ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 5, 1989 Математика

УДК 517.95

К. А. ЯГДЖЯН

# ПАРАМЕТРИКС ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

## Введение

Целью настоящей работы является построение параметрикса задачи Коши для определенного класса дифференциальных операторов, описание которого осуществляется с помощью некоторой функции $\lambda \in C^\infty(R^1)$ такой, что

$$\lambda(0) = 0, \ \lambda(z) > 0, \ \lambda'(z) \geqslant 0 \text{ при } z > 0 \ (\lambda'(z) \equiv \partial_z \lambda(z)), \tag{0.1}$$

$$|\partial_z^k \lambda(z)| \leqslant c_k (\lambda'(z)/\lambda(z))^{k-1} \lambda'(z) \text{ при } 0 < z \leqslant 1, \ k = 2, 3, \cdots, \tag{0.2}$$

с некоторым $\delta_0$, $0 < \delta_0 < 1/2$, $0 < \lambda'(z) \leqslant c\lambda^{1-\delta_0}(z)$ при $0 < z \leqslant 1$. (0.3)

Рассмотрим оператор $L$ вида

$$L = D_t^m + \sum_{j+|\alpha| \leqslant m,\ j<m} a_{j,\alpha}(t, x)\, D_t^j D_x^\alpha, \tag{0.4}$$

где $t \in J = [0, T]$, $T > 0$, $x \in R^n$, $D_j = -i\partial_j = -i\partial/\partial x_j$, $D_t = -i\partial_t = -i\partial/\partial t$, $a_{j,\alpha} \in C^\infty(J \times R^n)$ и задачу Коши:

$$Lu = f, \tag{0.5}$$

$$D_t^i u|_{t=s} = \psi_i(x), \ i = 0, \cdots, m-1, \ s \in J. \tag{0.6}$$

Пусть $M$, $N$ — положительные постоянные. Определим зону гиперболичности $Z_1(N) = \{(x, \xi) \in R^{2n},\ \lambda(|x|) < \xi > \geqslant N \ln < \xi >, < \xi > \geqslant M\}$ где $< \xi >^2 = e + |\xi|^2$. Рассмотрим $\{\tau_l(t, x, \xi)\}_1^m$ — нули полного символа оператора $L$, т. е. корни уравнения

$$\tau^m + \sum_{j+|\alpha| \leqslant m,\ j<m} a_{j,\alpha}(t, x)\, \tau^j \xi^\alpha = 0. \tag{0.7}$$

Предполагается выполненным следующее основное условие:

(А) *существуют положительные постоянные $M$, $N$ такие, что для любых $\alpha$, $\beta$, $k$ с некоторыми постоянными $\delta_1 > 0$, $C_{k,\alpha,\beta}$ для всех $l, j, = 1, \cdots, m$, при $(x, \xi) \in Z_h(N)$, $t \in J$ выполнены неравенства*

$$|\tau_j(t, x, \xi) - \tau_l(t, x, \xi)| \geqslant \delta_1 \lambda(|x|) < \xi >, \ j \neq l, \tag{0.8}$$

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta \tau_l(t, x, \xi)| \leqslant C_{k,\alpha,\beta} < \xi >^{1-|\alpha|} \lambda(|x|) \left(\frac{\lambda'(|x|)}{\lambda(|x|)}\right)^{|\beta|}, \ |x| \leqslant 1, \tag{0.9}$$

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta \operatorname{Im} \tau_l(t, x, \xi)| \leqslant C_{k,\alpha,\beta} < \xi >^{-|\alpha|} \left(\frac{\lambda'(|x|)}{\lambda(|x|)}\right)^{|\beta|} \ln < \xi >, \ |x| \leqslant 1. \tag{0.10}$$

Неравенство (0.10) естественно назвать (при $k=|\alpha|=|\beta|=0$) условием гиперболичности. В § 1 будет показано, что из (A) следует, что нули $\{\lambda_l(t, x, \xi)\}_1^m$ главного символа оператора, т. е. корни уравнения

$$\lambda^m + \sum_{j+|\alpha|=m,\ j<m} a_{j,\alpha}(t, x)\lambda^j \xi^\alpha = 0 \qquad (0.11)$$

вещественны при всех $(t, x, \xi) \in J \times R^{2n}$ и что при этих же $t, x, \xi$

$$|\lambda_l(t, x, \xi)| \leqslant c\lambda(|x|)|\xi|, \quad l = 1, \cdots, m, \qquad (0.12)$$

$$|\lambda_l(t, x, \xi) - \lambda_k(t, x, \xi)| \geqslant \delta\lambda(|x|)|\xi|, \quad \delta = \text{const} > 0, \ l \neq k. \qquad (0.13)$$

Таким образом, при $x = 0$, и только там, имеет место нарушение условия строгой гиперболичности оператора $L$, в связи с чем возникает вопрос об условиях на младшие члены оператора, достаточных или необходимых для $C^\infty$-корректности задачи Коши. Нахождение таких условий, т. е. решению так называемой проблемы Е. Е. Леви [1], посвящено большое число работ. Сравнительно полная библиография есть в [2—16].

Далее будет показано, что (0.8)—(0.10) приводит к выполнению при всех $t \in J$, $(x, \xi) \in R^{2n}$, $|x| \leqslant 1$, и всех $j, \alpha$, $|\gamma| \neq 0$, неравенств

$$|D_t^k D_x^\beta a_{j,\alpha}(t, x)| < C_{k,\beta}\lambda^{|\alpha|}(|x|)\,|\ln\lambda(|x|)|^{m-j-|\alpha|}\left(\frac{\lambda'(|x|)}{\lambda(|x|)}\right)^{|\beta|}. \qquad (0.14)$$

Верно также и обратное, т. е. из (0.12)—(0.14), в совокупности с вещественностью $\{\lambda_l\}_1^m$, следует (A) (см. лемму 1).

Отметим здесь, что если (0.3) выполняются с любым $\delta_0 > 0$, то, как следует из результатов работы [7], условия (0.12)—(0.14) являются достаточными для $C^\infty$-корректности задачи Коши. В случае $\lambda(z) = z^k$, $k$ — целое, условие (0.12)—(0.14), как следует из работы [2], являются также и необходимыми для корректности. По очевидной причине мы будем интересоваться только окрестностью прямой $x = 0$. В качестве функции $\lambda(z)$ можно взять, например, $z^k$, $\exp(-|x|^{-k})$, $\exp(-\exp|x|)^{-k})$ $(k > 0)$ и т. д.

Оценка (0.9) лежит в основе предлагаемого ниже класса псевдодифференциальных операторов (ПДО) и интегральных операторов Фурье (ИОФ), посредством которых и выражается параметрикс задачи Коши.

## § 1. Гиперболичность. Классы символов и исчисление ПДО

Лемма 1. *Условие* (A) *эквивалентно следующему условию:*

(T) *нули* $|\lambda_l(t, x, \xi)|_1^m$ *главного символа оператора вещественны и выполнены условия* (0.12), (0.13), (0.14).

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 [11].

Пусть $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ — обычные классы символов $(0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1)$, обозначим через $C_t^\infty(J; S^m_{\rho,\delta}(\Omega))$ пространство всех гладких отображений $J$ в $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$.

Определение 1. Пусть $m_1$, $m_2$, $m_3$ — действительные числа. Через $S_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}_\varepsilon$ обозначим множество всех функций $a(t, x, \xi) \in C^\infty(J \times R^{2n})$ таких, что с некоторыми $m$, $\rho_1$, $\delta_1$ справедливо включение $a \in C_t^\infty(J; S^m_{\rho_1, \delta_1})$ и для любых $k$, $\alpha$, $\beta$ с некоторыми постоянными $C_{k,\alpha,\beta}$ при всех $t \in J$, $(x, \xi) \in Z_h(N)$, $|x| \leqslant \varepsilon$, справедливы неравенства

$$|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta a(t, x, \xi)| \leqslant C_{k,\alpha,\beta} < \xi >^{m_1 - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} \lambda^{m_2}(|x|) \left(\frac{\lambda'(|x|)}{\lambda(|x|)}\right)^{m_3 + |\beta|}. \tag{1.1}$$

Введем также обозначения $S_\varepsilon\{m_1, m_2, m_3\} = S_{1,0}\{m_1, m_2, m_3\}_\varepsilon$,

$$H_\varepsilon\{m_1, m_2, m_3\} = \bigcap_{\nu=0}^{\infty} S_{\rho,\delta}\{m_1 - \nu, m_2 - \nu, m_3\}_\varepsilon.$$

Предложение 1. (i). *Пусть* $a_k(t, x, \xi) \in S_{\rho,\delta}\{m_{1(k)}, m_2, m_3\}_\varepsilon$ $(k=0, 1, \cdots)$ *и начиная с некоторого* $n$ $a_k(t, x, \xi) = 0$ *при* $(x, \xi) \in Z_h(N) \cap \{x | |x| < \varepsilon\}$, $k \geqslant n$. *Тогда, если* $m_{1(k)} \to -\infty$ *при* $k \to \infty$, *то существует символ* $a(t, x, \xi) \in S_{\rho,\delta}\{\overline{m}_{1(0)}, m_2, m_3\}_\varepsilon$ *такой, что*

$$a \sim a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \mod C_t^\infty(J; S^{-\infty}), \tag{1.2}$$

*в том смысле, что для любого* $k$

$$(a - a_0 - a_1 - \cdots - a_{k-1}) \in S_{\rho,\delta}\{\overline{m}_{1(k)}, m_2, m_3\}_\varepsilon, \tag{1.3}$$

$$\overline{m}_{1(k)} = \max_{j \geqslant k} m_{1(j)},$$

*и два таких символа отличаются на элемент класса* $C_t^\infty(J; S^{-\infty})$;

(ii) *Пусть* $b_k(t, x, \xi) \in S_{\rho,\delta}\{m_1 - k, m_2 - k_3, m_3\}_\varepsilon$ $(k=0, 1, \cdots)$ *и начиная с некоторого* $n$ $b_k(t, x, \xi) = 0$ *при* $(x, \xi) \in Z_h(N) \cap \{x | |x| < \varepsilon\}$, $k \geqslant n$. *Тогда существует символ* $b(t, x, \xi) \in S_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}$ *такой, что*

$$b \sim b_0 + b_1 + b_2 + \cdots \mod H_\varepsilon\{m_1, m_2, m_3\}, \tag{1.4}$$

*в том смысле, что для любого* $k$

$$(b - b_0 - b_1 - \cdots - b_{k-1}) \in S_{\rho,\delta}\{m_1 - k, m_2 - k, m_3\}_\varepsilon, \tag{1.5}$$

*и два таких символа отличаются на элемент класса* $H_\varepsilon\{m_1, m_2, m_3\}$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 1 [8].

Определенные выше классы символов являются, в частности, и обычными классами символов, что дает нам право пользоваться обычными формулами теории ПДО, а с другой стороны, возможность, используя предложение 1, проследить за свойствами полученных с помощью упомянутых формул символов. Всюду далее в $S_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}_\varepsilon$ мы предполагаем, что $0 \leqslant \delta_0 + \delta < 1/2 < \rho \leqslant 1$.

Лемма 2. *Пусть задана последовательность* $m \times m$ *матричных символов* $N^{(\nu)}(t, x, \xi) \in S_{\rho,\delta}\{-\nu, -\nu, 0\}_\varepsilon$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ *таких, что* $N^{(\nu)}(t, x, \xi) = 0$ *при* $(x, \xi) \in Z_h(N) \cap \{|x| < \varepsilon\}$. *Тогда существует оператор* $N(t)$ *такой, что* $N(t, x, \xi) \in S_{\rho,\delta}\{0, 0, 0\}_\varepsilon$, *и*

$$N(t, x, \xi) \sim I + N^{(1)}(t, x, \xi) + N^{(2)}(t, x, \xi) + \cdots \bmod H_\varepsilon^0 = H_\varepsilon\{0, 0, 0\}. \tag{1.6}$$

*Более того $N(t)$ имеет параметрикс $N^{\#}(t)$ (такой, что $N^{\#}(t, x, \xi) \in S_{\rho,\delta}\{0, 0, 0\}_\varepsilon$ и символы операторов $N(t)N^{\#}(t) - I$, $N^{\#}(t)N(t) - I$ принадлежат $C_I^{\infty}(J, S^{-\infty})$.*

Доказательство ничем не отличается от принятого в теории ПДО.

## § 2. Приведение к задаче Коши для системы первого порядка

Пусть $\chi \in C^\infty(R^1)$, $0 \leqslant \chi(t) \leqslant 1$, $\chi(t) = 0$ при $|t| \geqslant 2$, $\chi(t) = 1$ при $|t| \leqslant 1$. Рассмотрим гипоэллиптический оператор $h(x, D_x)$ с символом $h(x, \xi) = \chi(\lambda(|x|)\langle\xi\rangle/(N\ln\langle\xi\rangle))\ln\langle\xi\rangle + \lambda(|x|)\langle\xi\rangle(1 - \chi(\lambda(|x|)\langle\xi\rangle/(N\ln\langle\xi\rangle)))$. Очевидно, что $h(x, \xi) \in S_\varepsilon\{1, 1, 0\}$. Если $H(x, D_x)$ — диагональный матричный ПДО с элементами $H_{ij}(x, D_x) = \delta_{ij}h^{m-i}(x, D_x)$ $(i, j = 1, \cdots, m)$, то через $H^{\#}(x, D_x)$ обозначим параметрикс оператора $H(x, D_x)$.

Для $U = {}^t(u, D_t u, \cdots, D_t^{m-1}u)$ и $\mathrm{U} = H(x, D_x)U$ уравнение (0.5) можно переписать в виде системы

$$L_0\mathrm{U} + R_3 U = \Phi \tag{2.1}$$

с $R_3(t, x, \xi) \in C_I^\infty(J; S^{-\infty})$, $\Phi = {}^t(0, \cdots, 0, f)$, $L_0 = D_t + A(t, x, D_x)$, где $A(t, x, \xi) \in C_I^\infty(J; S_{\rho,\delta}^m)$, $A(t, x, \xi) \in S_\varepsilon\{1, 1, 0\}$, а при $(x, \xi) \in Z_1(2N) = \{(x, \xi) \in R^{2n} | \lambda(|x|)\langle\xi\rangle \leqslant 2N\ln\langle\xi\rangle, \langle\xi\rangle \geqslant M\}$, $t \in J$

$$\|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta A(t, x, \xi)\| \leqslant C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|+\delta|\beta|}\ln\langle\xi\rangle. \tag{2.2}$$

Упорядочим в $Z_h(N)$ корни уравнения (0.7): $\mathrm{Re}\,\tau_1 < \mathrm{Re}\,\tau_2 < \cdots < \mathrm{Re}\,\tau_m$. Выберем постоянные $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$ и рассмотрим функции $\varphi_k(t, x, \xi) = d_k\chi(\lambda(|x|)\langle\xi\rangle/N\ln\langle\xi\rangle)\ln\langle\xi\rangle + \tau_k(t, x, \xi)(1 - \chi(\lambda(|x|)\langle\xi\rangle/(N\ln\langle\xi\rangle)))$. По системе $\{\varphi_k/h\}_1^m$ составим матрицу Вандермонда $M^{\#}(t, x, \xi) = V(\varphi_1/h, \cdots, \varphi_m/h)$, и пусть $M(t, x, D_x)$ — параметрикс для $M^{\#}(t, x, D_x)$. Тогда вектор $U = M(t)U$ будет решением системы

$$D_t V + M(t)A(t)M^{\#}(t)V - iM_t(t)M^{\#}(t)V + R_1(t)U = \Phi_1, \tag{2.3}$$

где $R_1(t, x, \xi) \in C_I^\infty(J; S^{-\infty})$, $\Phi_1 = M(t)\Phi$. Легко убедиться в том, что (2.3) можно записать в следующем виде:

$$D_t V - D(t)V + B(t)V + R_2(t)U = \Phi_1, \tag{2.4}$$

где $D(t)$ — оператор с диагональным символам, элементы которого $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$, $R_2(t, x, \xi) \in C_I^\infty(J; S^{-\infty})$, $B(t, x, \xi) \in S_\varepsilon\{0, 0, 0\}$, и при $t \in J$, $(x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(2N) = Z_1(2N) \cap \{x | |x| < \varepsilon\}$ справедливы оценки

$$\|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta B(t, x, \xi)\| \leqslant C_{k,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|+\delta|\beta|}\ln\langle\xi\rangle. \tag{2.5}$$

Осуществим в зоне $Z_{h,\varepsilon}(N) = Z_h(N) \cap \{x \in R^n | |x| < \varepsilon\}$ „полную“ диагонализацию системы.

Теорема 1. *Существует оператор* $N(t)$ *такой, что* $N(t, x, \xi)=1$ *при* $(x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(N)$, $N(t, x, \xi) \in S_\varepsilon\{0, 0, 0\}$, $|\det N(t, x, \xi)| > \mathrm{const} > 0$ *на* $J \times R^{2n}$

$$(D_t - D(t) + B(t))\, N(t) = N(t)\, L_1, \ \mathrm{mod}\ C_t^\infty(J; \Psi^{-\infty}), \tag{2.6}$$

*с некоторым оператором* $L_1$ *вида*

$$L_1 = D_t - D(t) + F(t) + R(t), \tag{2.7}$$

*где при некотором* $\varepsilon > 0$:

(i) $F(t, x, \xi)$ — *диагональная матрица* $F(t, x, \xi) \in S_\varepsilon\{0, 0, 0\}$,

$$F(t, x, \xi) = 0 \ \text{при}\ (x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(N),\ t \in J,$$

(ii) $R(t, x, \xi) \in H_\varepsilon^0$, *и для любых* $k, \alpha, \beta$ *при* $(x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(2N)$, $t \in J$

$$\|D_t^k D_\xi^\alpha D_x^\beta R(t, x, \xi)\| \leqslant C_{k,\alpha,\beta} < \xi >^{-|\alpha| + \varepsilon_0 |\beta|} \ln < \xi >. \tag{2.8}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 [8].

## § 3. Построение фазовой функции

Обозначим через $\lambda(t, x, \xi)$ вещественную часть одной из функций $\varphi_i(t, x, \xi)$, $i = 1, 2, \cdots, m$. Рассмотрим для системы Гамильтона задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = -\nabla_\xi \lambda(t, q, p), & \dfrac{dp}{dt} = \nabla_x \lambda(t, q, p), \\ q|_{t=s} = y, & p|_{t=s} = \xi. \end{cases} \tag{3.1}$$

Решение задачи (3.1) существует при всех $s, t \in [0, T_0]$, $\xi \in R^n$, $y \in R^n$, $<\xi> \geqslant M$, если $T_0$ достаточно мало. Опишем поведение решения $(q(t, s, y, \xi), p(t, s, y, \xi))$. С этой целью определим классы $S'_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}_\varepsilon$, учитывающие также и зависимость от параметра $s$. Они получатся, если считать, что в определении 1 $J$—компакт в $R_d$, а $k$—мультииндекс$(x, \xi) \in Z_h(N/2)$. Соответственным образом определяются $S'_\varepsilon\{m_1, m_2, m_3\}$, $H'_\varepsilon\{m_1, m_2, m_3\}$. Отметим, что в классах $S'_{\rho,\delta}\{m_1, m_2, m_3\}_\varepsilon$ справедливы утверждения предложения 1 и леммы 2, очевидным образом видоизмененные.

Лемма 3. *Существуют положительные постоянные* $N, M, \varepsilon, T_0$ *такие, что для любого* $s \in [0, T_0]$ *и любых* $(y, \xi) \in R^{2n}$ *справедливы утверждения:*

(a) *из* $(y, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(N/2)$ *следует* $(q(t), p(t)) \in Z_{1,2\varepsilon}(N)$ *для* $\forall t \in [0, T_0]$;
*из* $(y, \xi) \in Z_{h,\varepsilon}(N/2)$ *следует* $(q, (t), p(t)) \in Z_{h,2\varepsilon}(N/4)$ *для* $\forall t \in [0, T_0]$ (т. е. „зоны не смешиваются“);

(b) *если* $(y, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(N/2)$, *то* $p(t, s, y, \xi) = \xi$, $q(t, s, y, \xi) = y - (t - s)\nabla_\xi \ln < \xi >$ *для всех* $t \in [0, T_0]$;

(c) *если* $(y, \xi) \in Z_{h,\varepsilon}(N/2)$, *то*

$$|q(t, s, y, \xi) - y| \leqslant c\lambda(|y|),\ \forall t \in [0, T_0],$$

$$|p(t, s, y, \xi) - \xi| \leqslant c\lambda'(|y|) < \xi >,\ \forall t \in [0, T_0];$$

(d) *существует постояные $c_1$, $c_2$ такие, что для всех $t \in [0, T_0]$, $(y, \xi) \in Z_{h,\varepsilon}(N/2)$ выполняются неравенства*

$$c_1^{-1} \lambda(|y|) \leqslant \lambda(|q(t)|) \leqslant c_1 \lambda(|y|),$$

$$c_1^{-1} \lambda'(|y|) \leqslant \lambda'(|q(t)|) \leqslant c_1 \lambda'(|y|),$$

$$c_2^{-1} \lambda'(|y|)/\lambda(|y|) < \lambda'(|q(t)|)/\lambda(|q(t)|) < c_2 \lambda'(|y|)/\lambda(|y|);$$

(e) $q(t, s, y, \xi) - y \in S'_\varepsilon\{0, 1, 0\}$, $p(t, s, y, \xi) - \xi \in S'_\varepsilon\{1, 1, 1\}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3 [8].

Лемма 4. *Пусть $T_1$ и $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ такие постоянные, что*

$$\|I - \partial q/\partial y\| \leqslant 1 - \varepsilon_1 \text{ при } s, t \in [0, T_1],\ y \in R^n,\ \xi \in R^n,\ <\xi> \geqslant M. \tag{3.3}$$

*Тогда для отображения $x = q(t, s, y, \xi): R^n_y \ni y \to R^n_x$ (окрестностей начал координат в $R^n_x$ и $R^n_y$) с параметрами $s, t, \xi$ существует обратное отображение $y = y(t, s, x, \xi)$, причем $y(t, s, x, \xi) - x \in S'_\varepsilon\{0, 1, 0\}$, $\|I - dy/dx\| \leqslant (1 - \varepsilon_1)/\varepsilon_1$ при $t, s \in [0, T_1]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $<\xi> \geqslant M$. Если $(x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(N/2)$, то $y = x + (t - s)\nabla_\xi \ln <\xi>$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 4 [8].

Построим, наконец, фазовую функцию $\Phi(t, s, y, \xi)$, для чего рассмотрим задачу Коши

$$iD_t\Phi - \lambda(t, x, \nabla_x\Phi) = 0,\ \Phi|_{t=s} = x \cdot \xi. \tag{3.4}$$

Лемма 5. *Пусть $T_1$ и $\varepsilon_1$ — постоянные из леммы 4. Тогда $\Phi(t, s, x, \xi) - x \cdot \xi \in S'_\varepsilon\{1, 1, 0\}$, а при $(x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(N/2)$ имеем $\Phi(t, s, x, \xi) = x \cdot \xi + (t - s) \ln <\xi>$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 5 [8].

## § 4. Параметрикс задачи Коши для элементарного оператора

Рассмотрим в $[0, T_1] \times U_\varepsilon$, где $U_\varepsilon = \{x \in R^n \mid |x| < \varepsilon\}$, элементарный гиперболический оператор первого порядка

$$L = D_t - \lambda(t, x, D_x) + f(t, x, D_x), \tag{4.1}$$

где $\lambda(t, x, \xi)$ — та же функция, что и в § 3. $f(t, x, \xi) \in S_\varepsilon\{0, 0, 0\}$, и $f(t, x, \xi) = 0$ при $(x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(N)$, $t \in [0, T_1]$. Продолжим его с $U_\varepsilon$ на все $R^n_x$ и построим параметрикс следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} Lu = 0,\ [0, T_1] \times R^n, \\ u|_{t=s} = \psi\ (0 \leqslant s \leqslant T), \end{cases} \tag{4.2}$$

т. е. оператор $E_\Phi(t, s)$ такой, что

$$\begin{cases} LE_\Phi(t, s) = 0 \mod C^\infty_{t,s}(\Psi^{-\infty})\ (= C^\infty_{t,s}([0, T_1]^2; \Psi^{-\infty}), \\ E_\Phi(s, s) = I \text{ (тождественный оператор)}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Будем искать $E_\Phi(t, s)$ в виде ИОФ:

$$E_\Phi(t, s)\psi(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(\Phi(t, s, x, \xi) - y\cdot\xi)} e(t, s, x, \xi)\psi(y)\,dyd\xi, \tag{4.4}$$

с символом $e(t, s, x, \xi)$, разлагающимся в асимптотический ряд

$$e(t, x, s, \xi) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu(t, s, x, \xi) \mod C^{\infty}_{t,s}(S^{-\infty}). \tag{4.5}$$

Определим как в [9]

$$g(t, s, x, \xi) = -\sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \lambda^{(\alpha)}(t, x, \nabla_x \Phi(t, s, x, \xi)) \cdot \partial_x^\alpha \Phi(t, s, x, \xi) + \\ + f(t, x, \nabla_x \Phi(t, s, x, \xi)), \tag{4.6}$$

$$Z = D_t - \sum_{|\alpha|=1} \lambda^{(\alpha)}(t, x, \nabla_x \Phi(t, s, x, \xi)) D_x^\alpha + g(t, s, x, \xi). \tag{4.7}$$

Если $e_{\nu, \Phi}(t, s)$ — ИОФ с символом $e_\nu(t, s, x, \xi)$, то

$$\sigma(Le_{\nu, \Phi}(t, s))(t, s, x, \xi) = Ze_\nu + r_\nu(t, s, x, \xi), \tag{4.8}$$

где

$$r_\nu(t, s, x, \xi) \sim -\sum_{|\alpha|\geq 2} \frac{1}{\alpha!} [D_y^\alpha(\lambda^{(\alpha)}(t, x, \tilde{\nabla}_x \Phi(t, s, x, y, \xi)) e_\nu(t, s, y, \xi)]|_{y=x}, \\ \mod C^{\infty}_{t,s}(S^{-\infty}), \ \nu = 0, 1, \cdots, \tag{4.9}$$

$$\tilde{\nabla}_x \Phi(t, s, x, y, \xi) = \int_0^1 \nabla_x \Phi(t, s, y, + \theta(x-y), \xi)\, d\theta. \tag{4.10}$$

Итак, пусть

$$\begin{cases} Ze_0 = 0, \qquad Ze_\nu + r_{\nu-1} = 0, \\ e_0(s, s) = 1, \ e_\nu(s, s) = 0, \ \nu = 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{4.11}$$

Лемма 6. *Если* $(x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(N/2)$, *то для всех* $t, s \in [0, T_1]$ $e_0(t, s, x, \xi) = 1$, $e_\nu(t, s, x, \xi) = 0$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$. *Если же* $(x, \xi) \in Z_{h,\varepsilon}(N/2)$, $s, t \in [0, T_1]$, *то для любых* $k, l, \alpha, \beta, \nu$ $(\nu = 0, 1, 2)$

$$|D_t^k D_s^l D_\xi^\alpha D_x^\beta e_\nu(t, s, x, \xi)| \leq C_{k,l,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-\nu-|\alpha|} \left(\frac{\lambda'(|x|)}{\lambda(|x|)}\right)^{k+l+|\alpha+\beta|+2\nu}. \tag{4.12}$$

Доказательство проводится по индукции с помощью (3.24), (3.25) [9].

Теорема 2. *Существует ИОФ* $E_\Phi(t, s) = e_\Phi(t, s, x, D_x)$ *с фазовой функцией из леммы* 5 *и амплитудной функцией* $e(t, s, x, \xi)$ *такой, что* $e(t, s, x, \xi) = 1$ *при* $(x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(N/2)$, $t, s \in [0, T_1]$, *а при* $t, s \in [0, T_1]$, $(x, \xi) \in Z_{h,\varepsilon}(N/2)$ *удовлетворяющей неравенствам* (4.12) *с* $\nu = 0$, *являющийся параметриксом задачи* (4.2). *В частности для любого* $k \geq 0$ $e(t, s, x, \xi) \in C^k_{t,s}(J^2; S^{kk_0}_{1-\delta_0, \delta_0})$. *Параметрикс единственнен по* mod $C^\infty_{t,s}(\Psi^{-\infty})$.

Доказательство. Существование указанной амплитудной функции устанавливается подобно тому, как было доказано предложение 1. Единственность доказывается рассмотрением сопряженной задачи для формально сопряженного оператора. Теорема доказана.

Нам понадобится следующий простой факт.

Предложение 2. *Пусть* $a(t, s, x, \xi) \in \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k_{t,s}(J^2; S^{k\delta_0}_{\rho,\delta})(0 \leqslant \delta < 1/2 < \rho \leqslant 1)$, *и для любых* $k, l, \alpha, \beta$ *при всех* $(x, \xi) \in Z_{h,\varepsilon}(N/2)$ $t, s \in [0, T_1]$

$$|D_t^k D_s^l D_\xi^\alpha D_x^\beta a(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{k,l,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m_1-|\alpha|} (\lambda(|x|) \langle \xi \rangle)^{k+l+|\alpha+\beta|} \times$$
$$\times \lambda^{m_2}(|x|) (\lambda'(|x|)/\lambda(|x|))^{m_3+l+|\alpha+\beta|}, \tag{4.13}$$

*а символ* $r(t, s, x, \xi)$ *таков, что* $r(t, s, x, \xi) = 0$ *при* $(x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(N/2))$ $t, s \in [0, T_1]$ *и для любых* $k, l, \alpha, \beta, \nu$ $(\nu \geqslant 0)$

$$|D_t^k D_s^l D_\xi^\alpha D_x^\beta r(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{k,\alpha,\beta,l,\nu} \langle \xi \rangle^{m_1'-|\alpha|-\nu} \lambda^{m_2'-\nu}(|x|) \times$$
$$\times (\lambda'(|x|)/\lambda(|x|))^{m_3'+k+l+|\alpha+\beta|} \quad \text{при } (x, \xi) \in Z_{h,\varepsilon}(N/2),\ t, s \in [0, T_1]. \tag{4.14}$$

*Тогда при достаточно малом* $T_1$ *как* $R_1 = A_\Phi(t, s) R(t, s)$ *так, и* $R_2 = R(t, s) A_\Phi(t, s)$ *являются ПДО-ми с символами* $r_j(t, s, x, \xi)$ $(j = 1, 2)$ *такими, что (по* $\operatorname{mod} C^\infty_{t,s}(S^{-\infty})$*)* $r_j(t, s, x, \xi) = 0$ *при* $t, s \in [0, T_1]$, $(x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(N/2)$, *и для любых* $k, l, \alpha, \beta, \nu$ $(\nu \geqslant 0)$

$$|D_t^k D_s^l D_\xi^\alpha D_x^\beta r_j(t, s, x, \xi)| \leqslant C_{k,l,\alpha,\beta,\nu} \langle \xi \rangle^{m_1+m_1'-|\alpha|-\nu} \lambda^{m_2+m_2'-\nu}(|x|) \times$$
$$\times (\lambda'(|x|)/\lambda(|x|))^{m_3+m_3'+k+l+|\alpha+\beta|} \quad \text{при } (x, \xi) \in Z_{h,\varepsilon}(N/2). \tag{4.15}$$

Доказательство проводится с помощью теоремы 2.3 [10] и лемм 3, 5.

Наконец, сформулируем в рассматриваемых нами классах операторов теорему Ю. В. Егорова.

Предложение 3. *Пусть* $E_\Phi(t, s)$ — *ИОФ, построенный в теореме 2, и пусть символ* $p(t, x, \xi)$ *оператора* $P(t, x, D_x)$ *таков, что* $p(t, x, \xi) = 0$ *при* $(x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(N)$, $t \in [0, T_1]$ *и* $(p(t, x, \xi) \ln \langle \xi \rangle) \in S_\varepsilon\{0, 0, 0\}$. *Тогда* $P_1(t, s, x, D_x) = E_\Phi(s, t) P(t, x, D_x) E_\Phi(t, s)$ *есть ПДО с символом* $p_1(t, s, x, \xi)$ *таким, что* $p_1(t, s, x, \xi) = 0$ *при* $(x, \xi) \in Z_{1,\varepsilon}(N)$, $t, s \in [0, T_1]$ *и* $(p_1(t, s, x, \xi)/\ln \langle \xi \rangle) \in S'_\varepsilon\{0, 0, 0\}$.

Доказательство проводится стандартными рассуждениями с использованием лемм 3, 5 и теорем работы [10].

## § 5. Окончание построения параметрикса

Рассмотрим предварительно задачу Коши

$$L_1 U = \Phi(t), \quad U|_{t=s} = \Psi \tag{5.1}$$

для матричного ПДО вида (2.7), описанного в теореме 1. Параметрикс задачи (5.1) будем искать в виде $E_1(t, s) = E_2(t, s)(I + Q(t, s))$, где $E_2(t, s)$ — матричный диагональный ИОФ с элементами $E_{\Phi_j}(t, s)$ $(j = 1, \cdots, m)$, являющимися параметриксами задачи Коши для операторов $D_t - \lambda_j(t, x, D_x) + f_j(t, x, D_x)$, описанными в теореме 2. Подставляя $E_1(t, s)$ в (5.1) и применяя предложение 3 приходим к задаче Коши для оператора $Q(t, s)$;

$$D_t Q(t, s) + R(t, s) Q(t, s) + R_0(t, s) \in C^\infty_{t,s}(\Psi^{-\infty}), \quad Q(s, s) = 0. \tag{5.2}$$

для которой справедливо следующее

Предложение 4. *Пусть $R(t, s)$, $R_0(t, s)$ — матричные ПДО с символами $r(t, s, x, \xi)$ и $r_0(t, s, x, \xi)$, соответственно. Предположим, что с некоторыми $p, K, m, \rho, \delta$ $(0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1)$ для любых $\alpha, \beta$ с некоторыми положительными постоянными $C_{\alpha,\beta}$, $C_0$ при всех $t, s \in [0, T_1]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $<\xi> \geqslant M$ выполнены неравенства*

$$\|D_\xi^\alpha D_x^\beta r(t, s, x, \xi)\| \leqslant C_{\alpha,\beta} <\xi>^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} g(t, \xi), \tag{5.3}$$

$$\|D_\xi^\alpha D_x^\beta r_0(t, s, x, \xi)\| \leqslant C_{\alpha,\beta} <\xi>^{p-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} g(t, \xi), \tag{5.3$_0$}$$

$$\int_0^{T_1} g(\tau, \xi)\, d\tau \leqslant K \ln <\xi>, \quad g(t, \xi) < C_0 <\xi>^m. \tag{5.4}$$

*Тогда существует ПДО $Q(t, s)$, являющийся решением задачи* (5.2) *с символом $q(t, s, x, \xi)$, удовлетворяющим при всех $t, s \in [0, T_1]$, $x \in R^n$, $\xi \in R^n$, $<\xi> \geqslant M$ неравенствам*

$$\|D_\xi^\alpha D_x^\beta q(t, s, x, \xi)\| \leqslant C_{\alpha,\beta} <\xi>^{K+p-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} (\ln <\xi>)^{|\alpha+\beta|} \tag{5.5}$$

*и, следовательно, принадлежащим классу*

$$q \in C_{t,s}\Big([0, T_1]^2; \bigcap_{0<\varepsilon<1} S_{\rho,\delta}^{K+p+\varepsilon}\Big) \cap C_t^1\Big([0, T]^2; \bigcap_{0<\varepsilon<1} S_{\rho,\delta}^{K+m+p+\varepsilon}\Big).$$

*Решение единственно по* mod $C_{t,s}([0, T_1]^2; \Psi^{-\infty})$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 5 [8].

В нашем случае, допуская некоторую вольность в обозначениях $R(t, s) = E_2(s, t)\,[-\operatorname{Im} D(t) + R(t)]\, E_2(t, s) = R_0(t, s)$, причем $g(t, \xi) = \ln <\xi>$, так что условия предложения 4 выполнены. Итак нами построен параметрикс $E_1(t, s)$, а следовательно, и доказана

Теорема 3. *Пусть $E_1(t, s)$ — параметрикс задачи* (5.1). *Тогда параметрикс задачи Коши для $L_0$* (2.1) *существует и может быть записан в форме $E_0(t, s) = M^{\#}(t) N(t) E_1(t, s) N^{\#}(t) M(t)$, где операторы $M(t)$, $N(t)$, $M^{\#}(t)$, $N^{\#}(t)$ описаны в* § 2. *Он представляется в виде сумм ИОФ с фазовыми функциями $\Phi_j(t, s, x, \xi)$ $(j = 1, \cdots, m)$, описанными в лемме* 5.

С помощью теоремы 3 и оператора $H(x, D_x)$ легко доказывается

Теорема 4. *Пусть оператор $L$* (0.4) *удовлетворяет условию* (A). *Тогда решение задачи Коши* (0.5), (0.6) *с $f \in C_t^\infty([0, T]; E(R^n))$, $\psi_j \in E(R^n)$, $j = 0, \cdots, m-1$, существует, единственно $u \in C_t^\infty([0, T]; E(R^n))$, а задача имеет обычный конус зависимости. Параметрикс задачи Коши* (0.5), (0.6) *может быть записан в виде оператора, действующего на вектор начальных данных $(\psi_0, \cdots, \psi_{m-1})$ по формуле*

$$\sum_{j=0}^{m-1} h^{(j-m)}(x, D_x)\, E_0^{1,j+1}(t, s, x, D_x)\, h^{m-1}(x, D_x)\, \psi_j(x), \tag{5.6}$$

*где $E_0^{1,j}$ есть $(1, j)$ элемент параметрикса $E_0(t, s)$ из теоремы* 3.

Как следствие получаем. что решение задачи (0.5), (0.6) с $f \in C_t^\infty([0, T]; E'(R^n))$, $\psi_j \in E'(R^n)$ имеет вид (по mod $C^\infty$)

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{m-1} h^{(j-m)}(x, D_x) E_0^{1, j+1}(t, s, x, D_x)\, h^{m-j}(x, D_x)\, \psi_j(x) +$$

$$+ i \int_s^t E_0^{1, m}(t, \sigma, x, D_x) f(\sigma, x)\, d\sigma. \tag{5.7}$$

(Здесь $E'(R^n)$ — пространство распределений с компактными носителями).

Ясно, что с помощью (5.7) можно построить фундаментальное решение задачи Коши [10], доказать ее корректность в соболевских пространствах, уточнить потерю гладкости, исследовать вопрос распространения и ветвления особенностей.

То, что условие (A) является, в определенном смысле, и необходимым для $C^\infty$-корректности задачи Коши (0.5), (0.6) следует из теоремы 5, доказательство которой, аналогичное доказательству теоремы 2 [11], в настоящей работе мы не приводим, и для формулировки которой нам потребуются нижеследующие обозначения. Пусть $\nu \in C^\infty(R_+^1)$ такова, что при $z \in (0,1)$ с некоторыми постоянными $c, c_k, \delta, \gamma, \varepsilon_1$, $0 < \delta < 1/3$, $0 < \gamma \leqslant 1$, $0 < \varepsilon_1 < 1$ для всех $k \in N$

$$\nu(0) = 0,\ \nu(z) > 0,\ \nu'(z) \geqslant 0,\ |\nu^{(k)}(z)| \leqslant c_k (\nu'(z)/\nu(z))^{k-1} \nu'(z), \tag{5.8}$$

$$\lambda'(z)/\lambda(z) + \nu'(z)/\nu(z) \leqslant c\,(\nu^{\gamma}(z)/\lambda(z))^{\delta}, \tag{5.9}$$

$$\gamma\, \nu'(z)/\nu(z) \leqslant (1 - \varepsilon_1)\, \lambda'(z)/\lambda(z). \tag{5.10}$$

Будем обозначать через $\Gamma$ коническое (по $\xi$) множество в $R_x^n \times (R_\xi^n \setminus 0)$, а через $\pi_x$, $\pi_\xi$ — естественные проекции на $R_x^n$ и $R_\xi^n$, соответственно, причем $0 \in \pi_x(\Gamma)$. Обозначим также $\Gamma_0 = \Gamma \cap \{(x, \xi) | x \neq 0\}$.

Т е о р е м а 5. *Предположим, что в некотором открытом коническом множестве* $\Gamma$ *для некоторой пары* $(\hat{j}, \hat{k})$, $0 < \hat{k} < m$, $m - \hat{j} - \hat{k} > 0$, *для всех* $(t, x, \xi) \in J \times \Gamma_0$ *имеет место представление*

$$\sum_{|\alpha| = m - \hat{j} - \hat{k}} a_{\hat{j}, \alpha}(t, x)\, \xi^\alpha = \lambda^{m - \hat{j} - \hat{k}}(|x|)\, |\ln \lambda(|x|)|^{\hat{k}}\, \frac{b(t, x, \xi)}{\nu(|x|)}\, |\xi|^{m - \hat{j} - \hat{k}} \tag{5.11}$$

*с* $\gamma = 1/(m - \hat{j} - \hat{k})$ *и с функцией* $b(t, x, \xi)$, *удовлетворяющей при всех* $l, \alpha, \beta$ *и всех* $(t, x, \xi) \in J \times \Gamma_0$ *оценкам*

$$|D_t^l D_\xi^\alpha D_x^\beta b(t, x, \xi)| \leqslant C_{l, \alpha, \beta} < \xi >^{-|\alpha|} (\lambda'(|x|)/\lambda)|x|))^{|\beta|}, \tag{5.12}$$

$$|b(t, x, \xi)|\ \mathrm{const} > 0 \tag{5.13}$$

*и для которой существуют постоянные* $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, $\varepsilon \in (0, \pi)$ *такие, что*

$$|\theta_0 - \arg(-b(t, x, \xi))| \leqslant \varepsilon \text{ при } (t, x, \xi) \in J \times \Gamma_0. \tag{5.14}$$

*Пусть, далее, при тех же* $(t, x, \xi)$ *комплексные корни* $(m - \hat{j})$*-ой степени из* $-b(t, x, \xi)/|b(t, x, \xi)|$ *обозначим их через* $z_l(t, x, \xi)$

$(l=1,\cdots,m-\hat{j})$, *можно так пронумеровать и разбить на две группы* $\{z_l\}_1^r$, $\{z_l\}_{r+1}^{m-\hat{j}}$, $0\leqslant r< m-\hat{j}$, *что* $\operatorname{Im} z_{m-\hat{j}} \leqslant 0$ *и с некоторой постоянной* $\delta_1$ *при всех* $(t, x, \xi)\in J\times\Gamma_0$

$$\min_{1\leqslant l\leqslant r} \operatorname{Im} z_l(t, x, \xi) \geqslant o(1), \quad \min_{r+1\leqslant l\leqslant m-\hat{j}} |\operatorname{Im} z_l(t, x, \xi)| \geqslant \delta_1 > 0,$$

*где величина* $o$ (1) *может быть сделана сколь угодно малой за счет уменьшения* $\pi_x(\Gamma)$ *и сужения* $\pi_\xi(\Gamma)$. (*При* $r=0$ *первая группа пустая*).

*Предположим также, что для остальных* $(j, k)$, $k=0,\cdots,m-1$, $m-j-k>0$, *при тех же* $(t, x, \xi)$ *для любых* $l$, $\beta$, $\gamma$

$$|D_t^l D_\xi^\gamma D_x^\beta \sum_{|\alpha|=m-j-k} a_{j,\alpha}(t, x)\xi^\alpha| \leqslant C_{l,\gamma,\beta}\lambda^{m-j-k-|\beta|}(|x|)\times$$

$$\times|\ln\lambda(|x|)|^k(\lambda'(|x|))^{|\gamma|}\langle\xi\rangle^{m-j-k-|\gamma|}. \tag{5.15}$$

*Тогда задача Коши* (0.5), (0.6) *с* $s=0$ *не является корректно поставленной в окрестности точки* (0, 0) *в смысле определения* 1 [11].

С другой стороны, как показывает следующая теорема (в которой $J=[-T, T]$) условия (0.14) являются достаточными для справедливости теоремы единственности, доказанной в нашей, совместной с А. А. Галстян работе [17].

Теорема 6. [17]. *Пусть условие* (А) *выполнено частично, а именно, справедливы* (0.8), (0.9), *а вместо* (0.10) *выполнено неравенство* $|\operatorname{Im}\tau_l(t, x, \xi)|\geqslant d\lambda(|x|)\langle\xi\rangle$, $d=\text{const}>0$ $(l=1,\cdots,m)$, *причем существуют* $\alpha_l$, $\beta_l$ $(l=1,\cdots,m',\ m'\leqslant m)$ *такие, что* $\beta_l-\alpha_l\leqslant\pi-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, $[\alpha_l, \beta_l]\cap[\alpha_k, \beta_k]=\varnothing$, $l\neq k$, *и для любого* $\tau_l$ *найдется такой индекс* $i$, *что* $\arg\tau_l(t, x, \xi)\in[\alpha_i, \beta_i]$, $(t, x, \xi)\in J\times Z_h(N)$ *Тогда существуют открытые окрестности* $V$, $V'$, $V'\subset V$, *начала координат в* $R^{n+1}$ *такие, что если* $u\in C^\infty(V)$, $Lu=0$ *в* $V$ *и* $\operatorname{supp} u\subset\{(t, x); t\geqslant 0\}$, *то* $u\equiv 0$ *в* $V'$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 16.III.1988

Կ. Հ. ՅԱՂՋՅԱՆ. Կոշու խնդրի պարամետրիքսը ըստ տարածական փոփոխականների վերածվող հիպերբոլական օպերատորների համար (*ամփոփում*)

*Հոդվածում ուսումնասիրված են օպերատորներ, որոնց գլխավոր սիմվոլի արմատները համընկնում են ժամանակի առանցքի վրա։ Ցածր կարգի ածանցյալների գործակիցների վրա պայմանները ձևակերպված են, ինչպես բացահայտ տեսքով, այնպես էլ լրիվ սիմվոլի արմատների միջոցով։ Պարամետրիքսի կառուցումը կատարվում է օպերատորի սիմվոլի որոշման տիրույթը երկու գոտիների տրոհման և համապատասխան ձևով որոշված պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների և Ֆուրյեի ինտեգրալ օպերատորների որոշ դասերի օգնությամբ։ Նշված է, որ վերոհիշյալ պայմանները նաև անհրաժեշտ են Կոշու խնդրի* $C^\infty$*-կոռեկտության համար։*

K. H. YAGDJIAN, *Parametrix for a Cauchy problem for a hyperbolic operators which degenerate with respect to the space variables* (summary)

The paper with the operators which have variable multiplicity characteristics which coincide on the time-axis. It is assumed that the coefficients satisfy some conditions formulated in derms of the roots of the complete symbol of the operator. We construct the parametrix of the Cauchy problem by means of zonal subdivision of the cotangent bundle and of specific classes of pseudodifferential operators and Fourier integral operators. It is shown also that the conditions are necessary for the $C^\infty$-well-posedness of the Cauchy problem. (Engl. transl. see Souviet J. of Contemporary Math, Anal., 1989, v. XYIV, n. 5).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *E. E. Levi.* Caracteristiche multiple e problema di Cauchy, Ann. di. Matem., Ser. 3a, v. 16, 1909, 161—201.
2. *В. Я. Иврий, В. М. Петков.* Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, УМН 29, вып. 5, 1974, 3—70.
3. *О. А. Олейник.* О гиперболических уравнениях второго порядка, вырождающихся внутри области и на ее границе. УМН, 24, вып. 2, 1969, 229—230.
4. *N. Iwasaki.* The Cauchy problem for hyperbolic equations with double characteristics, Publ. RIMS, Kyoto Univ., v. 19, № 3, 1983, 927—942.
5. Hyperbolic equations and related topics. Proc. of the Taniguchi Intern. Symp., Katata and Kyoto, 1984.
6. *В. Я. Иврий.* Линейные гиперболические уравнения. В кн.: «Линейные дифференциальные уравнения с частными производными-4», Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 33, 1988, 157—247.
7. *S. Tarama.* Sur le probleme de Cauchy pour un class des operateurs differentiels du type faiblement hyperbolique, Jour. Math. Kyoto Univ., v. 22, № 2, 1982 333—368.
8. *К. А. Ягджян.* Псевдодифференциальные операторы с параметром и фундаментальное решение задачи Коши для операторов с кратными характеристиками, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 21, № 4, 1986, 317—344 (Engl. transl.: Souviet J. Contemporary Math. Anal., v. 21. № 4, 1986, 1—30).
9. *K. Shinkai.* On the fundamental solution for a degenerate hyperbolic system, Osaka J. Math., v. 18, № 1, 1981, 257—288).
10. *H. Kumano-go.* A calculus of Fourier integral operaaors on $R^n$ and the fundamental solution for an operator of hyperbolic type, Comm. Partial Diff. Equations, v. 1, № 1, 1976, 1—44.
11. *К. А. Ягджян.* Необходимые условия корректности задачи Коши для операторов с кратными характеристиками, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 23, № 5, 1988, 439—462 (Engl. transl.: Souviet J. Contemporary Math. Anal., v. 23, № 5, 1988).
12. *К. А. Ярджян.* Экспонента псевдодифференциального оператора и вырождающиеся уравнения. УМН, 42, вып. 4, 1987, 170.
13. *H. Uryu.* The Cauchy problem for weakly hyperbolic equations (II) Infinite degenerate case. Tokyo J. Math., v. 3, № 1, 1980, 99—113.
14. *T. Mandai.* Generalized Levi conditions for weacly hyperbolic equations-an attemt. to treat the degeneracy with respect to the space variables, Publ. RIMS, Kyoto Univ., v. 22, № 1, 1986, 1—23.
15. *Y. Morimoto.* Fundamental solutions for a hyperbolic equations with involutive characteristics of variable multiplicity, Comm. Partial Diff. Equations, v. 4, № 6, 1979, 609—643.
16. *C. Iwasaki, Y. Morimoto.* Propagation of singularities of solutions for a hyperbolic system with nilpotent characteristics, I, II, Comm. Partial Diff. Equations v. 7, № 7, 1982, 743—794, v. 9, № 15, 1984, 1407—1436.
17. *А. А. Галстян, К. А. Ягджян.* Единственность решения задачи Коши для вырождающихся эллиптических уравнений, УМН, 44, вып. 4, 1989, 175.