpha_1\cdot A_1+\alpha_2\cdot A_2)&=\alpha_1\cdot\mathrm{Im}\,A_1+\alpha_2\cdot\mathrm{Im}\,A_2.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Далее напомним, что выше, во введении, мы уже указывали на очевидное утверждение

$$\mathbf{C}^m = M_{1,m} \ (m \geqslant 1). \tag{1.13}$$

Иначе говоря, элементы $\mathbf{C}^m$ можно считать комплексными матрицами из одной строки и m столбцов, обстоятельство, которое будет учтено нами в дальнейшем.

Как отмечалось в § 0, для двух элементов

$$u = (u_1, \cdots, u_m) \in \mathbf{C}^m, \ v = (v_1, \cdots, v_m) \in \mathbf{C}^m$$

вводится их скалярное произведение

$$< u, v > = \sum_{k=1}^{m} u_k \cdot \bar{v}_k, \tag{1.14}$$

а также произведение $u \cdot A \in \mathbf{C}^m = M_{1,m}$ двух матриц $u \in \mathbf{C}^m = M_{1,m}$ и $A \in M_{m,m}$. Произведение $u \cdot A$ принято называть действием матрицы A на элемент u.

Известно, что матрица $A \in M_{m,m}$ будет эрмитовой лишь в том случае, когда для всех $u \in \mathbf{C}^m$

$$\operatorname{Im} < u \cdot A, u > = 0. \tag{1.15}$$

(в) Определение. Пусть $A \in M_{m,m}$ — произвольная эрмитова матрица из H_m. Матрицу A будем называть неотрицательно определенной и писать $A \geqslant 0$, если для любого элемента $u \in \mathbf{C}^m$

$$< u \cdot A, u > \geqslant 0. \tag{1.16}$$

Матрицу A будем называть положительно определенной и писать $A > 0$, если для всех $u \in \mathbf{C}^m \setminus \{0\}$

$$< u \cdot A, u > > 0. \tag{1.17}$$

Далее, если матрицы A, $\mathrm{B} \in M_{m,m}$, то будем писать $A \geqslant B$ (или $A > B$), если $A - B \in \mathrm{H}_m$ и при этом $A - B \geqslant 0$ (или $A - B > 0$).

Следующие свойства [матриц $A \in M_{m,m}$ проверяются непосредственно: во-первых, очевидно, что для любой матрицы $A \in M_{m,m}$, $A \geqslant A$, а затем:

$$\text{если } A_1, A_2 \geqslant 0, \text{ то } A_1 + A_2 \geqslant 0;$$

$$\text{если } A_1 \geqslant 0, A_2 > 0, \text{ то } A_1 + A_2 > 0;$$

$$\text{если } A \geqslant 0 \text{ и } \alpha \in [0 + \infty), \text{ то } \alpha \cdot A \geqslant 0;$$

$$\text{если } A > 0 \text{ и } \alpha \in (0 + \infty), \text{ то } \alpha \cdot A > 0.$$

В заключение раз и навсегда договоримся, что если матрица $A \in M_{m,m}$, то запись $A \geqslant 0$ (или $A > 0$) будет означать, что $A \in \mathrm{H}_m$ и неотрицательно (или положительно) определена.

1.4 (а) В свое время было отмечено, что множество $M_{m,n}$ $(m, n \geqslant 1)$ можно трактовать как $m \times n$-мерное векторное пространство над полем $\mathbf{C}$. Очевидно, что на пространстве $M_{m,n}$ различными способами можно ввести норму. Но ввиду конечномерности $M_{m,n}$ все эти нормы будут порождать одну и ту же топологию. Следовательно, в $M_{m,n}$ однозначно определены понятия сходимости, открытого и замкнутого множества и другие топологические понятия. При этом заметим, что сходимость матриц в пространствах $M_{m,n}$ $(m, n \geqslant 1)$ равносильна их поэлементной сходимости. Легко видеть также, что операции сложения и умножения матриц, умножения матриц на числа из $\mathbf{C}$, сопряжения, а также взятия определителя $\det(A)$, действительных или мнимых частей квадратных матриц $A \in M_{m,m}$ $(m > 1)$, непрерывны в надлежащих матричных пространствах.

(б) Матрицу $U \in M_{m,m}$ принято называть унитарной, если

$$U \cdot U^{*} = U^{*} \cdot U = I^{(m)}. \tag{1.18}$$

Из определения (1.18) следует, что если матрица U унитарна, то

$$U \in M^{*}_{m,m},\ U^{-1} = U^{*} \text{ и } |\det(U)| = 1.$$

Обозначим через $\mathbf{U}_m$ множество всех унитарных матриц из $M_{m,m}$. Следующие свойства элементов $\mathbf{U}_m$ проверяются непосредственно:

если $U \in \mathbf{U}_m$, то $U^{-1} \in \mathbf{U}_m$;

если $U \in \mathbf{U}_m$ и $\alpha \in \mathbf{C}$, $|\alpha| = 1$, то $\alpha \cdot U \in \mathbf{U}_m$; (1.19)

если U, $V \in \mathbf{U}_m$, то $U \cdot V \in \mathbf{U}_m$.

Приведем важную для дальнейшего известную теорему.

Теорема IV. *Любая матрица $A \in M_{m,n}$ допускает представление вида*

$$A = U \cdot \Lambda \cdot V, \tag{1.20}$$

где $U \in \mathbf{U}_m$, $V \in \mathbf{U}_n$, а матрица $\Lambda \in M_{m,n}$ имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1\, 0 \cdots\cdots 0 \\ 0\ \lambda_2 \cdots\cdot 0 \\ \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}, \tag{1.21}$$

где

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots \geqslant \lambda_\nu > 0,\ \nu = \min\{m, n\}. \tag{1.21$'$}$$

1.5. Начнем этот пункт с одного определения.

Определение. Пусть односвязная область $D \subset \mathbf{C}^N$ и $f(z) \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $z \in D$ — произвольная непрерывная функция. Условимся говорить, что $f(z)$ допускает логарифм, если существует непрерывная функция $g(z) \in \mathbf{C}$, $z \in D$, такая, что

$$\exp\{g(z)\} \equiv f(z),\ z \in D. \tag{1.22}$$

Не исключено, что такого рода функций $g(z)$ будет очень много, но, тем не менее, для них мы воспользуемся одним и тем же обозначением: $g(z) = \ln f(z)$, $z \in D$.

Теорема V (*о логарифме*). *Пусть $D \subset \mathbf{C}^N$ — односвязная область и $f(z) \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $z \in D$ — непрерывна. Тогда*

1. *$f(z)$ допускает логарифм;*
2. *если $g(z) = \ln f(z)$, то имеем также*

$$g(z) + 2\pi ki = \ln f(z),\ k \in \mathbf{Z};$$

3 *если $g_j = \ln f$ $(j = 1, 2)$, то существует целое число k_0 такое, что*

$$g_1(z) = g_2(z) + 2\pi k_0 i, \; z \in D;$$

4. *если $g(z) = \ln f(z)$ и $f(z)$ голоморфна в области D, то там же голоморфна и $g(z)$.*

Доказательства утверждений этой теоремы мы опускаем, поскольку все они хорошо известны и содержатся в различных курсах топологии и теории функций.

1.6 (а) В пространстве $M_{m,m}$ $(m \geqslant 1)$ выделим область

$$\widetilde{M}_{m,m} = \{A \in M_{m,m} : \operatorname{Re} A > 0\} \cup \{A \in M_{m,m} : \operatorname{Im} A > 0\} \cup \{A \in M_{m,m} : -\operatorname{Im} A > 0\}$$

и в этой связи отметим еще ряд свойств:

если $A \in M_{m,m}$, то $A \in \widetilde{M}_{m,m} \Leftrightarrow A^* \in \widetilde{M}_{m,m}$;

если $\mathrm{H}_m^+ \subset M_{m,m}$ суть множество всех положительно определенных эрмитовых матриц, то

$$\mathrm{H}_m^+ \subset \widetilde{M}_{m,m};$$

очевидно, что область $\widetilde{M}_{m,m}$ звездна относительно единичной матрицы $I^{(m)}$, поэтому $\widetilde{M}_{m,m}$ — односвязная область;

если $A \in \widetilde{M}_{m,m}$, то $\alpha \cdot A \in \widetilde{M}_{m,m}$ для любого $\alpha > 0$.

(б) В области $\widetilde{M}_{m,m}$ определим голоморфную функцию $f(A) = \det(A)$, $A \in \widetilde{M}_{m,m}$, и убедимся, что там $f(A) \neq 0$.

В самом деле, если $\operatorname{Re} A > 0$, то из тождества

$$\langle u \cdot A, u \rangle \equiv \langle u \operatorname{Re} A, u \rangle + i \langle u \cdot \operatorname{Im} A, u \rangle, \; u \in \mathbf{C}^m$$

вытекает, что $\operatorname{Re} \langle u \cdot A, u \rangle > 0$, $u \in \mathbf{C}^m \setminus \{0\}$. Вместе с тем, если положим, что $\det(A) = 0$, то существовал бы элемент $u_0 \in \mathbf{C}^m \setminus \{0\}$ такой, что $u_0 \cdot A \equiv 0$. Отсюда следовало бы равенство $\langle u_0 \cdot A, u_0 \rangle = 0$, противоречащее неравенству $\operatorname{Re} \langle u_0 \cdot A, u_0 \rangle > 0$. Значит при условии $\operatorname{Re} A > 0$ всегда $\det(A) \neq 0$. Если же $\pm \operatorname{Im} A > 0$, то $\operatorname{Re}(\mp iA) > 0$ и поэтому $\det(\mp iA) \neq 0$, а значит, $\det(A) \neq 0$.

Таким образом, при $A \in \widetilde{M}_{m,m}$ всегда $f(A) = \det(A) \neq 0$. Но тогда, согласно теореме о логарифме, существует единственная функция $g(A)$, $A \in \widetilde{M}_{m,m}$, голоморфная в $\widetilde{M}_{m,m}$ и удовлетворяющая условиям

$$\exp\{g(A)\} \equiv f(A) = \det(A), \; A \in \widetilde{M}_{m,m},$$

$$g(I^{(m)}) = 0. \tag{1.24}$$

Эту однозначно определенную функцию g будем обозначать через lndet.

(в) Укажем некоторые свойства этой функции. Прежде всего, укажем на следующие:

$$\operatorname{Re}[\ln\det(A)] \equiv \ln|\det(A)|, \quad A \in \tilde{M}_{m,m},$$

$$\ln\det(A^*) \equiv \overline{\ln\det(A)}, \quad A \in \tilde{M}_{m,m}, \tag{1.25}$$

$$\ln\det(a\cdot A) \equiv m\cdot\ln a + \ln\det(A), \quad A \in \tilde{M}_{m,m}, \quad a>0.$$

Кроме того, при всех $A \in \mathbf{H}_m^+ \subset \tilde{M}_{m,m}$

$$\operatorname{Im}[\ln\det(A)] = 0 \text{ и } \ln\det(A) = \ln[\det(A)]. \tag{1.26}$$

Наконец, имея в нашем распоряжении функцию $\ln\det(A)$, можно определить степенную функцию, положив для любого $\beta \in \mathbf{C}$

$$[\det(A)]^\beta = \exp\{\beta\cdot\ln\det(A)\}, \quad A \in \tilde{M}_{m,m}. \tag{1.27}$$

И в заключение, комбинируя (1.25) с (1.27), приходим к формуле

$$[\det(a\cdot A)]^\beta = a^{m\beta}\cdot[\det(A)]^\beta, \quad A \in \tilde{M}_{m,m}, \ a>0. \tag{1.28}$$

§ 2. Введение классов голоморфных функций $H_\alpha^p(R_{m,n})$ и некоторые их свойства

2.1. Начнем с формулировки одного предложения, доказательство которого на основе теоремы IV (§ 1) приводится в монографии [6] (теорема 2.1.2).

Предложение 2.1. а) *Если* $\zeta \in M_{m,n}$ *то*

$$\det[I^{(m)} - \zeta\cdot\zeta^*] = \det[I^{(n)} - \zeta^*\cdot\zeta]. \tag{2.1}$$

б) *Положительная (неотрицательная) определенность матрицы* $I^{(m)} - \zeta\cdot\zeta^*$ *равносильна положительной (неотрицательной) определенности матрицы* $I^{(n)} - \zeta^*\cdot\zeta$. *Отсюда непосредственно следует равенство*

$$\det[I^{(m)} - Z\cdot\zeta^*] = \det[I^{(n)} - \zeta^*\cdot Z), \tag{2.2}$$

$$Z, \zeta \in M_{m,n}.$$

Определение. В семействе матриц $M_{m,n}$ $(m, n \geqslant 1)$ обобщенным единичным кругом называется множество (см. [6])

$$R_{m,n} = \{\zeta \in M_{m,n} : I^{(m)} - \zeta\cdot\zeta^* > 0\} = \{\zeta \in M_{m,n} : I^{(n)} - \zeta^*\cdot\zeta > 0\}. \tag{2.3}$$

В § 0 мы уже отмечали, что $R_{1,n}$ $(n \geqslant 1)$ — не что иное, как единичный шар пространства $\mathbf{C}^n = M_{1,n}$:

$$\mathrm{B}_n = \left\{\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^n : \sum_{j=1}^n |\zeta_j|^2 < 1\right\}.$$

В общем же случае, когда $m, n \geqslant 1$, $R_{m,n}$ является ограниченной областью в пространстве матриц $M_{m,n}$, причем ее замыкание опишется таким образом:

$$\overline{R}_{m,n} = \{\zeta \in M_{m,n} : I^{(m)} - \zeta\cdot\zeta^* \geqslant 0\}. \tag{2.4}$$

Дополнительная информация о свойствах области $R_{m,n}$ содержится в следующем предложении.

Предложение 2.2. а) *$R_{m,n}$ — полная круговая область, т. е. если $\zeta\in R_{m,n}$ и $|\alpha|\leqslant 1$, то $\alpha\cdot\zeta\in R_{m,n}$.*

б) *Если $\zeta\in \overline{R}_{m,n}$, то*

$$0\leqslant \det[I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*]\leqslant 1. \tag{2.5}$$

в) *Если $Z\in R_{m,n}$ и $\zeta\in \overline{R}_{m,n}$, то*

$$\mathrm{Re}[I^{(m)}-Z\cdot\zeta^*]>0. \tag{2.6}$$

г) *Если $r\in(0,+\infty)$, то положив*

$$\begin{aligned} r\cdot R_{m,n}&=\{r\cdot\zeta,\ \zeta\in R_{m,n}\},\\ r\cdot \overline{R}_{m,n}&=\{r\cdot\zeta,\ \zeta\in \overline{R}_{m,n}\}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} r\cdot R_{m,n}&=\{\zeta\in M_{m,n}: r^2\cdot I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*>0\},\\ r\cdot \overline{R}_{m,n}&=\{\zeta\in M_{m,n}: r^2\cdot I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*\geqslant 0\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Доказательство. (а) Пусть $\zeta\in R_{m,n}$ и $|\alpha|\leqslant 1$, тогда будем иметь

$$I^{(m)}-(\alpha\cdot\zeta)\cdot(\alpha\cdot\zeta)^*=I^{(m)}-|\alpha|^2\cdot\zeta\cdot\zeta^*=(1-|\alpha|^2)\cdot I^{(m)}+|\alpha|^2\cdot(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*)>0,$$

откуда и следует, что $R_{m,n}$ — полная круговая область.

б) Согласно теореме IV (§ 1), любой элемент $\zeta\in M_{m,n}$ допускает представление вида

$$\zeta=U\cdot\Lambda\cdot V, \tag{2.9}$$

где $U\in \mathrm{U}_m$, $V\in\mathrm{U}_n$ и

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & & & \cdots\end{pmatrix},\quad \lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_\nu\geqslant 0,\quad \nu=\min\{m,n\}. \tag{2.10}$$

Если теперь $\zeta\in\overline{R}_{m,n}$, то в силу (2.4) $I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*\geqslant 0$, или же $I^{(m)}-\Lambda\cdot\Lambda^*\geqslant 0$, откуда получаем: $0\leqslant\lambda_k\leqslant 1$, $1\leqslant k\leqslant\nu$. Кроме того, легко проверить равенства

$$\det[I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*]=\det(U)\cdot\det(I^{(m)}-\Lambda\cdot\Lambda^*]\cdot\det(U^*)=\prod_{k=1}^{\nu}(1-\lambda_k^2),$$

и, тем самым, наше утверждение (2.5) доказано.

в) Если $Z\in R_{m,n}$ и $\zeta\in\overline{R}_{m,n}$, то

$$I^{(m)}>Z\cdot Z^*,\quad I^{(m)}\geqslant\zeta\cdot\zeta^*. \tag{2.11}$$

Далее, справедлива следующая серия неравенств:

$$\begin{aligned} &(Z-\zeta)\cdot(Z^*-\zeta^*)\geqslant 0,\\ &Z\cdot Z^*+\zeta\cdot\zeta^*\geqslant Z\cdot\zeta^*+\zeta\cdot Z^*,\\ &Z\cdot Z^*+\zeta\cdot\zeta^*\geqslant Z\cdot\zeta^*+(Z\cdot\zeta^*)^*,\\ &2\cdot I^{(m)}>Z\cdot Z^*+\zeta\cdot\zeta^*\geqslant 2\cdot\mathrm{Re}(Z\cdot\zeta^*),\\ &\mathrm{Re}[I^{(m)}-Z\cdot\zeta^*]>0. \end{aligned}$$

г) Это утверждение устанавливается тривиальной проверкой.

2.2. а) Обозначим через $\mathrm{Aut}(R_{m,n})$ группу всех биголоморфных изоморфизмов области $R_{m,n}$. Для любого элемента $g \in \mathrm{Aut}(R_{m,n})$ через Δ_g обозначается комплексный якобиан отображения g, при этом заметим, что

$$\Delta_g(\zeta) \neq 0, \ \zeta \in R_{m,n}. \tag{2.12}$$

Далее, из предложения 2.2 (а) следует звездность относительно начала координат, а значит, односвязность области $R_{m,n}$. Поэтому, в силу теоремы V (§ 1) (о логарифме), функция Δ_g допускает голоморфный логарифм. Но тогда, согласно принятой выше договоренности (см. 1.5 — определение), любую голоморфную в $R_{m,n}$ функцию h, удовлетворяющую условию

$$\exp\{h(\zeta)\} \equiv \Delta_g(\zeta), \ \zeta \in R_{m,n}, \tag{2.13}$$

будем обозначать через $\ln \Delta_g$.

Напомнив, что такая функция $h(\zeta)$ отнюдь не единственна, для любого $\beta \in C$ мы полагаем

$$[\Delta_g(\zeta)]^\beta \equiv \exp\{\beta \cdot \ln \Delta_g(\zeta)\}, \ \zeta \in R_{m,n}.$$

Далее, для любых целых $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$ положим

$$V_{m,n} = \frac{\prod_1^n \Gamma(j) \cdot \prod_1^m \Gamma(k)}{\prod_1^{m+n} \Gamma(l)} \cdot \pi^{m \cdot n}; \ c_{m,n} = \frac{1}{V_{m,n}} \tag{2.14}$$

и отметим, что, как установлено в монографии [6, теорема 2.2.1], число $V_{m,n}$ есть объем области $R_{m,n}$. Там же был получен явный вид так называемой керн-функции области $R_{m,n}$:

$$K_{m,n}(Z, \zeta) = \frac{c_{m,n}}{[\det(I^{(m)} - Z \cdot \zeta^*)]^{m+n}}, \ Z, \zeta \in R_{m,n}, \tag{2.15}$$

являющейся голоморфной функцией по Z и антиголоморфной по ζ, воспроизводящей голоморфные в области $R_{m,n}$ функции с интегрируемым квадратом модуля по области $R_{m,n}$ и по мере $\mu_{m,n}$ (см. § 0, теорему II).

Отметим, что, как известно, для каждого биголоморфного отображения $g \in \mathrm{Aut}(R_{m,n})$ справедливо тождество

$$K_{m,n}(g(Z), g(\zeta)) \cdot \Delta_g(Z) \cdot \overline{\Delta_g(\zeta)} \equiv K_{m,n}(Z, \zeta), \ Z, \zeta \in R_{m,n}. \tag{2.16}$$

Как следует из самого определения (2.15)

$$K_{m,n}(Z, \zeta) \neq 0, \ Z, \zeta \in R_{m,n}, \tag{2.17}$$

и поскольку область $R_{m,n} \times R_{m,n}$ односвязна, то по теореме о логарифме там же однозначно определена также функция $\ln K_{m,n}(Z, \zeta)$, голоморфная по $Z \in R_{m,n}$, антиголоморфная по $\zeta \in R_{m,n}$ и такая, что

$$\exp\{\ln K_{m,n}(Z, \zeta)\} \equiv K_{m,n}(Z, \zeta), \ Z, \zeta \in R_{m,n}, \tag{2.18}$$

и

$$\ln K_{m,n}(Z, Z) \text{ вещественен для } Z \in R_{m,n}. \tag{2.19}$$

б) В дальнейшем будем пользоваться следующим простым предложением.

Предложение 2.3. 1. *Если* $g \in \mathrm{Aut}(R_{m,n})$, *то при любом выборе функции* $\ln \Delta_g$ *справедливо тождество*

$$\ln K_{m,n}(g(Z),\ g(\zeta)) + \ln \Delta_g(Z) + \overline{\ln \Delta_g(\zeta)} \equiv \ln K_{m,n}(Z, \zeta),\ Z, \zeta \in R_{m,n}. \tag{2.20}$$

2. *Для любых* $Z, \zeta \in R_{m,n}$ *справедливо тождество*

$$\ln K_{m,n}(Z, \zeta) = \ln c_{m,n} - (m+n)\cdot \ln\det[I^{(m)} - Z\cdot\zeta^*], \tag{2.21}$$

где $\ln\det$ — *аналитическая в* $\widetilde{M}_{m,m} \subset M_{m,m}$ *функция* (*определения области* $\widetilde{M}_{m,m}$ *и функции* $\ln\det$ *см. § 1*).

3. *Если* $g \in \mathrm{Aut}(R_{m,n})$, *то при любом выборе функции* $\ln \Delta$ *справедливо тождество*

$$\ln\det[I^{(m)} - g(Z)\cdot g(\zeta)^*] \equiv \frac{1}{m+n}\ln \Delta_g(Z) + \frac{1}{m+n}\overline{\ln \Delta_g(\zeta)} + \tag{2.22}$$

$$\ln\det[I^{(m)} - Z\cdot\zeta^*],\ Z, \zeta \in R_{m,n}.$$

Наконец, как обычно, для любого $\beta \in \mathbf{C}$ будем полагать

$$[K_{m,n}[Z, \zeta)]^\beta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \exp\{\beta\cdot\ln K_{m,n}(Z, \zeta)\},\ Z, \zeta \in R_{m,n}. \tag{2.23}$$

2.2. (а) Приведем сначала одну важную формулу интегрирования по области $R_{m,n}$, установленную в монографии [6, § 2.2].

Начнем с того, что любую матрицу $\zeta \in M_{m,n}$ можно представить в виде

$$\zeta = \begin{pmatrix} \tilde{\zeta} \\ p \end{pmatrix},\ \tilde{\zeta} \in M_{m-1,n},\ p \in M_{1,n} = \mathbf{C}^n. \tag{2.24}$$

Тогда справедливо такое индуктивное описание областей $R_{m,n}$ (см. [6], § 2.2):

если $m = 1$, $n \geqslant 1$, то $R_{1,n} = \mathbf{B}_n \subset \mathbf{C}^n$;
если же $m > 1$, $n \geqslant 1$, то

$$R_{m,n} = \{\zeta = \begin{pmatrix} \tilde{\zeta} \\ \omega\cdot\Gamma^* \end{pmatrix} \in M_{m,n} : \tilde{\zeta} \in R_{m-1,n}, \tag{2.25}$$

$$\Gamma \in M^*_{n,n},\ I^{(n)} - \tilde{\zeta}^*\cdot\tilde{\zeta} = \Gamma\cdot\Gamma^*,\ \omega \in \mathbf{B}_n\}.$$

При этом выполняются соотношения

$$\det[I^{(m)} - \tilde{\zeta}^*\cdot\tilde{\zeta}] = |\det(\Gamma)|^2, \tag{2.26}$$

$$\det[I^{(m)} - \zeta^*\cdot\zeta] = (1 - |\omega|^2)\cdot|\det(\Gamma)|^2. \tag{2.27}$$

Далее, пусть $m > 1$, $n \geqslant 1$ и в области $R_{m,n}$ задана произвольная функция $f(\zeta)$. Тогда для любого $\tilde{\zeta} \in R_{m-1,n}$ определим функцию

$$\tilde{f}(\omega) \equiv f\left(\tilde{\zeta}_{\omega\cdot\Gamma^*}\right), \quad \omega \in \mathbf{B}_n, \tag{2.28}$$

уже в единичном шаре $\mathbf{B}_n \subset \mathbf{C}^n$, где

$$I^{(n)} - \tilde{\zeta}^* \cdot \tilde{\zeta} = \Gamma \cdot \Gamma^*, \quad \Gamma \in M^*_{n,n}. \tag{2.29}$$

Очевидно, обозначение (2.28) нельзя считать вполне удачным, поскольку наша функция $\tilde{f}(\omega)$, $\omega \in \mathbf{B}_n$, зависит также от $\tilde{\zeta} \in R_{m-1,n}$ и от выбора $\Gamma \in M^*_{n,n}$, подчиненного условию (2.29). Но мы предпочли указанное обозначение, во избежание более громоздкого.

Формула, о которой речь шла выше, имеет вид

$$\int\limits_{R_{m,n}} f(\zeta)\, d\mu_{m,n}(\zeta) = \int\limits_{R_{m-1,n}} \det\left[I^{(n)} - \tilde{\zeta}^* \cdot \tilde{\zeta}\right] \int\limits_{B_n} \tilde{f}(\omega)\, d\mu_{1,n}(\omega)\, d\mu_{m-1,n}(\tilde{\zeta}), \tag{2.30}$$

где предполагается, что $f(\zeta)$, $\zeta \in R_{m,n}$ $(m > 1,\ n \geqslant 1)$ — любая измеримая интегрируемая по $R_{m,n}$ функция (неотрицательная, либо вообще комплексная).

б) В предположениях $m,\ n \geqslant 1$ и $\operatorname{Re}\beta > -1$ введем обозначение

$$J_{m,n}(\beta) = \int\limits_{R_{m,n}} [\det(I^{(m)} - \zeta\cdot\zeta^*)]^\beta\, d\mu_{m,n}(\zeta) = \int\limits_{R_{m,n}} [\det(I^{(n)} - \zeta^*\cdot\zeta)]^\beta\, d\mu_{m,n}(\zeta). \tag{2.31}$$

Воспользовавшись формулами (2.30), (2.27) и (2.26), можно показать, что

$$J_{m,n}(\beta) = \frac{\prod\limits_1^n \Gamma(\beta+j) \cdot \prod\limits_1^m \Gamma(\beta+k)}{\prod\limits_1^{m+n} \Gamma(\beta+l)} \cdot \pi^{m\cdot n}. \tag{2.32}$$

Далее, при тех же значениях параметров, т. е. при $m,\ n \geqslant 1$ и $\operatorname{Re}\beta > -1$ положим

$$c_{m,n}(\beta) = J^{-1}_{m,n}(\beta). \tag{2.33}$$

Сравнивая введенные нами ранее обозначения (2.14) с (2.32) и (2.33), заключаем, что

$$V_{m,n} = J_{m,n}(0) \text{ и } c_{m,n} = c_{m,n}(0),\quad m,\ n \geqslant 1.$$

Особо отметим также следующие соотношения:

$$\begin{gathered} c_{1,n}(\beta) = \frac{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\pi^n} \quad (n \geqslant 1), \\ c_{m,n}(\beta) = c_{m-1,n}(\beta+1)\cdot c_{1,n}(\beta) \quad (m > 1,\ n > 1), \end{gathered} \tag{2.34}$$

2.3. а) Для произвольной измеримой по Лебегу (вообще говоря комплекснозначной) функции $f(\zeta)$, $\zeta \in R_{m,n}$ $(m \geqslant 1,\ n \geqslant 1)$, при данном $p \in (0, +\infty)$ и $\alpha \in (-\infty + \infty)$ положим

$$\|f\|_{p,\alpha}^{p}=\int\limits_{R_{m,n}}|f(\zeta)|^{p}\cdot[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^{*})]^{\alpha}\,d\mu_{m,n}(\zeta)=$$

$$=\int\limits_{R_{m,n}}|f(\zeta)|^{p}\cdot[\det(I^{(n)}-\zeta^{*}\cdot\zeta)]^{\alpha}\,d\mu_{m,n}(\zeta). \qquad (2.35)$$

Затем введем пространство

$$L_{\alpha}^{p}(R_{m,n})=\{f:\|f\|_{p,\alpha}<+\infty\}, \qquad (2.36)$$

а подмножество всех голоморфных в $R_{m,n}$ функций будем обозначать через $H_{\alpha}^{p}(R_{m,n})$.

Отметим, что при $m=1$, $n\geqslant 1$ мы приходим к пространствам $L_{\alpha}^{p}(\mathbf{B}_n)$ и $H_{\alpha}^{p}(\mathbf{B}_n)$, о которых по существу шла речь в работе [4].

Приводимое ниже предложение является обобщением следующего известного факта: если $0<p<+\infty$ и $-\infty<\alpha\leqslant-1$, то пространство $H_{\alpha}^{p}(\mathbf{B}_n)=\{0\}$, т. е. оно пусто.

Предложение 2.4. *Если* $0<p<+\infty$ *и* $-\infty<\alpha\leqslant-1$, *то пространство* $H_{\alpha}^{p}(R_{m,n})$ *также пусто.*

Доказательство. Если $f(Z)\in H_{\alpha}^{p}(R_{m,n})$, то согласно формулам (2.30), (2.26), (2.27), имеем

$$\|f\|_{p,\alpha}^{p}=\int\limits_{R_{m,n}}|f(\zeta)|^{p}\cdot[\det(I^{(n)}-\zeta^{*}\cdot\zeta)]^{\alpha}\,d\mu_{m,n}(\zeta)=$$

$$=\int\limits_{R_{m-1,n}}[\det(I^{(n)}-\tilde{\zeta}^{*}\cdot\tilde{\zeta})]^{\alpha+1}\cdot\Big\{\int\limits_{\mathbf{B}_n}|\tilde{f}(\omega)|^{p}\cdot(1-|\omega|^{2})^{\alpha}\,d\mu_{1,n}(\omega)\Big\}\times$$

$$\times\, d\mu_{m-1,n}(\tilde{\zeta})<+\infty. \qquad (2.37)$$

Отсюда следует, что для почти всех $\tilde{\zeta}\in R_{m-1,n}$ функция $\tilde{f}\in H_{\alpha}^{p}(\mathbf{B}_n)$. Но поскольку при $0<p<+\infty$ и $-\infty<\alpha\leqslant-1$ мы имеем $H_{\alpha}^{p}(\mathbf{B}_n)=\{0\}$, то из (2.37) заключаем, что для почти всех $\tilde{\zeta}\in R_{m-1,n}$

$$\tilde{f}(\omega)=f\begin{pmatrix}\tilde{\zeta}\\ \omega\cdot\Gamma^{*}\end{pmatrix}=0,\ \omega\in\mathbf{B}_n, \qquad (2.38)$$

где $I^{(n)}-\tilde{\zeta}^{*}\cdot\tilde{\zeta}=\Gamma\cdot\Gamma^{*}$, $\Gamma\in M_{n,n}^{*}$.

Наконец, из (2.38), ввиду непрерывности функции f, следует что $f(Z)\equiv 0$, $Z\in R_{m,n}$, чем и завершается доказательство.

Таким образом, пространства $H_{\alpha}^{p}(R_{m,n})$ представляют интерес, только при условиях

$$0<p<+\infty \text{ и } -1<\alpha<+\infty, \qquad (2.39)$$

которые будут предполагаться выполненными всюду дальше.

Из предложения 2.2 (б) легко вытекает

Предложение 2.5. *Если* $0<p<+\infty$ *и* $-1<\alpha<\beta<+\infty$, *то при* $m,\ n\geqslant 1$

$$L^p_\alpha(R_{m,n}) \subset L^p_\beta(R_{m,n}),\quad H^p_\alpha(R_{m,n}) \subset H^p_\beta(R_{m,n}). \tag{2.40}$$

Лемма 2.1. *Если функция $f(z)$ голоморфна в B_n, то справедливо неравенство*

$$|f(0)|^p \leqslant c_{1,n}(\alpha)\cdot \int\limits_{\mathrm{B}_n} |f(\omega)|^p\cdot(1-|\omega|^2)^\alpha\, d\mu_{1,n}(\omega). \tag{2.41}$$

Доказательство. Переходом к полярным координатам получим равенство

$$I = c_{1,n}(\alpha)\cdot \int\limits_{\mathrm{B}_n} |f(\omega)|^p\cdot(1-|\omega|^2)^\alpha\, d\mu_{1,n}(\omega) =$$

$$= c_{1,n}(\alpha)\cdot \int\limits_0^1 r^{2n-1}\cdot(1-r^2)^\alpha \int\limits_{S_n} |f(r\cdot\eta)|^p\, d\sigma_n(\eta), \tag{2.42}$$

где $S_n = \{\eta\in\mathbf{C}^n : |\eta| = 1\}\subset\mathbf{C}^n$ — единичная сфера, а $d\sigma_n$ — поверхностная мера Лебега на S_n. Поскольку $|f(z)|^p$ субгармонична в B_n, то имеем для $0\leqslant r<1$:

$$|f(0)|^p \leqslant \frac{1}{\sigma_n(S_n)} \int\limits_{S_n} |f(r\cdot\eta)|^p\, d\sigma_n(\eta), \tag{2.43}$$

где $\sigma_n(S_n)$ — полная „площадь" сферы S_n.

Комбинируя (2.42) и (2.43), получим оценку

$$I \geqslant |f(0)|^p\cdot\sigma_n(S_n)\cdot c_{1,n}(\alpha)\cdot \int\limits_0^1 r^{2n-1}\cdot(1-r^2)^\alpha\, dr =$$

$$= c_{1,n}(\alpha)\cdot|f(0)|^p\cdot \int\limits_{\mathrm{B}_n} (1-|\omega|^2)^\alpha\, d\mu_{1,n}(\omega) =$$

$$= c_{1,n}(\alpha)\cdot|f(0)|^p\cdot J_{1,n}(\alpha) = |f(0)|^p.$$

Предложение 2.6. *Если $f(\zeta)\in H^p_\alpha(R_{m,n})$, то функция $f\begin{pmatrix}\tilde\zeta\\0\end{pmatrix}$, $\tilde\zeta\in R_{m-1,n}$, принадлежит пространству $H^p_{\alpha+1}(R_{m-1,n})$.*

Доказательство. Пользуясь равенством (2.37), для $f(Z)\in H^p_\alpha(R_{m,n})$ мы имеем

$$+\infty > \int\limits_{R_{m,n}} |f(\zeta)|^p\cdot[\det(I^{(n)}-\zeta^*\cdot\zeta)]^\alpha\, d\mu_{m,n}(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{R_{m-1,n}} [\det(I^{(n)}-\tilde\zeta^*\cdot\tilde\zeta)]^{\alpha+1}\cdot\left\{\int\limits_{\mathrm{B}_n} |\tilde f(\omega)|^p\cdot(1-|\omega|^2)^\alpha d\mu_{1,n}(\omega)\right\}\times d\mu_{m-1,n}(\tilde\zeta) \geqslant$$

$$\geqslant c_{1,n}^{-1}(\alpha)\cdot \int\limits_{R_{m-1,n}} [\det(I^{(n)}-\tilde\zeta^*\cdot\tilde\zeta)]^{\alpha+1}\cdot|\tilde f(0)|^p\, d\mu_{m-1,n}(\tilde\zeta) =$$

$$=c_{1,n}^{-1}(\alpha)\cdot\int\limits_{R_{m-1,n}}[\det(I^{(n)}-\tilde{\zeta}^{*}\cdot\tilde{\zeta})]^{\alpha+1}\cdot\left|f\begin{pmatrix}\tilde{\zeta}\\0\end{pmatrix}\right|^{p}d\mu_{m-1,n}(\tilde{\zeta}). \tag{2.44}$$

Из (2.44) в итоге следует, что функция $f\begin{pmatrix}\tilde{\zeta}\\0\end{pmatrix}$, $\tilde{\zeta}\in R_{m-1,n}$, принадлежит классу $H^{p}_{\alpha+1}(R_{m-1,n})$.

§ 3. Основные интегральные представления в областях $R_{m,n}(m,\ n\geqslant 1)$

3.1. а) Докажем сначала формулу интегрального представления для класса $H^{p}_{\alpha}(R_{m,n})$ в частном случае, когда $p=2$.

Теорема 3.1. *Любая функция $f(Z)\in H^{2}_{\alpha}(R_{m,n})$ $(-1<\alpha<+\infty)$ допускает интегральное представление вида*

$$f(Z)=c_{m,n}(\alpha)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}f(\zeta)\frac{[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^{*})]^{\alpha}}{[\det(I^{(m)}-Z\cdot\zeta^{*})]^{m+n+\alpha}}\,d\mu_{m,n}(\zeta) \tag{3.1}$$

ри $Z\in R_{m,n}$.

Доказательство. Убедимся сначала, что формула (3.1) верна при $Z=0\in R_{m,n}$. Более того, установим следующий факт:

если $\alpha>-1$, $m,\ n\geqslant 1$, то для любой функции $f(Z)\in H^{2}_{\alpha}(R_{m,n})$ справедливы формулы

$$f(0)=c_{m,n}(\alpha)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}f(\zeta)\cdot[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^{*})]^{\alpha}\,d\mu_{m,n}(\zeta)=$$

$$=c_{m,n}(\alpha)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}f(\zeta)\cdot[\det(I^{(n)}-\zeta^{*}\cdot\zeta)]^{\alpha}\,d\mu_{m,n}(\zeta). \tag{3.2}$$

Равенства мы будем доказывать полной индукцией по индексу m.

При $m=1$ нам нужно с учетом (2.34) показать, что для любой функции $f\in H^{2}_{\alpha}(\mathrm{B}_n)$ справедлива формула

$$f(0)=\frac{(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n)}{\pi^{n}}\int\limits_{\mathrm{B}_n}f(\varsigma)\cdot(1-|\varsigma|^{2})^{\alpha}\,d\mu_{1,n}(\varsigma). \tag{3.3}$$

Но эта формула (3.3) является простым следствием при $z=0$ теоремы III (§ 0).

Допустим теперь, что $m>1$ и наше утверждение (3.2) справедливо для значения $m-1$, и докажем его для значения m.

С целью сокращения, если обозначить

$$I=c_{m,n}(\alpha)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}f(\zeta)\cdot[\det(I^{(n)}-\zeta^{*}\cdot\zeta)]^{\alpha}\,d\mu_{m,n}(\zeta), \tag{3.4}$$

то мы должны установить равенство $I=f(0)$.

Действительно, по формуле интегрирования (2.30) и в силу рекуррентных соотношений (2.34) имеем

$$I = c_{m-1,n}(\alpha+1)\cdot\int\limits_{R_{m-1,n}} [\det(I^{(n)} - \tilde{\zeta}^{*}\cdot\tilde{\zeta})]^{\alpha+1}\cdot\Big\{c_{1,n}(\alpha)\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbf{B}_n}\tilde{f}(\omega)\cdot(1-|\omega|^2)^{\alpha}\,d\mu_{1,n}(\omega)\Big\}\,d\mu_{m-1,n}(\tilde{\zeta}). \tag{3.5}$$

В процессе доказательства предложения 2.4 мы установили следующий факт: при $f\in H^p_\alpha(R_{m,n})$, $\tilde{f}\in H^p_\alpha(\mathbf{B}_n)$ почти для всех $\tilde{\zeta}\in R_{m-1,n}$, $0<p<+\infty$ и $-1<\alpha<+\infty$. Поэтому, ввиду того, что наша исходная функция $f\in H^2_\alpha(R_{m,n})$, можем утверждать, что $\tilde{f}\in H^2_\alpha(\mathbf{B}_n)$ для почти всех $\tilde{\zeta}\in R_{m-1,n}$. Следовательно, согласно (3.3), имеем также

$$\tilde{f}(0) = c_{1,n}(\alpha)\cdot\int\limits_{\mathbf{B}_n}\tilde{f}(\omega)\cdot(1-|\omega|^2)^{\alpha}\,d\mu_{1,n}(\omega) \tag{3.6}$$

для почти всех $\tilde{\zeta}\in R_{m-1,n}$.

Комбинируя формулы (3.5) и (3.6), получим

$$I = c_{m-1,n}(\alpha+1)\cdot\int\limits_{R_{m-1,n}}\tilde{f}(0)\cdot[\det(I^{(n)}-\tilde{\zeta}^{*}\cdot\tilde{\zeta})]^{\alpha+1}\,d\mu_{m-1,n}(\tilde{\zeta}) =$$
$$= c_{m-1,n}(\alpha+1)\cdot\int\limits_{R_{m-1,n}} f\begin{pmatrix}\tilde{\zeta}\\ 0\end{pmatrix}\cdot[\det(I^{(n)}-\tilde{\zeta}^{*}\cdot\tilde{\zeta})]^{\alpha+1}\,d\mu_{m-1,n}(\tilde{\zeta}). \tag{3.7}$$

Далее, из предложения 2.6 следует, что $f\begin{pmatrix}\tilde{\zeta}\\ 0\end{pmatrix}\in H^2_{\alpha+1}(R_{m-1,n})$, а согласно индуктивному предположению (для $m-1$) из (3.7) получим равенство

$$I = f\begin{pmatrix}\tilde{\zeta}\\ 0\end{pmatrix}\Bigg|_{\tilde{\zeta}=0\in R_{m-1,n}} = f(0),$$

в чем нам надо было убедиться.

Установив таким образом формулу (3.2) для любой функции $f\in H^2_\alpha(R_{m,n})$, перейдем к доказательству интегрального представления (3.1) теоремы. С этой целью зафиксируем функцию $f\in H^2_\alpha(R_{m,n})$ и произвольную точку $Z_0\in R_{m,n}$.

Далее, поскольку группа $\mathrm{Aut}(R_{m,n})$ действует транзитивно на $R_{m,n}$ ([6], § 4.3 (1)), то существует элемент $g\in\mathrm{Aut}(R_{m,n})$ такой, что $g(Z_0)=0\in R_{m,n}$. Обозначив еще через $g^{-1}\in\mathrm{Aut}(R_{m,n})$ обратное к g отображение, имеем также $g^{-1}(0)=Z_0$.

Наконец, как обычно, Δ_g и $\Delta_{g^{-1}}$ суть соответственно комплексные якобианы отображений g и g^{-1}. Притом заметим, что $\Delta_g(\zeta)\neq 0$

и $\Delta_{g^{-1}}(\zeta)\neq 0$, $\zeta\in R_{m,n}$, и кроме того, если $\zeta_2=g(\zeta_1)\Leftrightarrow\zeta_1=g^{-1}(\zeta_2)$, то

$$\Delta_g(\zeta_1)\cdot\Delta_{g^{-1}}(\zeta_2)=1. \tag{3.8}$$

Договоримся теперь выбрать голоморфную в $R_{m,n}$ функцию $\ln\Delta_g$ каким-нибудь образом, положив конечно, что

$$\ln\Delta_{g^{-1}}(\zeta)\equiv-\ln\Delta_g(g^{-1}(\zeta)),\ \zeta\in R_{m,n}. \tag{3.9}$$

Тогда согласно предложению 2.3 (3) имеем

$$[\det(I^{(m)}-g(\zeta)\cdot g(\zeta)^*)]^\alpha\equiv$$
$$\equiv|\Delta_g(\zeta)|^{2\alpha/m+n}\cdot[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*)]^\alpha,\ \zeta\in R_{m,n}; \tag{3.10}$$

$$[\det(I^{(m)}-Z_0\cdot\zeta^*)]^{-(m+n+\alpha)}\equiv[\Delta_g(Z_0)]^{\frac{m+n+\alpha}{m+n}}\cdot\overline{[\Delta_g(\zeta)]^{\frac{m+n+\alpha}{m+n}}},\ \zeta\in R_{m,n}, \tag{3.11}$$

так как $g(Z_0)=0$.

Затем введем функцию

$$\varphi(W)\equiv f(g^{-1}(W))\cdot[\Delta_{g^{-1}}(W)]^{\frac{m+n+\alpha}{m+n}},\ W\in R_{m,n}, \tag{3.12}$$

голоморфную в $R_{m,n}$, причем, как следует из (3.8) и (3.10), $\|\varphi\|_{2,\alpha}=$ $=\|f\|_{2,\alpha}<+\infty$, т. е. $\varphi\in H^2_\alpha(R_{m,n})$.

Поэтому по формуле (3.2)

$$\varphi(0)=c_{m,n}(\alpha)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}\varphi(W)\cdot[\det(I^{(m)}-W\cdot W^*)]^\alpha\,d\mu_{m,n}(W). \tag{3.13}$$

В заключение подставим явное выражение (3.12) функции $\varphi(W)$ в (3.13), произведем замену переменной $W=g(\zeta)$, $\zeta\in R_{m,n}$, [в интеграле (3.13), принимая во внимание соотношения (3.9)—(3.11). Тогда приходим к формуле (3.1) для $Z=Z_0$, и поскольку точка $Z_0\in R_{m,n}$ была произвольной, то теорема, т. е. формула (3.1), полностью доказана.

3.2.(a) Распространим теперь теорему 3.1 на пространства $H^p_\alpha(R_{m,n})$, $1\leqslant p<+\infty$, однако полагая пока, что параметр $\alpha\in[0,+\infty)$.

Теорема 3.2. *Пусть* $1\leqslant p<+\infty$ *и* $\alpha\geqslant 0$. *Тогда любая функция* $f(Z)\in H^p_\alpha(R_{m,n})$ *допускает представление*

$$f(Z)=c_{m,n}(\alpha)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}\frac{[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*)]^\alpha}{[\det(I^{(m)}-Z\cdot\zeta^*)]^{m+n+\alpha}}\,d\mu_{m,n}(\zeta),\ Z\in R_{m,n}. \tag{3.14}$$

Доказательство. Полагая, что $f(Z)\in H^p_\alpha(R_{m,n})$ $(1\leqslant p<+\infty,$ $\alpha>0)$ — заданная функция, для значений $0<r<1$ определим функции

$$f_r(\zeta)=f(r\cdot\zeta),\ \zeta\in R_{m,n}, \tag{3.15}$$

заметив, что согласно предложению 2.2 а), $r\cdot\zeta\in R_{m,n}$. Очевидно, что функции f_r ограничены в $R_{m,n}$, и поэтому $f_r\in H^2_\alpha(R_{m,n})$, $0<r<1$.

Согласно теореме 3.1 имеем

$$f_r(Z)\equiv c_{m,n}(\alpha)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}f_r(\zeta)\frac{[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*)]^\alpha}{[\det(I^{(m)}-Z\cdot\zeta^*)]^{m+n+\alpha}}\,d\mu_{m,n}(\zeta), \tag{3.16}$$
$$Z\in R_{m,n},\ r\in(0,1).$$

Полагая, что точка $Z_0 \in R_{m,n}$ произвольна, зафиксируем ее и подберем такое $r_0 \in (0,1)$, чтобы имели $Z_0 \in r \cdot R_{m,n}$ при $r_0 < r < 1$. Исходя из представления (3.16), получаем формулу

$$f(Z_0) = c_{m,n}(\alpha) \cdot \int\limits_{R_{m,n}} f_r(\zeta) \frac{[\det(I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^{\alpha} \, d\mu_{m,n}(\zeta)}{[\det(I^{(m)} - Z_0/r \cdot \zeta^*)]^{m+n+\alpha}}, \quad r_0 \leqslant r < 1. \tag{3.17}$$

Наконец, если в интеграле (3.17) произведем замену переменной $\zeta \to \zeta/r$, то придем к формуле

$$f(Z_0) = c_{m,n}(\alpha) \cdot r^{2m^2} \cdot \int\limits_{r \cdot R_{m,n}} f(\zeta) \frac{[\det(r^2 I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^{\alpha} \, d\mu_{m,n}(\zeta)}{[\det(r^2 I^{(m)} - Z_0 \cdot \zeta^*)]^{m+n+\alpha}}, \quad r_0 \leqslant r < 1. \tag{3.18}$$

Пусть $\chi_{m,n}(\zeta; r)$, $\zeta \in R_{m,n}$ — характеристическая функция области $r \cdot R_{m,n}$ и

$$F_r(\zeta) = f(\zeta) \cdot \frac{[\det(r^2 \cdot I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^{\alpha}}{[\det(r^2 \cdot I^{(m)} - Z_0 \cdot \zeta^*)]^{m+n+\alpha}} \cdot \chi_{m,n}(\zeta; r). \tag{3.19}$$

Тогда формула может быть записана в виде

$$f(Z_0) = c_{m,n}(\alpha) \cdot r^{2m^2} \cdot \int\limits_{R_{m,n}} F_r(\zeta) \, d\mu_{m,n}(\zeta), \quad r_0 \leqslant r < 1. \tag{3.20}$$

Введем, далее, в рассмотрение компактное множество

$$K = \{(r, \zeta),\ r \in \mathbf{R},\ \zeta \in M_{mn} : r_0 \leqslant r \leqslant 1,\ r^2 \cdot I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^* \geqslant 0\}, \tag{3.21}$$

заметив, что тогда для любого $(r, \zeta) \in K$

$$\det(r^2 \cdot I^{(m)} - Z_0 \cdot \zeta^*) \neq 0. \tag{3.22}$$

Поэтому существует число $\delta \in (0, +\infty)$ такое, что для всех $(r, \zeta) \in K$

$$|\det(r^2 \cdot I^{(m)} - Z_0 \cdot \zeta^*)| \geqslant \delta > 0$$

и тем самым

$$\left| [\det(r^2 \cdot I^{(m)} - Z_0 \cdot \zeta^*)]^{-(m+n+\alpha)} \right| \leqslant \delta^{-(m+n+\alpha)}, \quad (r, \zeta) \in K. \tag{3.23}$$

Далее, рассуждая приблизительно так же, как и при доказательстве предложения 2.2 (б), на основании теоремы IV заключаем, что при $r_0 \leqslant r < 1$ и $\zeta \in r \cdot R_{m,n}$, в предположении $\alpha \geqslant 0$, справедливо неравенство

$$[\det(r^2 \cdot I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^{\alpha} \leqslant [\det(I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^{\alpha}. \tag{3.24}$$

С учетом (3.19), (3.23) и (3.24) приходим к оценке

$$|F_r(\zeta)| \leqslant |f(\zeta)| \cdot [\det(I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^{\alpha} \cdot \delta^{-(m+n+\alpha)}, \quad \zeta \in R_{m,n}, \tag{3.25}$$

откуда ввиду $f \in H^p_{\alpha}(R_{m,n})$ легко видеть, что правая часть (3.25) из класса $L^1(R_{m,n}; d\mu_{m,n})$ и, тем самым, она является интегрируемой мажорантой для семейства функций $\{F_r(\zeta)\}$, $r_0 < r < 1$.

Поэтому мы вправе в формуле (3.20) переходить к пределу при $r\uparrow 1$ на основе теоремы Лебега об ограниченной сходимости. В результате мы получим формулу (3.14) для выбранной точки $Z_0\in R_{m,n}$. Наконец, поскольку эта точка была произвольной, то теорема 3.2 полностью доказана.

(б) Пусть $1\leqslant p<+\infty$, $\alpha>-1$ и $\beta\in\mathbf{C}$ произвольны. Если

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\beta>\frac{1+\alpha}{p}-1,\ 1<p<+\infty,\\ \operatorname{Re}\beta>\alpha,\ p=1,\end{gathered}\tag{3.26}$$

то будем писать $\beta\vdash(p,\alpha)$.

На основе интегрального неравенства Гёльдера легко установить

Предложение 3.1. *Если* $\beta\vdash(p,\alpha)$, $\operatorname{Im}\beta=0$, *то имеет место включение*

$$H^p_\alpha(R_{m,n})\subset H^1_\beta(R_{m,n}).\tag{3.27}$$

3.3. На функциях $f(Z)$, заданных в области $R_{m,n}$, рассмотрим интегральный оператор

$$T^\beta_{m,n}f(Z)\equiv c_{m,n}(\beta)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}G_{m,n}(Z,\zeta;\beta,f)\,d\mu_{m,n}(\zeta),\ Z\in R_{m,n},\tag{3.28}$$

где

$$G_{m,n}(Z,\zeta;\beta,f)\overset{\text{def}}{\equiv}f(\zeta)\frac{[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*)]^\beta}{[\det(I^{(m)}-Z\cdot\zeta^*)]^{m+n+\beta}},\ \operatorname{Re}\beta>-1.\tag{3.29}$$

(а) Лемма 3.1. *Положим, как всегда,* $1\leqslant p<+\infty$ *и* $-1<\alpha<+\infty$, $f(\zeta)\in L^p_\alpha(R_{m,n})$.

1. *Пусть* $p=1$, *компакт* $K\subset R_{m,n}$, $0<A<+\infty$ *и* $\alpha<a<+\infty$. *Тогда существует функция* $\Psi(\zeta)\equiv\Psi_1(\zeta)\in L^1(R_{m,n};d\mu_{m,n})$ *такая, что оценка*

$$|G_{m,n}(Z,\zeta;\beta,f)|\leqslant\Psi(\zeta),\ \zeta\in R_{m,n},\tag{3.30}$$

справедлива равномерно по $Z\in K$ *и* $\beta\in\mathbf{C}$, *но при* $|\operatorname{Im}\beta|\leqslant A$, $\alpha\leqslant\operatorname{Re}\beta\leqslant a$.

2. *Пусть* $1<p<+\infty$, *компакт* $K\subset R_{m,n}$ *и* $0<A<+\infty$, $\frac{1+\alpha}{p}-1<a_1<a_2<+\infty$. *Тогда существует функция* $\Psi(\zeta)\equiv\Psi_2(\zeta)\in L^1(R_{m,n};d\mu_{m,n})$ *такая, что оценка* (3.30) *имеет место равномерно по* $Z\in K$ *и* $\beta\in\mathbf{C}$, *при* $|\operatorname{Im}\beta|\leqslant A$ *и* $a_1\leqslant\operatorname{Re}\beta\leqslant a_2$.

Доказательство. При $Z\in R_{m,n}$, $\zeta\in\overline{R}_{m,n}$, $\beta\in\mathbf{C}$ определим функцию

$$\begin{gathered}\eta(Z,\zeta;\beta)=[\det(I^{(m)}-Z\cdot\zeta^*)]^{m+n+\beta}\equiv\\ \equiv\exp\{(m+n+\beta)\cdot\ln\det(I^{(m)}-Z\cdot\zeta^*)\}.\end{gathered}\tag{3.31}$$

Очевидно, что η непрерывна по совокупности переменных $Z\in R_{m,n}$, $\zeta\in\overline{R}_{m,n}$, $\beta\in\mathbf{C}$, притом нигде в нуль не обращается. Поэтому в обоих рассматриваемых в лемме 3.1 случаях 1 или 2 справедлива оценка снизу

$$|\eta(Z, \zeta; \beta)| \geqslant \delta > 0.$$

Отсюда и из определения (3.29) функции $G_{m,n}$ следует, что в тех же случаях 1 или 2 имеем оценку сверху

$$|G_{m,n}(Z, \zeta; \beta, f)| \leqslant |f(\zeta)| \cdot |\eta(Z, \zeta; \beta)|^{-1} \times$$
$$\times [\det(I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^{\operatorname{Re}\beta} \leqslant \delta^{-1} \cdot |f(\zeta)| \cdot [\det(I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^{\operatorname{Re}\beta}. \tag{3.32}$$

Наконец, из условий, наложенных на $\operatorname{Re}\beta$ в обоих случаях 1 или 2, вытекает существование функций $\Psi_{1,2}(\zeta) \in L^1(R_{m,n}; d\mu_{m,n})$, чем и завершится доказательство леммы.

Следствие 3.1. Пусть $1 \leqslant p < +\infty$, $\alpha > -1$, $f(Z) \in L^p_\alpha(R_{m,n})$ и $\beta \vdash (p, \alpha)$. Тогда $T^\beta_{m,n} f(Z)$, как функция от $Z \in R_{m,n}$, голоморфна в $R_{m,n}$.

Следствие 3.2. В тех же предположениях $1 \leqslant p < +\infty$, $\alpha > -1$, $f \in L^p_\alpha(R_{m,n})$ и $Z \in R_{m,n}$:

Если $p = 1$, то $T^\beta_{m,n} f(Z)$, как функция от β, голоморфна внутри и непрерывна в замкнутой области $\operatorname{Re}\beta \geqslant \alpha$.

Если же $1 < p < +\infty$, то $T^\beta_{m,n} f(Z)$, как функция от β, голоморфна в области $\operatorname{Re}\beta > (1+\alpha)/p - 1$.

(б) Наконец, сформулируем и докажем основную теорему.

Теорема 3.3. *Пусть* $1 \leqslant p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$ *и* $\beta \vdash (p, \alpha)$. *Тогда любая функция* $f(Z) \in H^p_\alpha(R_{m,n})$ *допускает интегральное представление*

$$f(Z) \equiv T^\beta_{m,n} f(Z), \; Z \in R_{m,n}. \tag{3.33}$$

Доказательство. Выберем произвольную функцию $f \in H^p_\alpha \times (R_{m,n}) \subset L^p_\alpha(R_{m,n})$, и затем фиксируя точку $Z \in R_{m,n}$, положим

$$h(\beta) \equiv T^\beta_{m,n} f(Z). \tag{3.34}$$

Согласно следствию 3.2 леммы 3.1, при $p = 1$ функция $h(\beta)$ голоморфна внутри и непрерывна в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re}\beta \geqslant \alpha$, а при $1 < p < +\infty$ она голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re}\beta > (1+\alpha)/p - 1$.

Нашей конечной целью является установление тождества

$$h(\beta) \equiv f(Z). \tag{3.35}$$

Если положить $\beta_0 = \max\{0; (1+\alpha)/p - 1\}$, нам в силу теоремы единственности голоморфных функций достаточно установить, что

$$h(\beta) \equiv f(Z), \; \beta > \beta_0. \tag{3.36}$$

Но при любом $\beta > \beta_0$ легко видеть, что $\beta \vdash (p, \alpha)$ и поэтому, согласно предложению 3.1

$$f(Z) \in H^1_\beta(R_{m,n}).$$

Наконец, поскольку $\beta > 0$, то согласно теореме 3.2 приходим к тождеству (3.36)

$$f(Z)\equiv T^{\beta}_{m,n} f(Z)\equiv h(\beta),\ \beta>\beta_0,$$

т. е. к доказательству теоремы.

Замечание. Комбинируя результаты монографии [6] и работы [8], можно получить утверждение теоремы 3.3 при $\alpha=0$ и вещественном $\beta>0$.

(в) В заключение статьи считаем не лишним отметить, что естественно возникающий в связи с теоремой 3.3 вопрос о справедливости соответствующей ей теоремы проектирования остается открытым.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 10.V.1989

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ, Ա. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ. Ինտեգրալ ներկայացումներ ընդհանրացված միավոր շրջանում (ամփոփում)

Կամայական $m, n\geqslant 1$ բնական թվերի համար նշանակենք $R_{m,n}$-ով $m\times n$ չափսերի այն կոմպլեքս մատրիցներից բաղկացած տիրույթը, որոնց համար $I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*$ մատրիցը դրականորեն որոշված է։ Այստեղ $I^{(m)}$-ը m կարգի միավոր քառակուսի մատրիցն է, իսկ ζ^*-ը ζ-ի Հերմիտյան համալուծումն է։

Բացի այդ, $\mu_{m,n}$ $(m, n\geqslant 1)$ կնշանակի Լեբեգի չափը $R_{m,n}$ տիրույթում։ Ներկայացված աշխատանքում $R_{m,n}$ տիրույթում հոլոմորֆ և

$$\int\limits_{R_{m,n}} |f(\zeta)|^p\cdot[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*)]^{\alpha}\,d\mu_{m,n}(\zeta)<+\infty \tag{1}$$

պայմանին բավարարող $H^p_\alpha(R_{m,n})$ դասերի $(1\leqslant p<+\infty,\ \alpha>-1)$ $f(\zeta)$ ֆունկցիաների համար ապացուցված է հետևյալ ինտեգրալ բանաձևը (Թեորեմ 3.3).

$$f(Z)=c_{m,n}(\beta)\cdot\int\limits_{R_{m,n}} f(\zeta)\cdot\frac{[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*)]^{\beta}\,d\mu_{m,n}(\zeta)}{[\det(I^{(m)}-Z\cdot\zeta^*)]^{m+n+\beta}},\ Z\in R_{m,n}, \tag{2}$$

որտեղ $\beta\in C$ և

$$\operatorname{Re}\beta>\frac{1+\alpha}{p}-1,\ 1<p<+\infty,$$

$$\operatorname{Re}\beta\geqslant\alpha,\ p=1.$$

Այս հիմնական արդյունքը հանդիսանում է հեղինակներից մեկի 40-ական թվականների [1,2] աշխատանքներում ապացուցված ինտեգրալ ներկայացման բազմաչափ անալոգը։ Միևնույն ժամանակ Թեորեմ 3.3-ը ընդհանրացնում է Հուա Լո-Քենի [6] արդյունքը, որը հաստատում է (2) բանաձևը $p=2$ և $\beta=\alpha=0$ պայմանների դեպքում, որոնք ի դեպ, չափազանց էական են [6] մենագրությունում կիրառված մեթոդների տեսակետից։

M. M. DJRBASHIAN, A. H. KARAPETIAN. *Integral representations in a generalized unit disk* (summary)

Let $R_{m,n}$ $(m, n\geqslant 1)$ be the complex domain of $m\times n$—matrices ζ, for which the matrix $I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*$ is positively determined. Here $I^{(m)}$ denotes square unit matrix of order m and the matrix ζ^* is Hermitian conjugate of ζ. Besides, let $\mu_{m,n}$ $(m, n\geqslant 1)$ denotes Lebesgue measure in the domain $R_{m,n}$.

In the present paper for the classes $H^p_\alpha(R_{m,n})$ $(1\leqslant p<\infty,\ \alpha>-1)$ consisting of functions $f(\zeta)$ holomorphic in $R_{m,n}$ and satisfying the condition

$$\int\limits_{R_{m,n}} |f(\zeta)|^p \cdot [\det (I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^{\alpha} \, d\mu_{m,n}(\zeta) < +\infty \qquad (1)$$

the following integral formula have been established (Theorem 3.3):

$$f(Z) = c_{m,n}(\beta) \cdot \int\limits_{R_{m,n}} \frac{[\det (I^{(m)} - \zeta \cdot \zeta^*)]^{\beta} \, d\mu_{m,n}(\zeta)}{[\det (I^{(m)} - Z \cdot \zeta^*)]^{m+n+\beta}}, \quad Z \in R_{m,n}, \qquad (2)$$

where $\beta \in C$ and

$$\operatorname{Re}\beta > \frac{1+\alpha}{p} - 1, \quad 1 < p < +\infty,$$

$$\operatorname{Re}\beta \geqslant \alpha, \quad p = 1.$$

This main result represents a multidimensional analogue of the integral representation established by one of the authors in the 1940 s ([1], [2]). At the same time Theorem 3.3 of our paper generalizes the result of Hua L. K. [6] asserting that the formula (2) holds under the conditions $p = 2$ and $\beta = \alpha = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. О представимости некоторых классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН Арм. ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. *М. М. Джрбашян*. К проблеме представимости аналитических функций. Сообщ. Ин-та матем. и механики АН Арм. ССР, вып. 2, 1948, 3—40.
3. *M. M. Dzrbasjan*, Survey of some achievements of Armenian mathematicians in the theory of integral representations and factorization of analytic functions Математички Весник (Югославая), 39, 1977, 263—282.
4. *М. М. Джрбашян*. Краткий обзор результатов исследований математиков Армении в области теории факторизации мероморфных функций и ее приложений. Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 23, № 6, 1988, 517—545.
5. *A. E. Djrbashian, F. A. Shamoian*. Topics in the Theory of A^p_α Spaces, Teubner Texte zur Mathematik, B. 105.
6. *Хуа Ло-кен*. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, М., ИЛ, 1959.
7. *F. Forelli, W. Rudin*. Projections on spaces of holomorphic functions in balls, Ind. Univ. Math. J., 24, № 6, 1974, 593—602.
8. *M. Stoll*. Mean value theorems for harmonic and holomorphic functions on bounded symmetric domains, J. Reine und Angew. Math., 290, 1977, 191—198.