ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 5, 1989 Математика

УДК 517.53

А. М. ДЖРБАШЯН

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТИПА БЛЯШКЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

1°. В работах автора [1], [2] были введены в рассмотрение и исследованы зависящие от параметра $\alpha\ (-1<\alpha<\infty)$ произведения типа Бляшке для нижней полуплоскости $G^{(-)}=\{w:\mathrm{Im}\,w<0\}$

$$B_\alpha(w,\{w_k\})=\prod_k b_\alpha(w,w_k)=\prod_k \exp\{-\Omega_\alpha(w,w_k)\},\tag{1}$$

$$\Omega_\alpha(w,\zeta)=-\int_{-|\eta|}^{|\eta|}\frac{(|\eta|-|t|)^\alpha\,dt}{[i(w-\xi)-t]^{1+\alpha}};\ \zeta=\xi+i\eta\in G^{(-)}.\tag{2}$$

Условие сходимости этих произведений, налагаемое на последовательность их нулей $\{w_k\}\subset G^{(-)}$, имеет вид

$$\sum_k|\mathrm{Im}\,w_k|^{1+\alpha}<+\infty.$$

При выполнении последнего условия функция $B_\alpha(w,\{w_k\})$ аналитична в $G^{(-)}$ и имеет нули только в точках последовательности $\{w_k\}$, с кратностями, равными кратностями их появления в этой последовательности. Одновременно, при $\alpha=0$, после замен $w=z^{-1}$, $\{w_k\}\equiv\{z_k^{-1}\}$ произведение (1) переходит в хорошо известное произведение Бляшке—Неванлинны

$$\prod_k(1-z/z_k)/(1-z/\bar{z}_k).$$

Основной областью применения отмеченных произведений типа Бляшке является теория факторизации классов функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости [3], [4], ассоциированных с оператором интегродифференцирования Вейля. На надлежащих множествах функций $U(w)$, определенных в $G^{(-)}$, этот оператор был введен следующим образом:

$$W^{-\alpha}U(w)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\sigma^{\alpha-1}U(w-i\sigma)\,d\sigma;\ 0<\alpha<+\infty,\tag{3}$$

$$W^0U(w)=U(w),$$

$$W^\alpha U(w)=W^{-(p-\alpha)}\frac{\partial^p}{\partial(\mathrm{Im}\,w)^p}U(w);\ 0<\alpha<+\infty,\tag{4}$$

где $p\geqslant 0$ — целое число такое, что $p-1<\alpha\leqslant p$.

2°. Целью данной статьи является доказательство нижеприведенной теоремы о представлениях произведений типа Бляшке для полуплоскости, существенно упрощающих исследование их свойств.

Теорема. *Пусть* $\alpha \in (-1, 1)$ *любое, а последовательность* $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ *такова, что одновременно*

$$\sum_k |\operatorname{Im} w_k| < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} < +\infty. \tag{5}$$

Тогда справедливо представление

$$B_\alpha(w, \{w_k\}) = B_0(w, \{w_k\}) \exp\left\{\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}\right\}; \quad w \in G^{(-)}, \tag{6}$$

где функция $\mu(t)$ *при* $-1 < \alpha < 0$ — *монотонно невозрастающая и ограниченная на* $(-\infty, +\infty)$, *а при* $0 < \alpha < 1$ — *монотонно неубывающая на* $(-\infty, +\infty)$, *но подчиненная условию*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{1+|t|^{\alpha+\varepsilon}} < +\infty \tag{7}$$

при любом $\varepsilon > 0$.

При этом, каково бы ни было $\alpha \in (-1, 1)$, *существует последовательность* $\delta_n \downarrow 0$ *такая, что*

$$\mu(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t W^{-\alpha} \log\left|\frac{B_\alpha(u - i\delta_n, \{w_k\})}{B_0(u - i\delta_n, \{w_k\})}\right| du \quad (-\infty < t < +\infty). \tag{8}$$

Замечание. Из формулы (6), в частности, непосредственно следует, что *в случае, когда* $-1 < \alpha < 0$

$$|B_\alpha(w, \{w_k\})| < |B_0(w, \{w_k\})| \leqslant 1; \quad w \in G^{(-)}.$$

Следует отметить, что как и в теории факторизации функций обобщенно-ограниченного вида в круге [5], [6], здесь также основной интерес представляют факторизации произведений типа Бляшке в случае, когда $-1 < \alpha < 0$. И в этом случае результат приведенной теоремы наиболее полон.

Перейдем к доказательству ряда лемм, необходимых для установления результата статьи.

3°. Всюду ниже будем полагать

$$\log b_\alpha(w, \zeta) \equiv -\Omega_\alpha(w, \zeta) \quad (w, \zeta \in G^{(-)}, \alpha > -1),$$

отметив, что при $\alpha = 0$ это определение логарифмической функции приводит к ее главной ветви.

Лемма 1. *При любых* $\alpha \in (-1, 1)$ *и* $\zeta = \xi + i\eta \in G^{(-)}$ *функция*

$$\varphi_\alpha(w, \zeta) = W^{-\alpha} \log \frac{b_\alpha(w, \zeta)}{b_0(w, \zeta)} \tag{9}$$

аналитична в области $\mathbf{C} \setminus \{\xi + ih : 0 \leqslant h < +\infty\}$, *где для нее справедливо представление*

$$\Gamma(1+\alpha)\varphi_\alpha(w,\zeta)=\int\limits_{|\eta|}^{+\infty}\left\{\frac{1}{\sigma+i(w-\zeta)}-\frac{1}{\sigma+i(w-\bar\zeta)}\right\}\sigma^\alpha d\sigma+$$

$$+\int\limits_0^{|\eta|}\left\{\frac{1}{\sigma-i(w-\zeta)}-\frac{1}{\sigma+i(w-\bar\zeta)}\right\}\sigma^\alpha d\sigma. \tag{10}$$

Доказательство. Покажем сначала, что при $w\in\{\zeta+ih:0\leqslant\leqslant h<+\infty\}$

$$W^{-\alpha}\log b_0(w,\zeta)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^{+\infty}\left\{\frac{1}{\sigma+i(w-\bar\zeta)}-\frac{1}{\sigma+i(w-\zeta)}\right\}\sigma^\alpha d\sigma. \tag{11}$$

Действительно, при $\alpha=0$ это очевидно ввиду тождественности оператора W^0. При $0<\alpha<1$ интегрированием по частям получаем

$$W^{-\alpha}\log b_0(w,\zeta)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^{+\infty}\sigma^\alpha\, d\log\frac{\sigma+i(w-\bar\zeta)}{\sigma+i(w-\zeta)},$$

что приводит к формуле (1). В случае же, когда $-1<\alpha<0$, очевидно

$$W^{-\alpha}\log b_0(w,\zeta)=W^{-(1+\alpha)}\left\{\frac{1}{i(w-\bar\zeta)}-\frac{1}{i(w-\zeta)}\right\},$$

что опять приводит к формуле (11).

Представление (10) и, тем самым, аналитичность функции $\varphi_\alpha(w,\zeta)$ в требуемой области следуют из (11) и формулы

$$W^{-\alpha}\log b_2(w,\zeta)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{-|\eta|}^{|\eta|}\frac{(|\eta|-|t|)^\alpha dt}{t-i(w-\xi)} \tag{12}$$

(см. [2], формулу (2.5)).

Лемма 2. *При любых* $\alpha\in(-1,1)$ *и* $\zeta=\xi+i\eta\in G^{(-)}$ *функция* $\operatorname{Re}\varphi_\alpha(w,\zeta)$ *гармонична в* $G^{(-)}$ *и непрерывна в* $\overline{G^{(-)}}=\{w:\operatorname{Im}w\leqslant 0\}$.

Доказательство. В силу предыдущей леммы достаточно показать непрерывность этой функции в точке $w=\xi$, или, что то же самое, непрерывность в начале координат вещественной части функции

$$\varphi_\alpha^*(w,\zeta)=\Gamma(1+\alpha)\varphi_\alpha(w+\xi,\zeta). \tag{13}$$

С этой целью отнимем от (10) такую же формулу для $\varphi_0(w,\zeta)$ $(\equiv 0)$, умноженную на $|\eta|^\alpha$, вследствие чего получим:

$$\varphi_\alpha^*(w,\zeta)=\int\limits_{|\eta|}^{+\infty}\left\{\frac{1}{\sigma-|\eta|+iw}-\frac{1}{\sigma+|\eta|+iw}\right\}(\sigma^\alpha-|\eta|^\alpha)\,d\sigma+$$

$$+\int\limits_0^{|\eta|}\left\{\frac{1}{\sigma-|\eta|-iw}-\frac{1}{\sigma-|\eta|+iw}\right\}(\sigma^\alpha-|\eta|^\alpha)\,d\sigma.$$

Однако, как нетрудно проверить, $|\sigma^\alpha - |\eta|^\alpha| < C_\alpha |\sigma - |\eta|| (\sigma > 0)$, где C_α — постоянная, зависящая лишь от α и $|\eta|$. Поэтому, оценивая вещественные части подынтегральных выражений последней формулы и воспользовавшись теоремой Лебега о мажорированной сходимости приходим к заключению, что $\operatorname{Re} \varphi_\alpha^* (w, \zeta)$ непрерывна в $\overline{G^{(-)}}$, причем

$$\lim_{\substack{w\to 0\\ \operatorname{Im} w<0}} \operatorname{Re} \varphi_\alpha^* (w, \zeta) = 2|\eta| \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^\alpha - |\eta|^\alpha}{\sigma^2 - |\eta|^2} d\sigma.$$

4°. Лемма 3. *При любых* $\zeta \in G^{(-)}$ *и* $w \in \overline{G^{(-)}}$

$$\operatorname{Re} \varphi_\alpha (w, \zeta) \begin{cases} < 0, \text{ если } -1 < \alpha < 0 \\ > 0, \text{ если } \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases} \tag{14}$$

Доказательство. Установим эти неравенства для функции $\operatorname{Re} \varphi_\alpha^* (w, \zeta)$, и сначала при $w = u \in (-\infty, +\infty)$.

Как следует из (13) и (10)

$$\operatorname{Re} \varphi_\alpha^* (u, \zeta) = \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\sigma - |\eta| + iu} - \frac{1}{\sigma + |\eta| + iu} \right\} \sigma^\alpha d\sigma =$$

$$= \left(\int_0^{|\eta|} + \int_{|\eta|}^{+\infty} \right) \sigma^\alpha d \log \left| \frac{\sigma - |\eta| + iu}{\sigma + |\eta| + iu} \right| \equiv I_1(u) + I_2(u).$$

При этом, если $0 < \sigma < |\eta|$, то

$$\frac{\partial}{d\sigma} \log \left| \frac{\sigma - |\eta| + iu}{\sigma + |\eta| + iu} \right| = -2|\eta| \frac{u^2 + \eta^2 - \sigma^2}{|(\sigma + iu)^2 - \eta^2|^2} < 0.$$

Одновременно, $\sigma^\alpha < |\eta|^\alpha$, если $\alpha > 0$ и $\sigma^\alpha > |\eta|^\alpha$, если $\alpha < 0$. Поэтому

$$-|\eta|^\alpha \log \left| \frac{2|\eta| + iu}{u} \right| \begin{cases} > I_1(u), \text{ при } -1 < \alpha < 0 \\ < I_1(u), \text{ при } \quad 0 < \alpha < 1 \end{cases} (-\infty < u < +\infty).$$

Интегрированием по частям приходим к представлению для $I_2(u)$:

$$I_2(u) = |\eta|^\alpha \log \left| \frac{2|\eta| + iu}{u} \right| - \alpha \int_{|\eta|}^{+\infty} \log \left| \frac{\sigma - |\eta| + iu}{\sigma + |\eta| + iu} \right| \sigma^{\alpha-1} d\sigma.$$

Отсюда и из оценок для $I_1(u)$ следуют неравенства вида (14) для функции $\operatorname{Re} \varphi_\alpha^* (w, \zeta)$ при $w = u \in (-\infty, +\infty)$. Для их распространения на все $w \in \overline{G^{(-)}}$ достаточно воспользоваться принципом Фрагмена—Линделефа и оценкой

$$|\varphi_\alpha^* (w, \zeta)| \leqslant \frac{8}{3} \left[\frac{|\eta|}{|w|^{1-\alpha}} + \frac{1}{1+\alpha} \frac{|\eta|^{1+\alpha}}{|w|} \right] (w \in G^{(-)}, |w| > 2|\eta|),$$

которую нетрудно получить из представления (11), (13) функции $\varphi_\alpha^* (w, \zeta)$, оценивая модули подынтегральных выражений.

Замечание. Из последней оценки функции $\varphi_\alpha^*(w, \zeta)$ вытекает следующая оценка для $\varphi_\alpha(w, \zeta)$:

$$|\varphi_\alpha(u+iv)| \leqslant \frac{8}{3\Gamma(1+\alpha)}\left[\frac{|\eta|}{|v|^{1-\alpha}} + \frac{1}{1+\alpha}\frac{|\eta|^{1+\alpha}}{|v|}\right] \quad (v < -2|\eta|). \tag{15}$$

С другой стороны, воспользовавшись представлением (10) и неравенствами (14), нетрудно проверить, что если $v < 0$ достаточно мало, то при любом $\eta \in (-1, 0)$ справедливы оценки

$$|\operatorname{Re}\varphi_\alpha(iv, i\eta)| > \begin{cases} C_\alpha \dfrac{|\eta|}{|v|^{1-\alpha}}, & \text{при} \quad 0 < \alpha < 1 \\ C_\alpha' \dfrac{|\eta|^{1+\alpha}}{|v|}, & \text{при} \quad -1 < \alpha < 0, \end{cases} \tag{16}$$

где C_α и C_α' — положительные постоянные, зависящие лишь от α.

5°. Предположив, что $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ — некая последовательность, подчиненная условиям (5) при данном $\alpha \in (-1, 1)$, введем в рассмотрение аналитическую в $G^{(-)}$ функцию

$$\Phi_\alpha(w, \{w_k\}) \equiv W^{-\alpha}\log\frac{B_\alpha(w, \{w_k\})}{B_0(w, \{w_k\})} =$$

$$= \sum_k W^{-\alpha}\log\frac{b_\alpha(w, w_k)}{b_0(w, w_k)} = \sum_k \varphi_\alpha(w, w_k). \tag{17}$$

Отметим, что абсолютная и равномерная сходимость последних двух рядов внутри $G^{(-)}$ обеспечивается оценкой (15) и такой же сходимостью ряда от $W^{-\alpha}|\log b_\alpha(w, w_k)|$. А их раненство первым двум справедливо в силу теоремы Фубини (см. [2], оценки (1.11) и (2.7)).

Лемма 4. *Пусть $\alpha \in (-1, 1)$ и последовательность $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ такова, что выполнено условие* (5). *Тогда справедливо представление*

$$\Phi_\alpha(w, \{w_k\}) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{w-t}; \quad w \in G^{(-)}, \tag{18}$$

где функция $\mu(t)$ при $-1 < \alpha < 1$ — монотонно невозрастающая и ограниченная на $(-\infty, +\infty)$, а при $0 < \alpha < 1$ — монотонно неубывающая на $(-\infty, +\infty)$, но подчиненная условию (7) *при любом $\varepsilon > 0$. При этом, каково бы ни было $\alpha \in (-1, 1)$, существует последовательность $\delta_n \downarrow 0$, по которой выполнено соотношение* (8).

Доказательство. В силу формулы (17), неравенства (14) и теоремы Герглотца—Рисса, в обоих случаях $-1 < \alpha < 0$ и $0 < \alpha < 1$ справедливо представление

$$\Phi_\alpha(w, \{w_k\}) = ipw + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{w-t} - \frac{1}{1+t^2}\right\}d\mu(t) + iC,$$

где p и C — вещественные числа, а $\mu(t)$ — функция, монотонно невозрастающая в случае $-1 < \alpha < 0$ и монотонно неубывающая в случае $0 < \alpha < 1$, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\mu(t)|}{1+t^2} < +\infty.$$

При этом (см., напр., [8], гл. I, § 4), можно считать, что существует последовательность $\delta_n \downarrow 0$ такая, что имеет место соотношение (8).

Заметим теперь, что в силу (15) и (17) при $v < -2 \max\limits_k |\operatorname{Im} w_k|$ справедлива оценка

$$|\Phi_\alpha(u+iv, \{w_k\})| \leqslant \frac{8}{3\Gamma(1+\alpha)} \left[\frac{1}{|v|^{1-\alpha}} \sum_k |\operatorname{Im} w_k| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1+\alpha)|v|} \sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} \right].$$

Поэтому, в случае, когда $-1 < \alpha < 0$, имеем

$$\sup_{v<0} |v \Phi_\alpha(iv, \{w_k\})| < +\infty,$$

что влечет представление (18) и ограниченность функции $\mu(t)$ (см., напр., [8], доп. I, § 4). В случае же когда $0 < \alpha < 1$, очевидно

$$\lim_{v \to -\infty} \Phi_\alpha(iv, \{w_k\}) = 0,$$

и при любом $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\Phi_\alpha(-it, \{w_k\})|}{t^{\alpha+\varepsilon}} dt < +\infty$$

(при этом, $\varepsilon > 0$ в степени знаменателя нельзя отбросить ввиду оценки снизу для функции $\operatorname{Re}\Phi_\alpha$, вытекающей из (16)). Отсюда опять следует представление (18) и соотношение (7), где нельзя отбросить $\varepsilon > 0$ (см. [8], доп. I, § 3).

6°. Лемма 5. *В условиях леммы 4 справедлива формула*

$$W^\alpha \Phi_\alpha(w, \{w_k\}) = \log \frac{B_\alpha(w, \{w_k\})}{B_0(w, \{w_k\})}; \ \operatorname{Im} w < -\max_k |\operatorname{Im} w_k|.$$

Доказательство начнем со случая, когда последовательность $\{w_k\}$ состоит из единственного члена $\zeta = \xi + i\eta \in G^{(-)}$ и будем пользоваться формулой

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sigma^{-\gamma}\, d\sigma}{(z+\sigma)^{n+1}} = \frac{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(1-\gamma)}{n!} \frac{1}{z^{\gamma+n}}; \ z \overline{\in} (-\infty, 0], \tag{19}$$

справедливой при любом целом $n \geqslant 0$ и любом $\gamma \in (-n, 1)$.

В случае, когда $0 < \alpha < 1$, при $\operatorname{Im} w < \eta$, ввиду (12), (4) и (1)—(2) имеем

$$W^\alpha W^{-\alpha} \log b_\alpha(w, \zeta) =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{-|\eta|}^{|\eta|} (|\eta| - |t|)^\alpha dt \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sigma^{-\alpha}\, d\sigma}{[i(w-\xi) - t + \sigma]^2} =$$

$$= \log b_\alpha(w, \zeta),$$

Одновременно, поскольку в силу (3) и (19)

$$W^{-\alpha}\log b_0(w,\zeta)=-\Gamma(1-\alpha)\int_{-|\eta|}^{|\eta|}\frac{dt}{[i(w-\xi)-t]^{1-\alpha}},$$

то

$$W^{\alpha}W^{-\alpha}\log b_0(w,\zeta)=-(1-\alpha)\int_{-|\eta|}^{|\eta|}dt\int_0^{+\infty}\frac{\sigma^{-\alpha}\,d\sigma}{[i(w-\xi)-t+\sigma]^{2-\alpha}}=\log b_0(w,\zeta).$$

В случае, когда $-1<\alpha<0$, при $\operatorname{Im} w<\eta$ аналогичным способом приходим к таким же равенствам. Тем самым, при $\operatorname{Im} w<\eta$ и любом $\alpha\in(-1,1)$

$$W^{\alpha}\varepsilon_{\alpha}(w,\zeta)=\log\frac{b_{\alpha}(w,\zeta)}{b_0(w,\zeta)}.$$

Отсюда и из (9) следует формула леммы в силу абсолютной и равномерной сходимости ряда

$$\log\frac{B_{\alpha}(w,|w_k|)}{B_0(w,|w_k|)}=\sum_k\log\frac{b_{\alpha}(w,w_k)}{b_0(w,w_k)}$$

при $\operatorname{Im} w<-\max|\operatorname{Im} w_k|$ (см. [2]).

Доказательство теоремы в силу лемм 4 и 5 очевидно сводится к доказательству равенства

$$W^{\alpha}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{w-t}\right\}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}},\quad w\in G^{(-)},$$

в предположении, что функция $\mu(t)$ такова, как в теореме. А это проверяется непосредственно, с использованием формулы (19).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 14.I.1988

Ա. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Կիսահարթության Բլյաշկեի տիպի արտադրյալի մի ներկայացման մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում գտնված են ֆակտորիզացիաներ հեղինակի կողմից ներմուծված B_α $(-1<\alpha<+\infty)$ *Բլյաշկեի տիպի արտադրյալների համար կիսահարթությունում։ Այդ ֆակտորիզացիաները ապացուցված են* $-1<\alpha<1$ *դեպքում և իրականացվում են Բլյաշկե—Նևանլիննի արտադրյալի և որոշ պարզ տեսքի հատուկ արտադրիչների միջոցով։Նրանք էապես պարզեցնում են* B_α *արտադրյալների հատկությունների ուսումնասիրությունը։*

A. M. JERBASHYAN (DZRBASJAN). *On some representation of Blaschke type product for the half-plane* (summary)

In the present paper we establish factorisations of Blaschke type products B_α $(-1<\alpha<+\infty)$ for the half-plane introduced earlyer. These factorizations are formed by Blacshke—Nevanlinna products and some special factors of simple structure and are proved in the case $-1<\alpha<1$ only. These factorizations substantially simplify the investigation of the properties of the products B_α.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. М. Джрбашян.* Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 1979, 246, № 6, 1295—1298.
2. *А. М. Джрбашян.* Функции типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР. «Математика», 1983, XVIII, № 6, 409—440.
3. *А. М. Джрбашян.* Факторизация, параметрические представления и граничные свойства некоторых общих классов мероморфных в полуплоскости функций, автореферат дис. на соискание уч. степ. кандидата физ.-мат. наук, Харьков, 1983.
4. *А. М. Джрбашян.* Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1986, XXI, № 3, 213—279.
5. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Мат. сб., 1969, 79 (121), № 4 (8), 517—615.
6. *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1971, VI, №№ 2—3, 182—194.
7. *L. De Branges.* Hilbert Spaces of Entire Functions, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. Y., 1968.
8. *Ф. Аткинсон.* Дискретные и непрерывные граничные задачи, «Мир», М., 1968.