ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 5, 1989 Математика

УДК 517.95

В. Г. САГОЯН

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ РЕДЖЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Настоящая работа посвящена исследованию полноты системы собственных функций несамосопряженного оператора Дирака **B** с финитным (безмассовым) потенциалом, который порождается дифференциальным выражением

$$L\,y(x)=\left\{\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}\right\}y(x) \qquad (1.1)$$

и граничными условиями

$$y_1(0)=0,\ y_2(b)+iy_1(b)=0.$$

Относительно коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ мы предполагаем, что они непрерывны на интервале $[0,\ a)$ и

$$p(x)=q(x)=0,\ x>a$$
$$p(a)\neq 0,\ q(a)=0. \qquad (1.2)$$

Оператор **B** действует в пространстве $L^2(0,\ b;\ \mathbf{C}^2)$, $b\geqslant a$. Собственные числа оператора **B** называются резонансами задачи Редже, а собственные функции—резонансными состояниями (см. [9]).

В работе доказывается, что система резонансных состояний задачи Редже полна (при $b=a$) в пространстве $L^2(0,\ a;\ \mathbf{C}^2)$ (см. теорему 6). Исследована также совместная полнота собственных функций оператора **B** и его сопряженного. Доказано, что при $b\leqslant 2a$ системы собственных функций оператора **B** и его сопряженного совместно полны в $L^2(0,\ b;\ \mathbf{C}^2)$.

Решения вышепоставленных задач с помощью методов работ [1], [2] сводятся к исследованию аналитических свойств характеристической функции оператора **B**.

§ 1. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе приводятся вспомогательные сведения из спектральной теории самосопряженного оператора Дирака (см. [8]).

Рассмотрим самосопряженный дифференциальный оператор **L**, действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{R}_+,\ \mathbf{C}^2)$, который порождается дифференциальным выражением (1.1) и следующим граничным условием

$$y_1(0)=0. \qquad (1.3)$$

Обозначим через $F(x, \lambda)$ решение Йоста уравнения

$$(L-\lambda I)\, y(x)=0. \tag{1.4}$$

Оно определяется из условия

$$F(x, \lambda)=f(x, \lambda)=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{i\lambda x},\ x\geqslant a. \tag{1.5}$$

Как известно, для решения $F(x, \lambda)$ имеется представление Левина

$$F(x, \lambda)=f(x, \lambda)+\int\limits_x^{\infty} A(x, t)\, f(t, \lambda)\, dt. \tag{1.6}$$

Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ решение уравнения (1.4) с граничными значениями

$$\varphi_1(0, \lambda)=0,\ \varphi_2(0, \lambda)=1. \tag{1.7}$$

Очевидно, что при действительных λ функции $F(x, \lambda)$ и $\overline{F(x, \lambda)}$ образуют линейно независимую систему решений уравнения (1.4). Легко проверить, что $\varphi(x, \lambda)$ выражается через их линейную комбинацию следующим образом:

$$\varphi(x, \lambda)=\frac{1}{2i}\left[F(x, \lambda)\,\overline{F_1(\lambda)}-\overline{F(x, \lambda)}\, F_1(\lambda)\right], \tag{1.8}$$

где $F_1(\lambda)=F_1(0, \lambda)$.

В верхней полуплоскости $Im\lambda>0$ ядро резольвенты $\mathbf{R}_\lambda$ оператора $\mathbf{L}$ имеет вид

$$R_\lambda(x, t)=\begin{cases}F(x, \lambda)\,\tilde{\varphi}(t, \lambda)\, F_1^{-1}(\lambda), & t<x,\\ \varphi(x, \lambda)\,\tilde{F}(t, \lambda)\, F_1^{-1}(\lambda), & t>x.\end{cases} \tag{1.9}$$

Здесь $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$ и $\tilde{F}(x, \lambda)$ — соответсвующие транспонированные векторы. Кроме того имеет место соотношение

$$\mathbf{R}_\lambda^*=\mathbf{R}_{\bar{\lambda}}. \tag{1.10}$$

У оператора $\mathbf{L}$ дискретный спектр отсутствует, непрерывный спектр заполняет всю вещественную ось. Для любой функции $f(x)$ из пространства $L^2(\mathbf{R}_+, \mathbf{C}^2)$ имеет место следующее разложение по собственным функциям непрерывного спектра оператора $\mathbf{L}$:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \varphi(x, \lambda)\int\limits_0^{\infty}\frac{\tilde{\varphi}(t, \lambda)}{|F_1(\lambda)|^2}\, f(t)\, dt, \tag{1.11}$$

а также равенство Парсеваля

$$\int\limits_0^{\infty}|f(x)|^2\, dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\tilde{\varphi}(f, \lambda)|^2\, d\theta, \tag{1.12}$$

где

$$\tilde{\varphi}(f, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{\varphi}(t, \lambda)}{F_1(\lambda)} f(t)\, dt.$$

Отметим, что в случае финитного потенциала решение $F(x, \lambda)$ при любом фиксированном x продолжается на всю комплексную плоскость λ как целая функция.

§ 2. Подход Лакса—Филлипса

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$-i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}, \quad u_1(0, t) = 0, \tag{2.1}$$

с начальными данными

$$\left. \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix} \right|_{t=0} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где пара $(u_1(x), u_2(x))$ принадлежит пространству $\mathbf{H} = L^2(\mathbf{R}_+, \mathbf{C}^2)$ где называют данными Коши.

Обозначим через V_t оператор эволюции задачи (2.1), (2.2), т. е. оператор, который переводит данные Коши $u(x, 0)$ в момент времени $t = 0$, в данные в момент времени t:

$$V_t u(x, 0) = u(x, t). \tag{2.3}$$

Согласно теореме Стоуна (см. [10], с. 292) самосопряженный оперотор $\mathbf{L}$ порождает в пространстве $\mathbf{H}$ однопараметрическую сильно непрерывную группу унитарных операторов

$$U_t = \exp(i\mathbf{L}t), \quad U_{t+s} = U_t U_s, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{2.4}$$

Теорема 1. *Унитарный оператор U_t совпадает с оператором эволюции задачи* (2.1), (2.2).

Доказательство. Согласно теореме VIII. 7 книги [10] имеем $U_t \mathbf{D}(\mathbf{L}) \subset \mathbf{D}(\mathbf{L})$. Обозначим

$$u(t) = U_t u, \quad u \in \mathbf{H} \cap \mathbf{D}(\mathbf{L}). \tag{2.5}$$

Но тогда из формул (2.4) и (2.5) имеем

$$\frac{d}{dt} u(t) = i\mathbf{L}\, u(t).$$

Теорема доказана.

Обозначим через $\mathbf{D}_\pm$ следующие подмножества пространства $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{D}_\pm = \{u \in \mathbf{H} : \operatorname{supp} u_i(x) \subset [b, \infty), \ b \geqslant a, \ i = 1, 2;$$
$$u_2(x) = \mp i\, u_1(x)\}. \tag{2.6}$$

Мы покажем, что $\mathbf{D}_+$ и $\mathbf{D}_-$ являются соответственно уходящим и приходящим подпространствами (см. [1], с. 45) для унитарной группы U_t, $t \in \mathbf{R}$, т. е. обладают следующими свойствами:

$$1)\ U_{\pm t}\,D_{\pm}\subset D_{\pm},\ t\geqslant 0;$$
$$2)\ \cap\, U_t D_{\pm}=\{\varnothing\},\ t\in R; \qquad (2.7)$$
$$3)\ \cup\, U_t D_{\pm}=H,\ t\in R.$$

Очевидно, что D_+ и D_- замкнуты и ортогональны в пространстве H. Действительно, возьмем элементы f из D_+, и g из D_-, тогда имеем

$$\int_0^{\infty}(f,\ g)\,dx=\int_b^{\infty}\left(\begin{pmatrix} f(t)\\ -if(x)\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} g(x)\\ ig(x)\end{pmatrix}\right)dx=0.$$

Теперь, обращая внимание на формулу (1.3) и учитывая, что $U_t=e^{iLt}$ действует как оператор эволюции задачи (2.1), (2.2), получим что действие унитарного оператора U_t в подпространстве $D_+(D_-)$ совпадает с правым (левым) сдвигом:

$$U_t\begin{pmatrix} u(x)\\ -iu(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u(x-t)\\ -iu(x-t)\end{pmatrix}$$
$$u(x)=0,\ 0\leqslant x\leqslant b. \qquad (2.8)$$
$$U_t\begin{pmatrix} u(x)\\ iu(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u(x+t)\\ iu(x+t)\end{pmatrix}.$$

Теперь соотношения 1) и 2) из формулы (2.7) для наших подпространств D_+, определенных формулой (2.6), являются элементарным следствием формулы (2.8). Выполнение условия 3) будет доказано ниже. Решение $u(x,\ t)=\begin{pmatrix} u(x-t)\\ -iu(x-t)\end{pmatrix}$, данные Коши которого принадлежат D_+, называется уходящей волной, решение $u(x,\ t)=\begin{pmatrix} u(x-t)\\ iu(x+t)\end{pmatrix}$, данные Коши которого принадлежат D_-, называется приходящей волной. Обозначим через K ортогональное дополнение суммы $D_+\oplus D_-$ в пространстве $H: K=H\ominus(D_+\oplus D_-)$. Оно называется трансляционно-инвариантным подпространством.

Лемма 1. *Подпространство* K *состоит из тех данных Коши, носители которых содержатся в отрезке* $[0,\ b]$:

$$K=\{u(x):\operatorname{supp} u_i(x)\subset[0,\ b],\ i=1,\ 2\}. \qquad (2.9)$$

Доказательство. Возьмем скалярную функцию $f(x)$ такую, что $\operatorname{supp} f(x)\subset[b,\ \infty)$, тогда векторы $\begin{pmatrix} f(x)\\ 0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0\\ f(x)\end{pmatrix}$ принадлежат $D_+\oplus D_-$. Действительно,

$$\begin{pmatrix} f(x)\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} f(x)\\ -if(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f(x)\\ if(x)\end{pmatrix}\right\},$$

$$\begin{pmatrix} 0\\ f(x)\end{pmatrix}=\frac{1}{2i}\left\{\begin{pmatrix} f(x)\\ if(x)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} f(x)\\ -if(x)\end{pmatrix}\right\}.$$

Следовательно, любой элемент из K ортогонален этим векторам. Отсюда немедлено следует (2.9). Лемма доказана.

Обозначим через $F_a(x, \lambda)$ решение Йоста (для точки a) уравнения (1.4), определенное следующим условием: $F_a(a, \lambda)=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$.
Для точек $b \geqslant a$ решение Йоста определяется соотношением

$$F_b(x, \lambda)=e^{-i\lambda(b-a)}\cdot F_a(x, \lambda).$$

Ясно, что $F_{b1}(b, \lambda)=1$, $F_{b2}(b, \lambda)=i$ и

$$F_b(x, \lambda)=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{i\lambda(x-b)},\quad x > b.$$

Обозначим через $\varphi_-(x, \lambda)$ следующее решение задачи рассеяния:

$$\varphi_-(x, \lambda)=\frac{1}{2i}\left[F_b(x, \lambda)-e^{-2i\lambda b}\frac{\overline{F_1(\lambda)}}{F_1(\lambda)}\cdot\overline{F_b(x, \lambda)}\right].$$

Пусть H_0 подмножество H, состоящее из функций, имеющих финитные носители в $(0, \infty)$. Для вектор-функций из H_0 определим следующую операцию:

$$\Gamma_- f(x)=\varphi_-(f, \lambda)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varphi_-^*(t, \lambda)f(t)\,dt.$$

Теорема 2. *Операция Γ_- осуществляет изометрическое отображение H_0 в $L^2(R)$, причем*

$$\Gamma_- D_-=H^2_-,\quad \Gamma_- D_+=S_b(\lambda)H^2_+,\quad \Gamma_- U_t=e^{i\lambda t}\Gamma_-,$$

функция $S_b(\lambda)$ является внутренней в верхней полуплоскости и

$$\Gamma_-\mathrm{K}=H^2_+\ominus S_b(\lambda)H^2_+.$$

Доказательство. Возьмем элемент $f(x)=\begin{pmatrix}g(x)\\ ig(x)\end{pmatrix}$ принадлежащий пересечению подпространства D_- с множеством H_0. Имеем

$$\Gamma_- f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varphi_-^*(x, \lambda)f(x)\,dx=\frac{i}{\sqrt{\pi}}\int_b^\infty g(x)\,e^{-i\lambda(x-b)}\,dx. \tag{2.10}$$

Отсюда, учитывая равенство Парсеваля (1.12) и унитарность преобразования Фурье в $L^2(R_+)$, имеем

$$\|\Gamma_- f\|^2_{L^2(R)}=2\|g\|^2_{L^2(R_+)}=\|f\|^2_H.$$

Аналогичным образом, взяв элемент $f(x)=\begin{pmatrix}g(x)\\ -ig(x)\end{pmatrix}$ из пересечения D_+ с H_0, получим

$$\Gamma_- f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_b^\infty \varphi_-^*(x, \lambda)f(x)\,dx=\frac{-i}{\sqrt{\pi}}S_b(\lambda)\int_b^\infty g(x)\,e^{i\lambda(x-b)}\,dx,$$

где

$$S_b(\lambda)=e^{2i\lambda b}\frac{\overline{F_1(\lambda)}}{F_1(\lambda)}. \tag{2.11}$$

Заметим, что множество H_0 плотно в H, и изометрическое отображение Γ_- можно продолжать до унитарного оператора на все пространство H, тогда с помощью теоремы Винера—Пели (см. [11]) из формул (2.10) и (2.11) немедленно следует

$$\Gamma_- D_- = H^2_-, \quad \Gamma_- D_+ = S_b(\lambda) H^2_+;$$

и, следовательно

$$\Gamma_- \mathbf{K} = \Gamma_- [H \ominus (D_+ \oplus D_-)] = H^2_- \ominus S_b(\lambda) H^2_+.$$

Вспоминая, что функции $\varphi_-(x, \lambda)$, $Im\lambda = 0$ являются собственными функциями непрерывного спектра оператора L, для любого элемента $f(x)$ из H_0 имеем

$$(Lf, \varphi_-)_H = \lambda (f, \varphi_-)_H,$$

следовательно, в силу (2.4) имеем

$$\frac{d}{dt}(U_t f, \varphi_-)_H = i\lambda (f, \varphi_-)_H$$

или, учитывая, что $U_0 = I$, имеем

$$(U_t f, \varphi_-)_H = e^{i\lambda t} (f, \varphi_-)_H.$$

Отсюда и из условия $\overline{\mathrm{H}}_0 = \mathrm{H}$ следует $\Gamma_- U_t = e^{i\lambda t}\Gamma_-$. Докажем внутренность функции $S_b(\lambda)$ в C_+. Согласно (2.11) для нее имеем следующее выражение через решение Йоста:

$$S_b(\lambda) = e^{2i\lambda b}\cdot\frac{\overline{F_1(\lambda)}}{F_1(\lambda)} = e^{2i\lambda(b-a)}\cdot\frac{\overline{F_{a1}(\lambda)}}{F_{a1}(\lambda)}, \tag{2.12}$$

где $F_{a1}(\lambda) = e^{-i\lambda a} F_1(\lambda)$. Как видно из формулы (2.12), нам достаточно доказать, что отношение $S_a(\lambda) = \dfrac{\overline{F_{a1}(\lambda)}}{F_{a1}(\lambda)}$ является произведением Бляшке (сомножитель $e^{2i\lambda(b-a)}$ в C_+ является сингулярной внутренней функцией). Имеем

$$S_a(\lambda) = \frac{e^{2i\lambda a}\left[1 + \int\limits_0^{2a} g(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt\right]}{1 + \int\limits_0^{2a} g(t)\, e^{i\lambda t}\, dt}, \tag{2.13}$$

где $g(t) = A_{11}(0, t) + iA_{12}(0, t)$. Функция $\Phi(\lambda) = \int\limits_0^{2a} \overline{g(t)}\, e^{-i\lambda t}\, dt$ является целой и имеет экспоненциальный тип $2a$, поэтому в силу условия (1.2), из которого следует, что $g(2a) \neq 0$, имеем

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}} \frac{\ln|\Phi(iy)|}{y} = 2a$$

и, следовательно

$$\lim_{y\to+\infty} e^{-2iy}\int_0^{2a}\overline{g(t)}\,e^{yt}\,dt = 1. \tag{2.14}$$

Теперь комбинируя формулы (2.13) и (2.14), получим

$$S_t(iy)\xrightarrow[y\to+\infty]{} 1. \tag{2.15}$$

Формула (2.15) в комбинации с леммой 2 работы [2] доказывает, что функция $S_t(\lambda)$ является произведением Бляшке (см. [7])

$$S_a(\lambda) = \Pi(\lambda). \tag{2.16}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Как известно (см. [1]) выполнение соотношения 3) из формулы (2.7) эквивалентно внутренности функции $S_b(\lambda)$. Таким образом, по ходу доказательства теоремы, мы доказали выполнение этого условия для наших подпространств $\mathbf{D}_{\pm}$.

Теорема 3. *На том же множестве* $\mathbf{H}_0$ *имеет место формула обращения*

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_-} \varphi_-(f, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varphi_-^*(t, \lambda)\, f(t)\, dt,$$

$$\varphi(\lambda) \xrightarrow{\Gamma_-^{-1}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varphi_-(x, \lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda.$$

Эта теорема является очевидным следствием теоремы разложения и равенства Парсеваля (см. формулы (1.11), (1.12)).

§ 3. Спектральный анализ полугруппы Z_t

Пусть P_K — ортопроектор в $\mathbf{H}$ на ортогональное дополнение к подпространству $D_+ \oplus D_-$. Обозначим

$$Z_t = P_K\, U_t|\mathbf{K},\quad t > 0. \tag{3.1}$$

Имеет место следующая теорема (см. [1], с. 67).

Теорема. *Операторы* Z_t, $t \geqslant 0$ *образуют на подпространстве* $\mathbf{K}$ *сильно непрерывную полугруппу сжатий. Кроме того,* Z_t *сильно стремится к нулю при* $t \to +\infty$: *для любого* u *из* $\mathbf{K}$ $\lim\limits_{t\to+\infty} Z_t u = 0$.

Как следует из теоремы 2, для элементов u из $\mathbf{K}$ справедлива формула

$$\Gamma_-\, Z_t u = P_{K_s}\, e^{i\lambda t}\, \Gamma_-\, u,$$

из которой следует, что полугруппа Z_t, $t > 0$ унитарно эквивалентна полугруппе

$$P_{K_s}\, e^{i\lambda t}|K_s,\quad t \geqslant 0,$$

где K_s означает подпространство в $H^2_+ : K_s = H^2_+ \ominus S_b(\lambda)\, H^2_+$, а $S_b(\lambda)$ является внутренней функцией в $\mathbf{C}_+$. Функция $S_b(\lambda)$ называется характеристической функцией полугруппы Z_t, $t \geqslant 0$ и содержит в себе всю спектральную информацию об этой полугруппе.

Обозначим через B инфинитезимальный оператор (генератор) полугруппы Z_t, $t \geqslant 0$, тогда имеем

$$Z_t = e^{itB}, \quad t \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Так как оператор B порождает сильно непрерывную полугруппу сжатий, то он является максимальным диссипативным оператором (см. теорему X. 48 [12], с. 267).

Теорема 4. *Оператор* B *прост, его областью определения является следующее множество:*

$$\mathrm{D}(\mathrm{B}) = \{f \in K : f' \in L^2(0,\ b;\ \mathbf{C}^2);\ f_1(0) = 0,\ f_2(b) = if_1(b)\}, \tag{3.3}$$

кроме того для f *из* D(B) *имеем* $\mathrm{B}f = Lf$.

Доказательство. Сначала докажем, что оператор B прост. Если бы это было не так, т. е. если бы у оператора B существовала нетривиальная самосопряженная часть, то тогда существовал бы ненулевой элемент f из K такой, что $Z_t f = U_t f$ для $t \geqslant 0$. Но тогда должно выполняться $U_t f \perp D_+$, $t > 0$ и, следовательно, $f \perp U_{-t} D_+$, $t > 0$. Но в силу соотношений (2.7) имеем $\mathrm{H} = \bigvee (U_{-t} D_+ : t > 0)$, следовательно, $f = 0$.

Так как оператор B является максимально диссипативным, то все точки λ нижней полуплоскости входят в его резольвентное множество, следовательно

$$D(\mathrm{B}) = R(\lambda,\ \mathrm{B})\, \mathrm{K},\ \operatorname{Im}\lambda < 0. \tag{3.4}$$

Для таких же точек λ имеется представление (см., например, [1], с. 242)

$$R(\lambda,\ \mathrm{B}) = \frac{1}{i} \int_0^\infty e^{i(\mathrm{B}-\lambda)t}\, dt. \tag{3.5}$$

Сопоставляя формулы (3.1), (3.2), (3.5), получим следующее соотношение между резольвентами операторов B и L:

$$P_K \mathrm{R}(\lambda,\ \mathrm{L})\, P_K = R(\lambda,\ \mathrm{B}). \tag{3.6}$$

Теперь, используя явный вид резольвенты оператора L (см. формулу (1.9)) и то обстоятельство, что в x-представлении оператором ортогонального проектирования на трансляционно-инвариантное подпространство K является оператор умножения на индикатор интервала $]0,\ b)$, легко установить явный вид резольвенты оператора B. Действительно, возьмем элемент $f(x)$ из K и обозначим $g(x) = R(\lambda,\ \mathrm{B})\, f(x)$, тогда в силу (3.6) имеем

$$g(x) = P_K\, R(\lambda,\ \mathrm{L})\, f(x) = \overline{F(x, \bar\lambda)}\; \overline{F_1(\bar\lambda)}^{-1} \int_0^x \widetilde{\varphi}(t, \bar\lambda)\, f(t)\, dt \ +$$

$$+\varphi(x,\bar{\lambda})\,\overline{F_1(\bar{\lambda})}^{-1}\int_x^b \overline{F(t,\bar{\lambda})}\,f(t)\,dt. \tag{3.7}$$

Из формулы (3.7) следует, что операторы **B** и **L** порождаются одним и тем же дифференциальным выражением, кроме того, из определения решения Йоста $F(x,\lambda)$ немедленно вытекает

$$g_1(0)=0, \text{ т. к. } \varphi_1(0,\lambda)=0;$$

$$g_2(b)=-ig_1(b), \text{ т. к. } \overline{F_1(b,\bar{\lambda})}=i\overline{F_2(b,\bar{\lambda})}.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. *Аналогичным образом можно доказать, что генератор сопряженной полугруппы* $-\mathbf{B}^*$ *имеет своей областью определения следующее множество*:

$$\{f\in K: f'\in L^2(0,b;\ \mathbf{C}^2),\ f_1(0)=0,\ f_2(b)=if_1(b)\}.$$

Как видно из формулы (3.7) ядро резольвенты оператора **B**

$$R(x,t;\lambda)=\begin{cases}\overline{F_1(\bar{\lambda})}^{-1}\,\overline{F(x,\bar{\lambda})}\,\varphi(t,\bar{\lambda}), & t<x,\\ \overline{F_1(\bar{\lambda})}^{-1}\,\varphi(x,\bar{\lambda})\,\overline{F(t,\bar{\lambda})}^{-1}, & x<t\leqslant b\end{cases}\qquad \operatorname{Im}\lambda<0$$

аналитически продолжается на всю комплексную плоскость λ как мероморфная функция. Её особенности в верхней полуплоскости совпадают с нулями функции $\overline{F_1(\bar{\lambda})}$. Кроме того, резольвента $(\mathbf{B}-\lambda I)^{-1}$ является компактным оператором. Это также следует из явного вида резольвенты.

Теорема 5. *Спектр диссипативного оператора* **B** *состоит из объединения точки* ∞ *с множеством* $\sigma_d(\mathbf{B})=\{\lambda\in\mathbf{C}_+: S_b(\lambda)=0\}$, *которое составляет дискретный спектр оператора* **B**. *Собственные функции* $u_n(x)$, *отвечающие собственным числам* $\lambda_n\in\sigma_d(\mathbf{B})$, *являются проекциями йостовских решений на подпространство* **K**

$$u_n(x)=\overline{F_b(x,\lambda_n)},\ \operatorname{Im}\lambda_n>0.$$

Доказательство. Дискретность спектра оператора **B** является следствием компактности резольвенты $(\mathbf{B}-\lambda I)^{-1}$ и общих теорем о полугруппах полуунитарных операторов (см. [1], с. 87). Принадлежность функций $u_n(x)$ к области определения оператора **B**, а также выполнение равенства $\mathbf{B}u_n(x)=\lambda_n u_n(x)$, следуют из определения (1.5) решения Йоста. Теорема доказана.

Аналогичное утверждение можно доказать для сопряженного оператора $\mathbf{B}^*$. Для его множества дискретного спектра имеем $\sigma_d(\mathbf{B}^*)=\overline{\sigma_d(\mathbf{B})}$, а собственные функции, соответсвующие собственным числам λ_n, имеют вид $\overline{u_n(x)}=F_b(x,\bar{\lambda}_n)$.

§ 4. Полнота системы собственных функций

Как доказали в предыдущем параграфе для характеристической функции оператора **B** имеем выражение (см. формулы (2.12), (2.16))

$$S_b(\lambda) = e^{2i\lambda(b-a)} \cdot \Pi(\lambda) = \theta(\lambda) \cdot \Pi(\lambda). \tag{4.1}$$

Теорема 6. *Система резонансных состояний задачи Редже будет полной в пространстве* $L^2(0, b; \mathbf{C}^2)$ *тогда и только тогда, когда* $b = a$.

Доказательство. В формуле (4.1) приведена факторизация (см. [7]) внутренней в $\mathbf{C}_+$ функции $S_b(\lambda)$ на произведение сингулярной внутренней функции $\theta(\lambda)$ и произведения Бляшке $\Pi(\lambda)$. Согласно теореме Секефальви Надя—Фойаша (см. [6]), полнота системы собственных функций оператора **B** в трансляционно-инвариантном подпространстве $\mathbf{K} = L^2(0, b; \mathbf{C}^2)$ эквивалентна тому, что в факторизации (4.1) сингулярный сомножитель $\theta(\lambda)$ является тривиальным. Но, как видно из формулы (4.1), последнее утверждение имеет место тогда и только тогда, когда $b = a$. Теорема доказана.

Для приложений важное значение имеет исследование совместной полноты систем собственных функций полугрупп Z_t и Z_t^*. Говорят, что система собственных функций полугрупп Z_t и Z_t^* совместно полна в K, если из ортогональности элемента f из K всем собственным функциям Z_t и Z_t^* следует, что $f = 0$. Приступим к решению этой задачи.

Теорема 7. *Если* $a < b \leqslant 2a$, *то системы собственных функций оператора* **B** *и его сопряженного совместно полны в пространстве* $L^2(0, b; \mathbf{C}^2)$.

Доказательство. Ширина индикаторной диаграммы целой функций $\overline{F_{a1}(\bar\lambda)}$ равна $2a$, в верхней полуплоскости ее можно факторизовать в виде произведения

$$\overline{F_{a1}(\bar\lambda)} = e^{-ia\lambda} \cdot \Pi(\lambda)\, h(\lambda), \tag{4.2}$$

где $\Pi(\lambda)$ — произведение Бляшке, а $h(\lambda)$ — внешняя функция в C_+. Согласно формулам (2.12) и (2.16) имеем

$$\overline{F_{a1}(\bar\lambda)} = \Pi(\lambda) \cdot F_{a1}(\lambda).$$

Теперь, сопоставляя последнюю формулу с формулой (4.2), получим $h(\lambda) = e^{ia\lambda} \cdot F_{a1}(\lambda)$. Следовательно, имеем

$$\frac{\overline{h(\bar\lambda)}}{h(\lambda)} = \frac{\overline{F_{a1}(\bar\lambda)}}{F_{a1}(\lambda)} \cdot e^{-2ia\lambda} = \Pi(\lambda) \cdot e^{-2ia\lambda}. \tag{4.3}$$

Докажем, что функция $|h^2|\,\mathbf{R}$ удовлетворяет следующему условию Макенхоупта

$$\sup_{I \in J} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |h|^2\, dx \right) \cdot \left(\frac{1}{I} \int_I |h|^{-2}\, dx \right) < +\infty, \tag{4.4}$$

где J — семейство всех интервалов на вещественной прямой. Действительно, функция Йоста $F_1(\lambda)$ самосопряженного оператора L на вещественной оси не обращается в нуль (в противном случае оператор L имел бы спектральные особенности, что исключено ввиду самосопряженности), с другой стороны из формулы $\overline{F_{n1}(\lambda)} = e^{i\lambda a} \overline{F_1(\lambda)}$ и представления Левина (1.6) имеем

$$|F_1(\lambda)| \leqslant 1 + \int\limits_0^{2a} |g(t)|\, dt, \ \mathrm{Im}\lambda = 0.$$

Таким образом, на вещественной прямой для функции $|h|^2$ выполняется условие $0 < \gamma < |h|^2 < \Gamma < \infty$, из которого немедленно следует (4.4). Как известно (см. [3]), выполнение (4.4) равносильно тому, что функция $|h|^2 R$ удовлетворяет условию Хельсона—Сеге ($|h|^2 \in (\mathrm{HS})$). Теперь согласно теоремам 3 и 5 работы [3] (см. часть I), в силу формул (4.3) и (4.1), имеем, что при выполнении условия $0 \leqslant 2(b-a) \leqslant 2a$, т. е. $a \leqslant b \leqslant 2a$, системы собственных функций оператора $\mathbf{B}$ и его сопряженного совместно полны в пространстве $L^2(0, b;\ \mathbf{C}^2)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Методы работы позволяют исследовать спектральные свойства операторов Дирака с общим диссипативным граничны условием на одном конце: $y_2(b) + hy_1(b) = 0$, $\mathrm{Im}\, h > 0$.

Отметим, что проблема Редже для «струны» (с соответствующей обратной задачей) решена в работе [4] (см. также [5] и для полярного оператора—в [3]. Решение обратной спектральной задачи для характеристической функции диссипативного оператора Шредингера приведено в работе [13], а для оператора Дирака—в [14].

В заключение автор приносит благодарность Б. С. Павлову за руководство работой.

Ереванский государственный
университет

Поступила 5. XII. 1986

Վ. Գ. ՍԱՂՈՅԱՆ Ռեջեի խնդրի սեփական ֆունկցիաների լրիվության մասին Դիրակի օպերատորի համար (*ամփոփում*)։

Աշխատանքում ուսումնասիրված են իրական ֆինիտ պոտենցիալով և կոմպլեքս եզրային պայմանով Դիրակի ոչ ինքնահամալուծ օպերատորի սեփական ֆունկցիաների լրիվության, ինչպես նաև այդ օպերատորի և նրա համալուծի սեփական ֆունկցիաների համատեղ լրիվության հարցերը։

V. G. SAGHOIAN. *On the completenes of the eigenfunctions of the Regge problem for the Dirac operator* (summary).

In the paper the completeness of the eigenfunctions of Regge problem for the Dirac operator with real finite potential and complex boundary condition is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *П. Лакс, Р. Филлипс*. Теория рассеяния, М., «Мир», 1971.
2. *Б. С. Павлов*. О совместной полноте системы собственных функций сжатия и его сопряженного, Пробл. матем. физики, 5, 1971, 101—112.
3. *S. V. Hruščev, N. K. Nikolskii, B. S. Pavlov*. Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels, Lecture Notes in Math., Springer—Verlag 864, 1981, 214-335.
4. *S. V. Hruščev*. The Regge problem for strings, unconditionally convergent eigenfunction expansions, and unconditional bases of exponentials in $L^2(-T, T)$, J. Operator Theory, Bucharest, 14, 1985, 67—85.
5. *М. Г. Крейн, А. А. Нудельман*. О прямых и обратных задачах для частот граничной диссипации неоднородной струны, ДАН СССР, 247, № 5, 1979, 1046—1049.
6. *Б. С.-Надь, Ч. Фойаш*. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, М., «Мир», 1970.
7. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, М., «Мир», 1963.
8. *М. Г. Гасымов*. Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$, Тр. Моск. матем. о-ва, 19, 1968, 41—112.
9. *T. Regge*. Construction of potentials from resonance parameters, Nuovo Cimento, 9, 1958, 491—503.
10. *М. Рид, Б. Саймон*. Методы современной математической физики, т. 1, М., «Мир», 1977.
11. *Н. Винер, Р. Пэли*. Преобразование Фурье в комплексной области, М., «Мир», 1964.
12. *М. Рид, Б. Саймон*. Методы современной математической физики, т. 2, М., «Мир», 1978.
13. *S. V. Hruščev*. Spectral Singularities of Dissipative Schrodinger Operators with Rapidly Decreasing Potential, Indiana University Mathematics Journal, 33, № 4, 1984, 613—636.
14. *В. Г. Сагоян*. Описание множества нулей хатактеристической функции диссипативного оператора Дирака, Вестник ЛГУ, 19, 1983, 108—111.