ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 5, 1989 Математика

УДК 519.248

М. Р. МАРТИРОСЯН

О НЕФИНИТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ГАУССОВСКИХ ГИББСОВСКИХ ПОЛЕЙ

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматриваются гиббсовские поля на ν-мерной целочисленной решетке Z^ν, являющиеся малыми нефинитными возмущениями гауссовского гиббсовского поля. Потенциал возмущения имеет вид

$$U(x)=\sum_{A\subset Z^\nu} U_A(x),\quad A - \text{конечно},\quad x\in(\mathrm{R}^k)^{Z^\nu}.$$

Задача данной работы состоит в нахождении достаточных условий на скорость убывания величин $U_A=\sup\limits_{x_A\in X^A}|U_A(x_A)|$ с ростом $|A|$ — числа точек множества A, при которых свободная энергия существует и аналитически зависит от всех параметров, от которых аналитически зависит потенциал U, что, в частности, является критерием отсутствия фазовых переходов.

Финитные возмущения гауссовских полей (т. е. возмущения, удовлетворяющие для некоторого $R>0$ условию $U_A\equiv 0$ при $|A|>R$) изучались ранее при помощи техники кластерных разложений (см. [1] и указанную там литературу).

В настоящей статье использован другой подход, связанный с индуктивными оценками статистических сумм, который был впервые предложен Добрушиным в [2] и развит им впоследствии в работах [3]—[5]. В частности, в [4] доказана аналитичность свободной энергии для случая финитных неограниченных возмущений гауссовского поля.

Оценки на скорость убывания $\|U_A\|$ аналогичны оценкам, полученным ранее тем же методом для случая моделей с компактным спином (см. [5]).

§ 2. Гауссовские гиббсовские поля

Ниже будут приведены основные сведения о гауссовских гиббсовских полях, которые нам понадобятся в дальнейшем. В изложении этих сведений мы будем следовать определениям работ [4] и [6]. Результаты, приводимые без доказательств, также заимствованы из этих работ.

Пусть Z^ν — ν-мерная целочисленная решетка с метрикой $|t^{(1)} - t^{(2)}| = \max\limits_{1 \le j \le \nu} |t_j^{(1)} - t_j^{(2)}|$, $t^{(i)} = (t_1^{(i)}, \cdots, t_\nu^{(i)}) \in Z^\nu$, $i = 1, 2$. Для произвольного $A \subset Z^\nu$ будем обозначать $C(A) = \{B \subset Z^\nu : B \cap A \neq \varnothing, |B| < \infty\}$ (здесь $|B|$ — число точек множества B). Пусть R^k — k-мерное линейное пространство со скалярным произведением $(x^{(1)}, x^{(2)}) = \sum\limits_{l=1}^{k} x_l^{(1)} \cdot x_l^{(2)}$, $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \cdots, x_k^{(j)})$, $j = 1, 2$ и нормой $|x| = (x, x)^{1/2}$, $x \in R^k$. Элементы множества $(R^k)^\Lambda$, $\Lambda \subset Z^\nu$ будем называть конфигурациями (на Λ). Сужение конфигурации $x \in (R^k)^\Lambda$ на множество $A \subset \Lambda$ будем обозначать через x_A, а под $x_{A_1} \cup x_{A_2}$ будем понимать конфигурацию $x \in (R^k)^{A_1 \cup A_2}$, сужение которой на A_i, $i = 1, 2$ совпадает с x_{A_i}.

Гауссовское (k-мерное) гиббсовское поле в объеме Λ (под объемом здесь и далее мы будем понимать произвольное конечное подмножество решетки Z^ν) задается при помощи теплицевой $k|\Lambda| \times k|\Lambda|$ матрицы Φ^Λ, $k \times k$-блоки которой суть положительно определенные симметричные матрицы $\Phi_{s,t}^\Lambda = \Phi_{s-t}^\Lambda = \Phi_{t-s}^\Lambda$, $s, t \in \Lambda$, относительно которых мы будем предполагать, что $\Phi_{s,t}^\Lambda \equiv 0$ при $|s-t| > r$, где r — некоторое фиксированное число (радиус взаимодействия) и, помимо этого, будем считать выполненным условие

$$Q^{-1} \|x_\Lambda\|^2 \leqslant \sum_{s,\, t \in \Lambda} (\Phi_{s,t}^\Lambda\, x_s,\, x_t) \leqslant Q \|x_\Lambda\|^2, \tag{2.1}$$

где $\|x_\Lambda\|^2 = \sum\limits_{t \in \Lambda} |x_t|^2$ и Q — некоторое фиксированное число, $1 \leqslant Q < \infty$ (существенное предположение здесь составляет, очевидно, лишь левое из неравенств (2.1), представляющее собой так называемое условие „положительности массы“). Введем также следующие стандартные обозначения: $\Lambda^c = Z^\nu \setminus \Lambda$ и для $\Lambda \in C(Z^\nu)$

$$\partial\Lambda = \{t \overline{\in} \Lambda : \operatorname{dist}(t, \Lambda) \leqslant r\},$$

где r — радиус взаимодействия и $\operatorname{dist}(t, \Lambda) = \min\limits_{s \in \Lambda} |t - s|$. Для произвольных $\Lambda \in C(Z^\nu)$ и конфигурации $\tau \in (R^k)^{\partial\Lambda}$ (которую мы будем называть граничным условием для Λ) плотность гауссовского распределения вероятностей в объеме Λ задается формулой

$$P_\tau^\Lambda(x_\Lambda) = [Z_\Lambda(\Phi^\Lambda, \tau)]^{-1} \cdot \exp\Big\{-\frac{1}{2} \sum_{s,\, t \in \Lambda} (\Phi_{s-t}^\Lambda\, x_s,\, x_t) - \sum_{s \in \Lambda,\, u \in \partial\Lambda} (\Phi_{s-u}^\Lambda\, x_s,\, \tau_u)\Big\}, \tag{2.2}$$

где статистическая сумма

$$Z_\Lambda(\Phi^\Lambda, \tau) = \int\limits_{(R^k)^\Lambda} \exp\Big\{-\frac{1}{2} \sum_{s,\, t \in \Lambda} (\Phi_{s-t}^\Lambda\, x_s,\, x_t) -$$

$$- \sum_{s\in\Lambda,\ u\in\partial\Lambda} (\Phi^{\Lambda}_{s,u}\, x_s,\ \tau_u)\Big\}\cdot \tag{2.3}$$

При этом известно, что плотность P^{Λ}_{τ} представима в виде

$$P^{\Lambda}_{\tau}(x_{\Lambda}) = [(2\pi)^{k|\Lambda|}\det B^{\Lambda}]^{-\frac{1}{2}}\cdot$$
$$\cdot\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{s,t\in\Lambda}(\Phi^{\Lambda}_{s,t}(x_s-\bar{x}_s(\tau)),\ x_t-\bar{x}_t(\tau))\Big\}, \tag{2.4}$$

где $r^{\Lambda,\Lambda'}$ — вектор среднего значения и матрица ковариаций $B^{\Lambda} = \{b^{\Lambda}_{s,t},\ s,\ t\in\Lambda\}$ обратна к матрице Φ^{Λ}. Если $\Lambda'\subset\Lambda$ и $\tau\in(\mathbf{R}^k)^{\partial\Lambda}$, то проекция плотности P^{Λ}_{τ} на $(\mathbf{R}^k)^{\Lambda'}$ есть

$$P^{\Lambda,\Lambda'}_{\tau}(x_{\Lambda'}) = \int_{(\mathbf{R}^k)^{\Lambda\setminus\Lambda'}} P^{\Lambda}_{\tau}(x)\,dx_{\Lambda\setminus\Lambda'} =$$
$$= [(2\pi)^{k|\Lambda'|}\det B^{\Lambda,\Lambda'}]^{-\frac{1}{2}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{s,t\in\Lambda'}\times$$
$$\times(\Phi^{\Lambda,\Lambda'}_{s,t}(x_s-\bar{x}_s(\tau)),\ x_t-\bar{x}_t(\tau))\Big\}, \tag{2.5}$$

где $B^{\Lambda,\Lambda'} = \{b_{s,t},\ s,\ t\in\Lambda'\}$ — $\Lambda'\times\Lambda'$ — подматрица матрицы B^{Λ}, а матрица $\Phi^{\Lambda,\Lambda'}$ обратна к $B^{\Lambda,\Lambda'}$. Вектор среднего значения выражается линейно через граничное условие, т. е. существуют $k\times k$-матрицы $a^{\Lambda}_{s,t}$, $s\in\Lambda$, $t\in\partial\Lambda$ такие, что

$$\bar{x}_s(\tau) = \sum_{t\in\partial\Lambda} a^{\Lambda}_{s,t}\,\tau_t,\quad s\in\Lambda \tag{2.6}$$

и, кроме того, существуют положительные константы A_0, a_0, Φ_0, φ_0 и B_0 (зависящие лишь от основных характеристик поля ν, k, r и Q) такие, что для произвольных $\Lambda'\subset\Lambda\in C(\mathbf{Z}^{\nu})$

$$\|a^{\Lambda}_{s,t}\| \leqslant A_0\exp\{-a_0|s-t|\},\quad s\in\Lambda,\ t\in\partial\Lambda, \tag{2.7}$$

$$\|\Phi^{\Lambda,\Lambda'}_{s,t}\| \leqslant \Phi_0\exp\{-\varphi_0|s-t|\},\quad s,\ t\in\Lambda', \tag{2.8}$$

$$B_0^{-1}|x_{\Lambda'}|^2 \leqslant \sum_{s,t\in\Lambda'}(b^{\Lambda}_{s,t}\,x_s,\ x_t) \leqslant B_0|x_{\Lambda'}|^2, \tag{2.9}$$

где для произвольной $k\times k$-матрицы $A=\{a_{ij}\}$ мы считаем $\|A\| = (\sum_{i,j}|a_{ij}|^2)^{1/2}$ (отметим, что так определенная матричная норма согласована с уже введенной вектор-нормой, т. е. $\|Ax\|\leqslant\|A\|\cdot\|x\|$). Наконец, известно, что при $\Lambda'\subset\Lambda$ и $\tau_{\Lambda'}\in(\mathbf{R}^k)^{\Lambda'}$

$$\int_{(\mathbf{R}^k)^{\Lambda'}}\prod_{s\in\Lambda'}\exp\{(\sigma_s,\ x_s-\bar{x}_s(\tau))\}\,P^{\Lambda,\Lambda'}_{\tau}(x_{\Lambda'})\,dx_{\Lambda'} =$$
$$= \exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{u,v\in\Lambda'}(b^{\Lambda}_{u,v}\,\sigma_u,\ \sigma_v)\Big\}\cdot \tag{2.10}$$

Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть* $W\subset V\subset\Lambda\in C(Z^\nu)$. *Обозначим*

$$T_V^\Lambda=\{\tau\in(R^k)^{\partial V}:\tau_{\partial V\cap\Lambda^c}=0\}. \tag{2.11}$$

Пусть $\tau\in T_V^\Lambda$ *и*

$$\varphi_W(x,\ V,\ \tau)=\varphi_W(x)=\prod_{s\in W}(1+\alpha_s\exp\{|x_s-\bar x_s(\tau)|\}), \tag{2.12}$$

где все $\alpha_s>0$. *Тогда существует константа* h_0 *(зависящая лишь от* ν, k, r *и* Q *такая, что*

$$\int\limits_{(R^k)^W}\varphi_W(x_W)\,P_\tau^{V,W}(x_W)\,dx_W\leqslant\prod_{s\in W}(1+\alpha_s e^{h_0}). \tag{2.13}$$

Доказательство. Пусть $W'\subset W$ и $S(W')\subset(R^k)^{W'}$ — множество всех векторов с координатами ±1. Воспользуемся формулой (2.10), взяв в качестве $\sigma_{W'}$ произвольный вектор $S(W')$. В силу (2.9) имеем

$$\int\limits_{(R^k)^{W'}}\exp\{\sum_{s\in W'}(\sigma_s,\ x_s-\bar x_s(\tau))\}\,P_\tau^{V,W'}(x_{W'})\,dx_{W'}=$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{s,\,s'\in W'}(b_{s,s'}^V\sigma_s,\ \sigma_{s'})\right\}\leqslant\exp\left\{\frac{B_0}{2}k\,|W'|\right\},$$

т. к. ясно, что $\|\sigma_{W'}\|^2=k\,|W'|$ для всех $\sigma_{W'}\in S(W')$. Поскольку $S(W')=$ $=2^{k|W'|}$ и $\|x\|\leqslant|x_1|+\cdots+|x_k|$, $x=(x_1,\cdots,x_k)\in R^k$, то отсюда

$$\int\limits_{(R^k)^{W'}}\exp\{\sum_{u\in W'}|x_u-\bar x_u(\tau)|\}\,P_\tau^{V,W'}(x_{W'})\,dx_{W'}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\sigma\in S(W')}\int\limits_{(R^k)^{W'}}\exp\{\sum_{s\in W'}(\sigma_s,\ x_s-\bar x_s(\tau))\}\,P_\tau^{V,W'}(x_{W'})\,dx_{W'}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{k|W'|}\exp\left\{\frac{B_0}{2}k\,|W'|\right\}=e^{h_0|W'|}, \tag{2.14}$$

где $h_0=k\left[\ln 2+\dfrac{B_0}{2}\right]$. Остается заметить, что

$$\int\limits_{(R^k)^W}\varphi_W(x)\,P_\tau^{V,W}(x)\,dx=1+$$

$$+\sum_{W'\subset W}\prod_{s\in W'}\alpha_s\int\limits_{(R^k)^{W'}}\exp\left\{\sum_{u\in W'}|x_u-\bar x_u(\tau)|\right\}P_\tau^{W',V}(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant 1+\sum_{W'\subset W}\prod_{s\in W'}\alpha_s e^{h_0}=\prod_{s\in W}(1+\alpha_s e^{h_0}),$$

что и требовалось.

Лемма 2.2. *Пусть* $V\subset\Lambda$, $t\in\partial V\cap\Lambda$ *и граничные условия* τ^1, $\tau^2\in T_V^\Lambda$ *таковы, что* $\tau_s^1=\tau_s^2$ *при* $s\neq t$. *Для произвольного* $l>0$ *обозначим*

$$V_l = \{s \in V : |s - t_i| > l\}, \ \Gamma_l = \partial V_l \cap V. \tag{2.15}$$

Пусть далее $P_l^i(x) = P_{-i}^{V, \Gamma_l}(x)$, $i = 1, 2$ *(см. (2.5))— суть проекции плотностей* P_{-i}^V *на* Γ_l. *Обозначим коротко* $\bar{x}_s^i = \bar{x}_s(\tau^i)$, $i = 1, 2$. *Как и в (2.12) для произвольных* $\alpha_s > 0$, $s \in \Gamma_l$ *пусть*

$$\varphi_l(x) = \varphi_{\Gamma_l}(x, V, \tau^2) = \prod_{s \in \Gamma_l} (1 + \alpha_s \exp \{|x_s - \bar{x}_s^2|\}). \tag{2.16}$$

Пусть далее

$$I_l = \int_{(R^k)^{\Gamma_l}} (\varphi_l(x) - 1) \, |P_l^1(x) - P_l^2(x)| \, dx, \tag{2.17}$$

$$J_l^i = \int_{(R^k)^{\Gamma_l}} (\varphi_l(x) - 1) \, P_l^i(x) \, dx, \ i = 1, 2. \tag{2.18}$$

Тогда существуют положительные константы $\bar{a}$ *и* H *(зависящие лишь от* ν, k, r *и* Q*) такие, что при*

$$l \geqslant H \max \{\ln (|\tau_l^1 - \tau_l^2|), 1\} \tag{2.19}$$

справедливы следующие два утверждения:

1) *если* $\alpha_s \leqslant 1$, $s \in \Gamma_l$, *то*

$$J_l^i \leqslant \frac{1}{|\Gamma_l|} \sum_{s \in \Gamma_l} \alpha_s \exp \{l^\nu\}, \tag{2.20}$$

2) *существует функция* $\alpha(l)$ *такая, что при* $\alpha_s \leqslant \alpha(l)$, $s \in \Gamma$

$$I_l \leqslant \frac{1}{|\Gamma_l|} \sum_{s \in \Gamma_l} \alpha_s \exp \{-\bar{a} l\}. \tag{2.21}$$

Доказательство. Для доказательства оценки (2.20) воспользуемся леммой 2.1 и простым неравенством

$$\left| \prod_{l=1}^n (1 + z_l) - 1 \right| \leqslant \sum_{l=1}^n |z_l| \exp \left(\sum_{l=1}^n |z_l| \right), \tag{2.22}$$

справедливым для любых (вообще говоря, комплексных) чисел z_i $i = 1, \cdots, n$. Тогда из (2.18) и (2.13) следует существование константы K (зависящей лишь от ν, k, r и Q) такой, что

$$J_l^i \leqslant \prod_{s \in \Gamma_l} (1 + \alpha_s e^{h_0}) - 1 \leqslant \exp \left\{ h_0 + e^{h_0} \sum_{s \in \Gamma_l} \alpha_s + \ln |\Gamma_l| \right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{|\Gamma_l|} \sum_{s \in \Gamma_l} \alpha_s \leqslant \exp \{K l^{\nu - 1}\} \cdot \frac{1}{|\Gamma_l|} \sum_{s \in \Gamma_l} \alpha_s,$$

так что, считая $H > K$ приходим к оценке (2.20).

Перейдем к доказательству оценки (2.21). Согласно (2.5) гуссовские плотности $P_l^i(x) = P_{-i}^{V, \Gamma_l}(x)$, $i = 1, 2$ имеют средние значения

$\{\overline{x}_s^i = \overline{x}_s(\tau^i),\ s \in \Gamma_l\}$ и одинаковую матрицу ковариаций $B^{V,\Gamma_l} = \{b_{u,v},\ u, v \in \Gamma_l\}$. Положим

$$\Delta_l = \max_{s \in \Gamma_l} |\overline{x}_s^1 - \overline{x}_s^2|. \tag{2.23}$$

В силу (2.6), (2.7) и условия $\tau_s^1 = \tau_s^2$ при $s \neq t$

$$\Delta_l = \max_{s \in \Gamma_l} \|a_{s,l}^{\Lambda}(\tau_l^1 - \tau_l^2)\| \leqslant \max_{s \in \Gamma_l} A_0 \|\tau_l^1 - \tau_l^2\| \exp\{-a_0 |s - t|\} \leqslant$$

$$\leqslant A_0' \|\tau_l^1 - \tau_l^2\| \exp\{-a_0 l\},$$

где $A_0' = A_0 \exp\left\{-\dfrac{a_0}{2} l\right\}$. Отсюда, считая, что $H > \dfrac{2}{a_0}$ получаем, что при выполнении условия (2.19)

$$\Delta_l \leqslant A_0' \exp\left\{-\frac{a_0}{2} l\right\}. \tag{2.24}$$

Заметим, что оценку (2.21) достаточно доказать лишь для больших l, поскольку имеется свобода выбора H в (2.19). В частности, на основании (2.24) можно считать, что

$$\Delta_l < 1. \tag{2.25}$$

Поэтому

$$\varphi_l(x) \leqslant \prod_{s \in \Gamma_l} \left(1 + \alpha_s \exp\left\{|x_s'| + \frac{1}{2}\right\}\right), \tag{2.26}$$

где

$$x_s' = x_s - \frac{1}{2}(\overline{x}_s^1 + \overline{x}_s^2) \quad s \in \Gamma_l. \tag{2.27}$$

Пусть

$$\alpha(l) = \exp\{-l^{\gamma}\} \tag{2.28}$$

и числа $\overline{a}$, L, M выбраны следующим образом:

$$2\overline{a} < L = \frac{a_0}{4} l,\ M = \ln\left[\left(\sum_{s \in \Gamma_l} \alpha_s\right)^{-1}\right] \tag{2.29}$$

(условие (2.28) позволяет считать, что $L < M$). Оценку интеграла (2.17) проведем раздельно по следующим трем областям:

$$S_1(l) = \{x \in (\mathrm{R}^k)^{\Gamma_l} : \max_{s \in \Gamma_l} |x_s'| < L\}, \tag{2.30а}$$

$$S_2(l) = \{x \in (\mathrm{R}^k)^{\Gamma_l} : L \leqslant \max_{s \in \Gamma_l} |x_s'| \leqslant M\}, \tag{2.30б}$$

$$S_3(l) = (\mathrm{R}^k)^{\Gamma_l} \setminus \{S_1(l) \cup S_2(l)\}. \tag{2.30в}$$

Обозначим

$$I_j(l) = \int_{S_j(l)} (\varphi_l(x) - 1)\, |P_l^1(x) - P_l^2(x)|\, dx,\ j = 1, 2, 3. \tag{2.31}$$

Оценим сначала интеграл $I_1(l)$. Согласно (2.5)

$$P_l^1(x)/P_l^2(x)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{u,v\in\Gamma_l}\left[(\Phi_{u,v}^{V,\Gamma_l}(x_u-\overline{x}_u^1),\ x_v-\overline{x}_v^1)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-(\Phi_{u,v}^{V,\Gamma_l}(x_u-\overline{x}_u^2),\ x_v-\overline{x}_v^2)\right]\right\}.$$

Переходя к переменным x_s', $s\in\Gamma_l$ (см. (2.27)) несложными преобразованиями получаем отсюда, что

$$\frac{P_l^1(x)}{P_l^2(x)}=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{u,v\in\Gamma_l}\left[(\Phi_{u,v}^{V,\Gamma_l}x_u',\ \overline{x}_v^1-\overline{x}_v^2)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(\Phi_{u,v}^{V,\Gamma_l}(\overline{x}_u^1-\overline{x}_u^2),\ x_v')\right]\right\}$$

откуда, используя оценку (2.8), определение (2.23) и условие (2.30а) находим, что в области S_1

$$P_l^1(x)/P_l^2(x)\leqslant\exp\{\Phi_0 L\Delta_l|\Gamma_l|^2\}. \tag{2.32}$$

Поскольку, в силу (2.29) и (2.24) $\Phi_0 L\Delta_l|\Gamma_l|^2=o(1)$, то из (2.32), аналогичной оценки для $P_l^2(x)/P_l^1(x)$ и неравенства $|e^x-1|\leqslant e|x|$, справедливого при $|x|\leqslant 1$, заключаем, что

$$\int_{S_1(l)}|P_l^1(x)-P_l^2(x)|\,dx=\int_{S_1(l)}P_l^2(x)\left|\frac{P_l^1(x)}{P_l^2(x)}-1\right|dx\leqslant$$
$$\leqslant e\,\Phi_0 L\Delta_l|\Gamma_l|^2, \tag{2.33}$$

когда l достаточно велико. Далее из определений (2.29), (2.30а) и (2.30б) следует, что

$$\sum_{s\in\Gamma_l}a_s\exp\{|x_s'|\}\leqslant 1,\ x\in S_1(l)\cup S_2(l).$$

Поэтому, в силу (2.26) и (2.22)

$$\varphi_l(x)-1\leqslant\sum_{s\in\Gamma_l}a_s\exp\left\{|x_s'|+\frac{1}{2}\right\}\exp\left\{\sum_{s\in\Gamma_l}a_s\exp\left\{|x_s'|+\frac{1}{2}\right\}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant K_{(2.34)}\cdot\sum_{s\in\Gamma_l}a_s\exp(|x_s'|),\ x\in S_1(l)\cup S_2(l). \tag{2.34}$$

Оценки (2.33), (2.34) вместе с определениями (2.30а) и (2.31) позволяют заключить, что

$$I_1(l)\leqslant K_{(2.34)}\cdot e\,\Phi_0 L\Delta_l|\Gamma_l|^2e^L\sum_{s\in\Gamma_l}a_s,$$

откуда, в силу оценки (2.24) и выбора чисел $\overline{a}$ и L (см. (2.29)) находим, что

$$I_1(l)=o(e^{-\overline{a}l})\frac{1}{|\Gamma_l|}\sum_{s\in\Gamma_l}a_s. \tag{2.35}$$

Перейдем к оценке интеграла $I_2(l)$. На основании (2.34) и (2.29) имеем, что для $x\in S_2(l)$

$$\varphi_l(x) - 1 \leqslant K_{(2.34)} \cdot \sum_{s \in \Gamma_l} (\alpha_s e^L + \alpha_s \chi_s(x) \exp(|x_s'|)),$$

где $\chi_s(x)$ — индикатор множества $E_s = \{x \in (\mathbf{R}^k)^{\Gamma_l} : |x_s'| \geqslant L\}$. Поэтому

$$I_2(l) \leqslant K_{(2.34)} \sum_{s \in \Gamma_l} \left\{ \alpha_s \sum_{i=1,2} \left| e^L \int_{S_2(l)} P_l^i(x)\,dx + \int_{E_s} \exp(|x_s'|) P_l^i(x)\,dx \right| \right\}. \tag{2.36}$$

Пусть $P_{l,s}^i(x_s')$, $s \in \Gamma_l$, $i = 1, 2$ — плотность распределения вероятностей для x_s', индуцируемая плотностью $P_l^i(x)$. Ясно, что в таком случае $P_{l,s}^1(x_s')$ (соответственно $P_{l,s}^2(x_s')$) — гауссовская плотность распределения вероятностей со средним значением $m_s^1 = \overline{x}_s^1 - \frac{1}{2}(\overline{x}_s^1 + \overline{x}_s^2) = \frac{1}{2}(\overline{x}_s^1 - \overline{x}_s^2)$ (соответственно $m_s^2 = \frac{1}{2}(\overline{x}_s^2 - \overline{x}_s^1)$). При этом согласно (2.23) $m_s^1 \leqslant \frac{1}{2}\Delta_l$, $m_s^2 \leqslant \frac{1}{2}\Delta_l$ и обе плотности имеют равномерно ограниченные (по l) ковариации (см. (2.2)). Вследствие этого

$$\int_{E_s} \exp(|x_s'|) P_l^i(x)\,dx = \int_{\{|x_s'| > L\}} \exp(|x_s'|) P_{l,s}^i(x_s')\,dx_s' \leqslant K_{(2.37)} e^{-L}, \tag{2.37}$$

где константа $K_{(2.37)}$ зависит лишь от ν, k, r и Q. Кроме того из определения области $S_2(l)$ и известных свойств гауссовского поля

$$\int_{S_2(l)} P_l^i(x)\,dx \leqslant \sum_{s \in \Gamma_l} \int_{\{|x_s'| > L\}} P_{l,s}^i(x_s')\,dx_s' \leqslant K_{(2.38)} |\Gamma_l| e^{-\tilde{K}_{(2.38)} \cdot L^2}, \tag{2.38}$$

где константы $K_{(2.38)}$, $\tilde{K}_{(2.38)}$ зависят лишь от характеристик ν, k, r и Q. Подставляя оценки (2.37) и (2.38) в (2.36), а также используя (2.29), получаем, что

$$I_2(l) \leqslant 2 K_{(2.34)} \sum_{s \in \Gamma_l} \left\{ \alpha_s \left| K_{(2.38)} |\Gamma_l| e^{-\tilde{K}_{(2.38)} \cdot L^2} \cdot e^L + \right.\right.$$

$$\left.\left. + K_{(2.37)} e^{-L} \right| \right\} = o(e^{-\bar{u}l}) \cdot \frac{1}{|\Gamma_l|} \sum_{s \in \Gamma_l} \alpha_s. \tag{2.39}$$

Теперь оценим интеграл $I_3(l)$. Поскольку можно считать, что $\alpha_s e^{1/2} < 1$, то в силу (2.26) и определения (2.30в) области $S_3(l)$

$$\varphi_l(x) \leqslant \prod_{s \in \Gamma_l} \left(1 + \alpha_s \exp\left(|x_s'| + \frac{1}{2}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{|\Gamma_l|} \prod_{s \in \Gamma_l} \exp(|x_s'|) \leqslant 2^{|\Gamma_l|} \exp\{-2M\} \exp\left\{3 \sum_{s \in \Gamma_l} |x_s'|\right\}. \tag{2.40}$$

Заметим также, что из (2.27), (2.23) и (2.25) следует, что для $i=1, 2$ $|x'_s| < |x_s - \bar{x}^l_s| + \frac{\Delta_l}{2} \leqslant |x_s - \bar{x}^l_s| + \frac{1}{2}$, $s \in \Gamma_l$, ввиду чего

$$\exp\{3 \sum_{s \in \Gamma_l} |x'_s|\} \leqslant e^{3/2} \exp\{3 \sum_{s \in \Gamma_l} |x_s - \bar{x}^l_s|\} \tag{2.41}$$

и, воспользовавшись оценкой (2.14) получаем на основании (2.31), (2.40) и (2.41), что

$$I_3(l) \leqslant \sum_{i=1,2} \int_{S_i(l)} \varphi_l(x) P^l_l(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant e^{3/2} \cdot 2^{|\Gamma_l|} e^{-2M} \int_{(\mathrm{R}^k)^{\Gamma_l}} \exp\{3 \sum_{s \in \Gamma_l} |x_s - \bar{x}^l_s|\} P^l_l(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\frac{3}{2} + (3h_0 + \ln 2)|\Gamma_l|\right\} e^{-2M}. \tag{2.42}$$

Теперь, используя определение (2.29) величины M, а также (2.28), находим из (2.42), что при $\alpha_s \leqslant \alpha(l)$, $s \in \Gamma_l$ и достаточно большом l

$$I_3(l) \leqslant o(\exp\{-l^{r-1}\})\, e^{-M} < \frac{1}{|\Gamma_l|} \sum_{s \in \Gamma_l} \alpha_s e^{-\bar{\alpha} l},$$

и соединяя последнюю оценку с (2.35) и (2.29) находим окончательно, что для достаточно больших l при выполнении условия $\alpha_s \leqslant \alpha(l)$, $s \in \Gamma_l$

$$I_l = I^1_l + I^2_l + I^3_l \leqslant |\Gamma_l|^{-1} \sum_{s \in \Gamma_l} \alpha_s e^{-\bar{\alpha} l},$$

что и требовалось.

§ 3. Формулировка основного результата

Рассмотрим комплекснозначный потенциал

$$U = \{U_A(x_A),\ A \in \mathrm{C}(\mathrm{Z}^\nu),\ x_A \in X^A\}, \tag{3.1}$$

где здесь и далее будет для кратности обозначено $X = \mathrm{R}^k$. Функции U_A считаются измеримыми. Пусть $\Lambda \in \mathrm{C}(\mathrm{Z}^\nu)$ и $\sigma \in X^{\Lambda^c}$ — произвольная конфигурация („внешнее условие“). Гауссовской статистической суммой в объеме Λ, отвечающей потенциалу („возмущению“) U и внешнему условию σ, назовем величину

$$\Xi_\Lambda(U, \sigma) = \int_{X^\Lambda} \exp\{-H_U(x_\Lambda | \sigma)\}\, P^\Lambda_0(x_\Lambda)\, dx_\Lambda, \tag{3.2}$$

где условный (при условии σ) гамильтониан

$$H_U(x_\Lambda|\sigma) = \sum_{A \in \mathrm{C}(\Lambda)} U_A(x_{A \cap \Lambda} \cup \sigma_{A \cup \Lambda^c}) \tag{3.3}$$

и P^Λ_0 — гауссовская плотность распределения вероятностей в объеме Λ с нулевыми граничными условиями (см. (2.2)).

Сформулируем основной результат.

Теорема 3.1. *Пусть потенциал (3.1) удовлетворяет условию*

$$\sum_{\substack{A\in C(Z^\nu)\\ t\in A}} \|U_A\| e^{\varkappa |A|} \leqslant \gamma_t, \quad t\in Z^\nu, \tag{3.4}$$

где $\varkappa > 0$ — *некоторое фиксированное число и* $0 \leqslant \gamma_t < 1$, $t\in Z^\nu$. *Тогда существуют константы* C *и* γ, *зависящие лишь от* $\varkappa$ *и характеристик основного гауссовского поля* ν, k, r *и* Q, *такие, что равномерно по всем внешним условиям* $\bar{x}\in X^{\Lambda^c}$

$$|\mathrm{Ln}\, \Xi_\Lambda(U|\bar{x})| \leqslant C \sum_{t\in\Lambda} \gamma_t, \tag{3.5}$$

если только

$$\gamma_t \leqslant \gamma, \quad t\in Z^\nu \tag{3.6}$$

(логарифм в (3.5) понимается в смысле главного значения).

Эта теорема влечет за собой

Следствие. *Пусть потенциал*

$$U(z_1,\cdots,z_n) = \{U_A(x_A; z_1,\cdots,z_n),\ A\in \mathbb{C}(Z^\nu);\ x_A\in X^A\}$$

зависит от n *комплексных параметров* $z_1,\cdots,z_n$, *причем в некоторой области* $D\subset \mathbf{C}^n$ *значений этих параметров, представляющей собой поликруг с центром в 0, все функции* $U_A(x_A; z_1,\cdots,z_n)$, $A\in \mathbf{C}(Z^\nu)$, $x_A\in X^A$ *аналитичны и при* $z_1,\cdots,z_n\in D\cap \mathbf{R}^n$ *вещественны. Тогда, если потенциал* $U(z_1,\cdots,z_n)$ *удовлетворяет условию (3.4) и* γ *достаточно мало, то свободная энергия*

$$F(z_1,\cdots z_n) = \lim_{\Lambda\to\infty} |\Lambda|^{-1} \mathrm{Ln}\, \Xi_\Lambda(U(z_1,\cdots,z_n), 0) \tag{3.7}$$

существует и является аналитической функцией в D.

Доказательство. Согласно теореме Ван Хова предел (3.7) существует при $(z_1,\cdots,z_n)\in D\cap \mathbf{R}^n$. Поскольку $\mathbf{R}^n\cap D$ является множеством единственности в D (т. е. из условия $f(z)=0$ для $z\in \mathbf{R}^n\cap D$, где f аналитична в D, следует, что $f(z)=0$ для всех $z\in D$ (см., например, [1]), то остается воспользоваться теоремой 3.1 и следующим многомерным аналогом теоремы Витали об ограниченной сходимости, который мы приведем без доказательства: пусть $D\subset \mathbf{C}^n$ — поликруг, $E\subset D$ — множество единственности в D и пусть $f_n(z)$, $n=1, 2,\cdots$, — последовательность равномерно ограниченных аналитичных в области D функций. Тогда, если эта последовательность сходится на множестве E, то она сходится всюду в области D и ее предел $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ является аналитической функцией на D.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3.1.

§ 4. Основная лемма

Введем ряд дополнительных определений. Пусть $\mathbf{F}$ — класс всевозможных отображений $F: \bigcup_{A\subset Z^\nu} X^A \to \bigcup_{A\subset Z^\nu} X^A$ таких, что $F(x_A)\in X^A$ для произвольных $A\subset Z^\nu$, $x_A\in X^A$. Пусть $A\subset Z^\nu$ и $\sigma\in X^A$. Обозначим через I_σ отображение из класса $\mathbf{F}$ такое, что для любых $B\subset Z^\nu$, $x\in X^B$

$$I_\sigma(x) = x_{B\cap A^c} \cup \sigma_{B\cap A} \tag{4.1}$$

(фактически отображение I_σ „фиксирует“ конфигурацию на множестве A).

Пусть U — потенциал вида (3.1). Для произвольного $F\in\mathbf{F}$ потенциал $U(F)=\{U_A^F,\ A\in \mathbf{C}(Z^\nu)\}$ определим равенством

$$U_A^F(x_A) = U(F(x_A)),\ A\in\mathbf{C}(Z^\nu),\ x_A\in X^A. \tag{4.2}$$

Заметим, что отсюда следует, что если потенциал U удовлетворяет оценке (3.4), то той же оценке удовлетворяют все потенциалы $U(F)$, $F\in\mathbf{F}$.

Определение 4.1. *Пусть $F\in\mathbf{F}$. Будем обозначать через $\operatorname{supp}_{Z^\nu} F$ и называть носителем (в Z^ν) отображения F множество всех точек $t\in Z^\nu$ таких, что для некоторых $A\subset Z^\nu$, $t\in A$ и $x_A^{(2)}$, $x_A^{(1)}\in X^A$ — конфигураций, отличающихся лишь в одной точке t, $F(x_A^{(1)}) = F(x_A^{(2)})$. В частности понятно, что для произвольных $A\subset Z^\nu$ и $\sigma_{\Lambda^c}\in X^{\Lambda^c}$ $\operatorname{supp}_{Z^\nu} I_{\sigma_{\Lambda^c}}\subset A$. Более того, легко видеть, что, если $\operatorname{supp}_{Z^\nu} F\subset V\subset Z^\nu$ и $W\subset V$, $\sigma\in X^{V\setminus W}$, то $\operatorname{supp}_{Z^\nu} I_\sigma F\subset W$, где $I_\sigma F$ — обычное произведение отображений $I_\sigma F(x) = I_\sigma(F(x))$, $x\in \bigcup_{A\subset Z^\nu} X^A$.*

Определение 4.2. *Пусть $V\subset\mathbf{C}(Z^\nu)$ и $\operatorname{supp}_{Z^\nu} F\subset V$. Условным гамильтонианом для потенциала U (в объеме V, при условии F) назовем величину*

$$H_U(x_V|F) = \sum_{A\in\mathbf{C}(V)} U_A^F(x_{A\cap V}) \tag{4.3}$$

(под $U_A^F(x_{A\cap V})$ мы понимаем величину $U_A^F(x_{A\cap V}\cup y_{A\cap V^c})$, где $y_{A\cap V^c}\in X^{A\cap V^c}$ — произвольно, что корректно в силу условия $\operatorname{supp}_{Z^\nu} F\subset V$).

Ясно, что в частном случае $F=I_\sigma$, где $\sigma\in X^{V^c}$

$$H_U(x_V|I_\sigma) = H_U(x_V|\sigma), \tag{4.4}$$

где $H_U(x_V|\sigma)$ определен как в (3.4), т. е. для $F=I_\sigma$ определение условного гамильтониана $H_U(\cdot|I_\sigma)$ совпадает с обычным.

Определение 4.3. *Пусть $V\in\mathbf{C}(Z^\nu)$, $\operatorname{supp}_{Z^\nu} F\subset V$ и $\tau\in X^{\Pi V}$. Условной статистической суммой, отвечающей потенциалу U*

(в объеме V, при условиях F (внешнее условие) и τ (граничное условие) назовем величину

$$Z_V(F|\tau) = Z_V(U|F, \tau) = \int\limits_{X^V} \exp[-H_U(x_V|F)]\, P_\tau^V(x_V)\, dx_V, \tag{4.5}$$

где P_τ^V определено как в (2.2).

Из замечания (4.4) понятно, что, если $\Lambda = V$, $\sigma \in X^{\Lambda^c}$, $F = I_\sigma$ и граничное условие $\tau = 0$, то

$$Z_V(U|I_\sigma, 0) = \Xi_V(U|\sigma) \tag{4.6}$$

в соответствии с определением (3.2).

Зафиксируем некоторый объем $\Lambda \in \mathbf{C}(\mathbf{Z}^\nu)$. Будет доказана следующая

Основная лемма. *Пусть $\varkappa > 0$ — фиксированное число, $P_0^\Lambda(\cdot)$ — плотность гауссовского распределения вероятностей с нулевыми граничными условиями) в объеме Λ (см. (2.2)) и T_V^Λ определено как в (2.11). Тогда существуют положительные константы α, C_1, C_2 и $\gamma < 1$, зависящие лишь от $\varkappa$ (а также от ν, k, r и Q) такие, что для всех потенциалов $\tilde{U}$, для которых выполнена оценка* (3.4) *с*

$$\gamma_t \leqslant \gamma < 1,\ t \in \mathbf{Z}^\nu \tag{4.7}$$

справедливы следующие утверждения:

I) *Пусть $W \subset V \subset \Lambda$, $\mathrm{supp}_{\mathbf{Z}^\nu} F \subset V$, $F \in \mathbf{F}$, $\sigma \in X^{\Lambda^c}$ и $\tau_V \in T_V^\Lambda$, $\tau_W \in T_W^\Lambda$ таковы, что ограничение конфигурации τ_W на множество $\partial W \cap \partial V$ совпадает с ограничением τ_V на это множество, а ее ограничение на множество $\partial W \cap V$ совпадает с ограничением на это множество конфигурации $\bar{x}_V(\tau_V)$. Тогда*

$$\left|\mathrm{Ln}\frac{Z_V(U|F, \tau_V)}{Z_W(U|I_\sigma F, \tau_W)}\right| \leqslant C_1 \sum_{t \in V \setminus W} \sum_{s \in V} \gamma_s e^{-\alpha|s-t|} \tag{4.8}$$

(где логарифм понимается в смысле главного значения).

II *Пусть $V \subset \Lambda$, $F_i \in \mathbf{F}$, $\mathrm{supp}_{\mathbf{Z}} F_i \subset V$, $i = 1, 2$, $\mathbf{L} \subset \mathbf{C}(V)$, причем для любых $A \in \mathbf{L}$, $x_A \in X^A$, $F_1(x_A) = F_2(x_A)$. Тогда для произвольного граничного условия $\tau \in T_V^\Lambda$*

$$|Z_V(U|F_1, \tau)/Z_V(U|F_2, \tau) - 1| \leqslant \Psi \exp(\Psi), \tag{4.9}$$

где

$$\Psi = 2 \sum_{B \in \mathbf{L}} \|U_B\|. \tag{4.10}$$

III) *Пусть $V \subset \Lambda$, $t \in \partial V \cap \Lambda$, $\mathrm{supp}_{\mathbf{Z}^\nu} F \subset V$ и τ^1, $\tau^2 \in T_V^\Lambda$ таковы, что $\tau_s^1 = \tau_s^2$ при $s \neq t$. Тогда*

$$\begin{aligned} &|Z_V(U|F, \tau^1)/Z_V(U|F, \tau^2) - 1| \leqslant \\ &\leqslant C_2 \sum_{s \in V} \gamma_s e^{-\alpha|s-t|} \exp(|\tau_t^1 - \tau_t^2|). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Сразу заметим, что из утверждения I) основной леммы следует справедливость теоремы 3.1, если положить $V \subset \Lambda$, $W = \varnothing$ (считаем $Z_{\varnothing} = 1$), $F = I_{\sigma}$, $\sigma \in X^{\Lambda^c}$ и учесть замечание (4.6) и определение множества T_V^{Λ}.

Техника доказательства основной леммы во многом повторяет технику, используемую в [5], в силу чего мы будем опускать несложные, но громоздкие детали доказательства.

Мы будем использовать индукцию по числу точек множества V, в связи с чем предполагается, что оценки (4.8), (4.9) и (4.11) выполнены при замене множества V на любое его подмножество для всех потенциалов U, удовлетворяющих оценке (3.4) с (4.7). Справедливость первого шага индукции легко проверяется непосредственным вычислением.

Относительно обозначений сделаем следующие замечания. В §§ 5, 6 для статистической суммы будем использовать первое из обозначений (4.5), поскольку будет ясно, о каком потенциале идет речь. В тех случаях, когда это не вызовет недоразумений, будем записывать $\bar{x}_t$ вместо $\bar{x}_t(\tau)$. В соответствии с замечанием к определению 4.2 будем использовать обозначение $U_A^F(x_{A \cap V})$ в случае, когда $\operatorname{supp}_{Z^\nu} F \subset V$. Под граничным для объема V' условием $\tau \in X^{V''}$, где $V'' \supset \partial V'$, будем понимать ограничение $\tau_{\partial V'}$ конфигурации τ на множество $\partial V'$. Через S мы будем обозначать сумму ряда

$$S_\alpha = \sum_{s \in Z^\nu} e^{-\alpha |s|}.$$

Наконец, будем использовать одно и то же обозначение $\|f\|$ для функций f различной природы, каждый раз понимая под этим $\|f\| = \sup |f|$, где верхняя грань берется по всем переменным параметрам, от которых зависит f.

§ 5. Вывод оценки (4.8)

Пусть сначала $|V \setminus W| = 1$, $V = W \cup \{t\}$, $\sigma = \sigma_t$, $(\tau_W)_t = \bar{x}_t$. По предположению индукции $Z_W(I_\sigma, F, \tau_W) \neq 0$. Ясно, что

$$Z_V(F, \tau_V) = \int\limits_X \exp\{-\sum_{A: A \cap V = \{t\}} U_A^F(x_t)\} Z_W(I_{x_t} F, \tau_V \cup x_t) P_{\tau_V}^{V, \{t\}}(x_t)\, dx_t, \tag{5.1}$$

где $P_{\tau_V}^{V, \{t\}}$ определяется в (2.5). Отсюда

$$\left|\frac{Z_V(F, \tau_V)}{Z_W(I_\sigma, F, \tau_W)} - 1\right| \leqslant \|\exp\{-\sum_{A: A \cap V = \{t\}} U_A^F(x_t)\} - 1\| +$$

$$+ \|\exp\{-\sum_{A: A \cap V = \{t\}} U_A^F(x_t)\}\| \left\|\frac{Z_W(I_{x_t} F, \tau_V \cup x_t)}{Z_W(I_{\bar{x}_t} F, \tau_V \cup \bar{x}_t)} - 1\right\| + \tag{5.2}$$

$$+\left|\frac{Z_W(I_{x_t}F,\ \tau_V\cup x_t)}{Z_W(I_{\sigma_t}F,\ \tau_V\cup x_t)}\right|\cdot\int\limits_X\left|\frac{Z_W(I_{\sigma_t}F,\ \tau_V\cup x_t)}{Z_W(I_{\sigma_t}F,\ \tau_W)}-1\right|P^{V,\{t\}}_{\tau_V}(x_t)\,dx_t\Big\}.$$

Первое слагаемое оценивается с помощью неравенства

$$|e^z-1|\leqslant|z|\,e^{|z|},\quad z\in C \tag{5.3}$$

и из условий (3.4) и (4.7)

$$\|\exp\{-\sum_{A:A\cap V=\{t\}}U^F_A(x_t)\}-1\|\leqslant e\,\gamma_t. \tag{5.4}$$

Далее, используя индуктивную оценку (4.9), а также (3.4) и (4.7), имеем для первого слагаемого в скобках

$$\|Z_W(I_{x_t}F,\ \tau_V\cup x_t)/Z_W(I_{\sigma_t}F,\ \tau_V\cup x_t)-1\|\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{A:A\cap V=\{t\}}\|U_A\|\exp\{2\sum_{A:A\cap V=\{t\}}\|U_A\|\}\leqslant 2\,e^2\gamma_t. \tag{5.5}$$

Наконец, согласно индуктивной оценке (4.11) и лемме 2.1 с учетом условия $(\tau_W)_t=\bar{x}_t$

$$\int\limits_X|Z_W(I_{\sigma_t}F,\ \tau_V\cup x_t)/Z_W(I_{\sigma_t}F,\ \tau_W)-1|\,P^{V,\{t\}}_{\tau_V}(x_t)\,dx_t\leqslant$$

$$\leqslant C_2\sum_{s\in W}\gamma_s\,e^{-\alpha|s-t|}\int\limits_X\exp(|x_t-\bar{x}_t|)\,P^{V,\{t\}}_{\tau_V}(x_t)\,dx_t\leqslant \tag{5.6}$$

$$\leqslant C_2\,e^{h_0}\sum_{s\in W}\gamma_s\,e^{-\alpha|s-t|},$$

где h_0 — константа, фигурирующая в (2.13). Теперь, считая γ достаточно малым, на основании оценок (5.4) — (5.6) получаем согласно представлению (5.2), что

$$|Z_V(F,\ \tau_V)/Z_W(I_{\sigma_t}F,\ \tau_W)-1|\leqslant e\,\gamma_t+$$

$$+(1+e\gamma_t)\,[2e^2\gamma_t+(1+2e^2\gamma_t)\,C_2\,e^{h_0}\sum_{s\in W}\gamma_s\,e^{-\alpha|s-t|}]\leqslant \tag{5.7}$$

$$\leqslant C^*\sum_{s\in V}\gamma_s\,e^{-\alpha|s-t|}$$

с некоторой константой $C^*=C^*(C_2,\ h_0)$.

В общем случае пусть $V\setminus W=\{t_1,\cdots,t_m\}$ и положим $V_0=V$, $F_0=F$, $\tau_0=\tau_V$ и $V_k=V\setminus\{t_1,\cdots,t_k\}$, $F_k=I_{\sigma_{t_k}}\cdots I_{\sigma_{t_1}}F$ и $\tau_k\in X^{\partial V_k}$ равным τ_V на множестве $\partial V_k\cap\partial V$ и равным τ_W (т. е. $\bar{x}_{\partial W\cap V}$ на множестве $\partial V_k\cap V$, $k=1,\cdots,m$). Тогда

$$Z_V(F,\ \tau_V)/Z_W(I_\sigma F,\ \tau_W)=\prod_{k=0}^{m-1}Z_{V_k}(F_k,\ \tau_k)/Z_{V_{k+1}}(F_{k+1},\ \tau_{k+1}). \tag{5.8}$$

Теперь используем свойство гауссовского поля, состоящее в том, что средние значения величин x_s, $s\in V_k$, задаваемые плотностями $P^{V_k}_{\tau_k}$ (см. (2.5)), снова равны $\bar{x}_s(\tau_V)$, и следовательно к каждому сомножителю в (5.8) применима оценка (5.7), так что m-кратное применение оценки (5.7) вместе с неравенством

$$|\mathrm{Ln}(1+z)| \leqslant \frac{3}{2}|z|, \text{ когда } |z| < \frac{1}{2} \tag{5.9}$$

(где логарифм понимается в смысле главного значения) приходим, полагая $C_1 = \frac{3}{2} C^*$, к оценке

$$\left|\mathrm{Ln}\frac{Z_V(F, \tau_V)}{Z_W(I_\tau F, \tau_W)}\right| \leqslant \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\left|\frac{Z_{V_k}(F_k, \tau_k)}{Z_{V_{k+1}}(F_{k+1}, \tau_{k+1})} - 1\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{t \in V \setminus W} \sum_{s \in V} \gamma_s e^{-\alpha|s-t|},$$

поскольку за счет выбора γ достаточно малым можно сделать правую часть в (5.7) меньше $1/2$.

§ 6. Вывод оценки (4.9)

Пусть $\overline{\mathrm{L}} = \{\overline{B} \subset V | \exists\, B \in \mathrm{L} : B \cap V = \overline{B}\}$. Пусть сначала $|\mathrm{L}| = 1$, $\mathrm{L} = \{\overline{B}\}$. Соотношение, которому в силу условия удовлетворяют отображения F_1 и F_2, позволяет записать для $i = 1, 2$

$$Z_V(F_i, \tau) = \int_{X^{\overline{B}}} \exp\Big\{-\sum_{B \in \mathrm{L}} U_B^{F_i}(x) -$$

$$- \sum_{A: A \cap V \subset \overline{B},\, A \notin \mathrm{L}} U_A^{F_2}(x)\Big\} Z_{V \setminus \overline{B}}(I_x F_2, \tau \cup x)\, P_\tau^{V, \overline{B}}(x)\, dx \tag{6.1}$$

(на протяжении всего § 6 мы будем обозначать через $x \in X^{\overline{B}}$ переменную конфигурацию и через $\bar{x}$ конфигурацию $\bar{x}_{\overline{B}}(\tau)$). Отсюда несложно получить, что

$$|Z_V(F_1, \tau)/Z_V(F_2, \tau) - 1| \leqslant \|Z_{V \setminus \overline{B}}(I_x F_2, \tau \cup x)/Z_V(F_2, \tau)\| \times$$

$$\times \Big\|\exp\Big\{-\sum_{\substack{A: A \cap V \subset \overline{B} \\ A \notin \mathrm{L}}} U_A^{F_2}(x)\Big\}\Big\| \Big[\sum_{i=1,2} \Big\|\exp\Big\{\sum_{B \in \mathrm{L}} U_B^{F_i}(x)\Big\} - 1\Big\|\Big] \times$$

$$\times \int_{X^{\overline{B}}} |Z_{V \setminus \overline{B}}(I_x F_2, \tau \cup x)/Z_{V \setminus \overline{B}}(I_x F_2, \tau \cup \bar{x})|\, P_\tau^{V, \overline{B}}(x)\, dx. \tag{6.2}$$

Первый сомножитель в (6.2) согласно индуктивной оценке (4.8) и условию (4.7) можно оценить как

$$\|Z_{V \setminus \overline{B}}(I_x F_2, \tau \cup x)/Z_V(F_2, \tau)\| \leqslant \exp\{C_1 S \gamma |\overline{B}|\}. \tag{6.3}$$

Что касается второго сомножителя, то на основании условий (3.4) и (4.7) путем несложного преобразования множества, по которому идет суммирование, можно получить, что

$$\left\| \exp\left\{-\sum_{\substack{A:A\cap V\subset \bar{B}\\ A\in L}} U_A^{F_2}(x)\right\}\right\| \leqslant \exp\{\gamma|\bar{B}|\}. \tag{6.4}$$

Для оценки третьего сомножителя воспользуемся неравенством (5.3), условиями (3.4) и (4.7), в результате чего, учитывая замечание к соотношению (4.2), будем иметь

$$\sum_{l=1,2} \left\| \exp\left\{-\sum_{B\in L} U_B^{F_l}(x)\right\} - 1\right\| \leqslant 2\sum_{B\in L} \|U_B\| e^{\gamma}. \tag{6.5}$$

Наконец, для оценки последнего сомножителя в (6.2) представим величину $|Z_{V\setminus\bar{B}}(I_x F_2, \tau\cup x)/Z_{V\setminus\bar{B}}(I_x F_2, \tau\cup\bar{x})|$ в виде произведения $|V\cap\partial(V\setminus\bar{B})|$ сомножителей, отличающихся лишь граничным условием в одной точке s, $s\in V\cap\partial(V\setminus\bar{B})$ и применяя к каждому из этих сомножителей индуктивную оценку (4.11), а затем лемму 2.1, придем к оценке

$$\int_{X^{\bar{B}}} |Z_{V\setminus\bar{B}}(I_x F_2, \tau\cup x)/Z_{V\setminus\bar{B}}(I_x F_2, \tau\cup\bar{x})| P_\tau^{V,\bar{B}}(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{X^{\bar{B}}} \prod_{s\in V\cap\partial(V\setminus\bar{B})} \left\{1 + C_2 \sum_{u\in V\setminus\bar{B}} \gamma_u e^{-\varkappa|u-s|} \exp(|x_s - \bar{x}_s|)\right\} P_\tau^{V,\bar{B}}(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant (1 + C_2 S\gamma e^{h_0})^{|V\cap\partial(V\setminus\bar{B})|} \leqslant \exp\{C_2 S\gamma|\bar{B}|\}, \tag{6.6}$$

где h_0—константа леммы 2.1, зависящая лишь от основного гауссовского поля.

Выберем теперь γ настолько малым, что $\gamma[(C_1 + C_2)S + 2] < \varkappa$. В таком случае, на основании оценок (6.3)—(6.6) можем заключить из (6.2), что

$$|Z_V(F_1, \tau)/Z_V(F_2, \tau) - 1| \leqslant 2\sum_{B\in L} \|U_B\| e^{\varkappa|B|} = \Psi, \tag{6.7}$$

где Ψ—величина, определенная в (4.10).

В общем случае, когда $\bar{L} = \{\bar{B}_1, \cdots, \bar{B}_N\}$, запишем

$$Z_V(F_1, \tau)/Z_V(F_2, \tau) = \prod_{j=0}^{N-1} (Z_V(F^{(j)}, \tau)/Z_V(F^{(j+1)}, \tau)), \tag{6.8}$$

где для $j = 0, 1, \cdots, N$

$$F^{(j)} = \begin{cases} F^2, \text{ если } B\in L \text{ и } B\cap V = \bar{B}_l \\ F_1 \text{ — в противном случае,} \end{cases}$$

так что применяя к каждому из сомножителей в (6.8) оценку (6.7) (представив предварительно соответствующий сомножитель в виде $r = 1 + (z - 1)$ и пользуясь общим неравенством (2.22), получаем, что

$$|Z_V(F_1, \tau)/Z_V(F_2, \tau) - 1| \leqslant \Psi \exp(\Psi),$$

что и требовалось.

§ 7. Вывод оценки (4.11)

Выберем $\alpha > 0$ таким образом, чтобы

$$\alpha < \bar{a} \tag{7.1}$$

(где $\bar{a}$—величина, фигурирующая в лемме 2.2). Пусть $l = l(\tau_t^1, \tau_t^2) > 0$ (τ_t^1, τ_t^2 — суть значения граничных условий τ^1, τ^2 в точке t) удовлетворяет условию (2.19), множества V_l, Γ_l определены как в (2.15) и $\sigma \in X^{V \setminus V_l}$ — некоторая фиксированная конфигурация. Легко видеть, что

$$|Z_V(U|F, \tau^1)\, Z_V(U|F, \tau^2) - 1| < |Z - 1| +$$
$$+ |Z|\, |Z_V(U|I_\sigma F, \tau^1)/Z_V(U|I_\sigma F, \tau^2) - 1|, \tag{7.2}$$

где

$$Z = \{Z_V(U|F, \tau^1)/Z_V(U|I_\sigma F, \tau^1)\}\, \{Z_V(U|I_\sigma F, \tau^2)/Z_V(U|F, \tau^2)\}.$$

Величину $|Z - 1|$ (а вместе с ней и $|Z|$) можно оценить при помощи индуктивной оценки (4.9) и простого неравенства

$$|z_1 z_2 - 1| \leqslant \frac{1}{2}\,[(1 + |z_2|)\,|z_1 - 1| + (1 + |z_1|)\,|z_2 - 1|],$$

справедливого для произвольных комплексных чисел z_1, z_2. Несложные вычисления с использованием условия (3.4) и определения (2.15) показывают, что при достаточно малом γ и большом l

$$|Z - 1| < 2 \sum_{A \in C(V \setminus V_l)} \|U_A\| \exp\{2 \sum_{A \in C(V \setminus V_l)} \|U_A\|\} \times$$
$$\times [2 + 2 \sum_{A \in C(V \setminus V_l)} \|U_A\| \exp\{2 \sum_{A \in C(V \setminus V_l)} \|U_A\|\}] \leqslant$$
$$\leqslant 4 \exp\{\alpha l + 5 \cdot 2^\nu \Gamma \gamma\} \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s\, e^{-\alpha |s - t|} \tag{7.3}$$

и кроме того

$$|Z| < 1 + 4 \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s \exp\{5 \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s\} \leqslant \exp\{9 \cdot (2l)^\nu \gamma\}. \tag{7.4}$$

Перейдем к оценке последнего сомножителя в (7.2). Прежде всего заметим, что

$$Z_V(U|I_\sigma F, \tau^1)/Z_V(U|I_\sigma F, \tau^2) = Z_V(\tilde{U}|I_\sigma F, \tau^1)/Z_V(\tilde{U}|I_\sigma F, \tau^2),$$

где потенциал $\tilde{U} = \{\tilde{U}_A(x_A),\ A \in C(Z^\nu),\ x_A \in X^A\}$ определен равенствами

$$\tilde{U}_A(x_A) = \begin{cases} U_A(x_A), & \text{если } A \in C(V_l) \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Это замечание позволяет заключить, что

$$\left|\frac{Z_V(U|I_0F,\ \tau^1)}{Z_V(U|I_0F,\ \tau^2)}-1\right|=\left|\frac{Z_V(\tilde{U}|I_0F,\ \tau^1)}{Z_V(\tilde{U}|I_0F,\ \tau^2)}-1\right|=$$

$$=|Z_{V_l}(\tilde{U}|I_0F,\ \tau^2\cup\bar{x}(\tau^2))/Z_V(U|I_0F,\ \tau^2)|\times \tag{7.5}$$

$$\times\left|\int_{X^{\Gamma_l}}\left\{\frac{Z_{V_l}(\tilde{U}|I_0F,\ \tau^2\cup x)}{Z_{V_l}(\tilde{U}|I_0F,\ \tau^2\cup\bar{x}(\tau^2))}\right\}[P_l^1(x)-P_l^2(x)]\,dx\right|,$$

где, как и в лемме 2.2, плотности P_l^i, $i=1,\ 2$ — суть проекции $P_i^{V,\ \Gamma_l}$ плотностей $P_{\tau_i}^V$ на X^{Γ_l}. Для оценки первого из сомножителей в (7.5) воспользуемся индуктивной оценкой (4.9) и условием (4.7), в результате чего будем иметь

$$\left|Z_{V_l}(\tilde{U}|I_0F,\ \tau^2\cup\bar{x}(\tau^2))/Z_V(U|I_0F,\ \tau^2)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\exp\{C_1\sum_{s\in V\setminus V_l}\ \sum_{u\in V}\gamma_u e^{-\varkappa|u-s|}\}\leqslant\exp\{C_1 S(2l)^\nu\gamma\}. \tag{7.6}$$

Осталось оценить интеграл в (7.5). Поскольку граничные условия $(\tau^2\cup x)_{\partial V_l}$ и $(\tau^2\cup\bar{x}(\tau^2))_{\partial V_l}$ отличаются лишь на множестве Γ_l, то подынтегральное выражение в (7.5) можно представить в виде произведения $|\Gamma_l|$ отношений статистических сумм, отличающихся лишь граничным условием в одной точке (эти точки пробегают множество Γ_l) и поэтому $|\Gamma_l|$ — кратное применение индуктивной оценки (4.11) вместе с неравенством

$$\left|\prod_{i=1}^{N}(1+z_i)-1\right|\leqslant\prod_{i=1}^{N}(1+|z_i|)-1;\quad z_i\in\mathbf{C},\ i=1,\cdots,N$$

приводит к оценке

$$\left|\int_{X^{\Gamma_l}}\frac{Z_{V_l}(\tilde{U}|I_0F,\ \tau^2\cup x)}{Z_{V_l}(\tilde{U}|I_0F,\ \tau^2\cup\bar{x}(\tau^2))}[P_l^1(x)-P_l^2(x)]\,dx\right|=$$

$$=\left|\int_{X^{\Gamma_l}}\left\{\frac{Z_{V_l}(\tilde{U}|I_0F,\ \tau^2\cup x)}{Z_{V_l}(\tilde{U}|I_0F,\ \tau^2\cup\bar{x}(\tau^2))}-1\right\}[P_l^1(x)-P_l^2(x)]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{X^{\Gamma_l}}\left[\prod_{s\in\Gamma_l}\left\{1+C_2\sum_{u\in V_l}\gamma_u e^{-\varkappa|s-u|}\exp(|x_s-\bar{x}_s(\tau^2)|)\right\}-1\right]\times$$

$$\times|P_l^1(x)-P_l^2(x)|\,dx=\int_{X^{\Gamma_l}}(\varphi_l(x)-1)\,|P_l^1(x)-P_l^2(x)|\,dx, \tag{7.7}$$

где мы использовали функцию $\varphi_l(x)$, введенную в лемме 2.2 (см. (2.16)), взяв в качестве чисел α_s, $s \in \Gamma_l$ числа

$$\alpha_s = C_2 \sum_{u \in V_l} \gamma_u e^{-\alpha|s-u|}. \tag{7.8}$$

Используя (7.7) и обозначения (2.16) и (2.17), можем заключить, что

$$\left| \int_{X^{\Gamma_l}} \frac{Z_{V_l}(\tilde{U}|I_l F, \tau^2 \cup x)}{Z_{V_l}(\tilde{U}|I_l F, \tau^2 \cup \bar{x}(\tau^2))} [P_l^1(x) - P_l^2(x)]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant I_l \leqslant J_l^1 + J_l^2. \tag{7.9}$$

В силу этого на основании (7.2) — (7.6) и (7.8) заключаем, что при удовлетворении условий леммы 2.2 для достаточно малых γ и больших l справедливы следующие две оценки (см. (2.20), (2.21)):

$$|Z_V(U|F, \tau^1)/Z_V(U|F, \tau^2) - 1| \leqslant$$

$$\leqslant 4 \exp\{\alpha l + 5(2l)^\nu \gamma\} \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s e^{-\alpha|s-t|} +$$

$$+ \exp\{9 \cdot (2l)^\nu \gamma + C_1 S(2l)^\nu \gamma\} [J_l^1 + J_l^2] \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\frac{l^\nu}{2}\right\} \left| \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s e^{-\alpha|s-t|} + \frac{1}{|\Gamma_l|} \sum_{s \in \Gamma_l} \alpha_s \exp\{l^\nu\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\frac{l^\nu}{2}\right\} \left| \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s e^{-\alpha|s-t|} + C_2 \sum_{u \in V_l} \gamma_u e^{-\alpha|s-t|} \times\right.$$

$$\left. \times \exp\{\alpha l + l^\nu\} \right| \leqslant C_3 \exp\{2l^\nu\} \sum_{s \in V} \gamma_s e^{-\alpha|s-t|} \tag{7.10}$$

и при выполнении условия $\alpha_s \leqslant \alpha(l)$

$$|Z_V(U|F, \tau^1)/Z_V(U|F, \tau^2) - 1| \leqslant$$

$$\leqslant 4 \exp\{\alpha l + 5(2l)^\nu \gamma\} \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s e^{-\alpha|s-t|} +$$

$$+ \exp\{9(2l)^\nu \gamma + C_1 S(2l)^\nu \gamma\} I_l \leqslant \exp\{(9 + C_1 S)(2l)^\nu \gamma\}.$$

$$\cdot \left| 4 \exp\{\alpha l\} \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s e^{-\alpha|s-t|} + \frac{1}{|\Gamma_l|} e^{-\bar{\alpha} l} \sum_{s \in \Gamma_l} \alpha_s \right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{(9 + C_1 S)(2l)^\nu \gamma\} [4 \exp\{\alpha l\} \sum_{s \in V \setminus V_l} \gamma_s e^{-\alpha|s-t|} +$$

$$+ C_2 e^{-(\bar{\alpha}-\alpha) l} \sum_{s \in V_l} \gamma_s e^{-\alpha|s-t|}]. \tag{7.11}$$

Теперь применение леммы 2.2 завершает доказательство. В самом деле, выберем некоторое H, при котором справедливо утверждение леммы 2.2. Поскольку функция $f(x) = (2H \ln x)^\nu$ растет медленнее, чем x, то существует наименьшее x_0 такое, что

$$2(1 + H \ln x)^\nu < x \text{ при } x \geqslant x_0 \tag{7.12}$$

и число $l_0 = H \ln x_0$ — целое. Определим теперь функцию $l = l(\tau_l^1, \tau_l^2)$, как

$$l(\tau_l^1, \tau_l^2) = \begin{cases} [H \ln (|\tau_l^1 - \tau_l^2|)] + 1, & \text{если } |\tau_l^1 - \tau_l^2| \geqslant x_0 \\ l_0 & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{7.13}$$

(здесь $[\cdot]$ — целая часть числа). Ясно, что такое определение делает возможным применение леммы 2.2. При $|\tau_l^1 - \tau_l^2| \geqslant x_0$ воспользуемся оценкой (7.10), что сразу же приводит к оценке (4.11) (поскольку из (7.12) и (7.13) ясно, что при $|\tau_l^1 - \tau_l^2| > x_0$ $2[l(\tau_l^1, \tau_l^2)]^\nu \leqslant |\tau_l^1 - \tau_l^2|$.

В случае же, когда $|\tau_l^1 - \tau_l^2| < x_0$, воспользуемся оценкой (7.11). Полагая $C_2 = 8 \cdot \exp[\alpha l_0]$ и считая γ настолько малым, что $\exp[(9 + C_1 S)(2l_0)^\nu \gamma] < 2$, вновь приходим к оценке (4.11), что и завершает доказательство основной леммы.

В заключение автор благодарит Р. Л. Добрушина за постановку задачи и постоянное внимание.

ВЦ АН Армянской ССР

Поступила 17.VI.1987

Մ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Գաուսյան գիբսյան դաշտերի ոչ-ֆինիտ գրգռումների մասին (*ամփոփում*)։

Աշխատանքում դիտարկվում են ν-չափանի ամբողջաթիվ ցանցի վրա որոշված պատահական գաուսյան գիբսյան դաշտերի ոչ ֆինիտ գրգռումները· կոմպլեքսարժեք

$$U = \{U_A(x_A),\ x_A \in (\mathrm{R}^k)^A,\ \mathrm{card}(A) < \infty\}$$

պոտենցիալի միջոցով։ Ցույց է տրվում, որ եթե U *գրգռող պոտենցիալը բավարարում է*

$$\sum_{A: t \in A} |U_A| e^{\varkappa |A|} < \gamma_t < \gamma$$

պայմանին (ինչ որ $\varkappa > 0$ *և* γ*-ի համար), ապա վիճակագրական գումարը հավասար չէ 0-ի։ Այստեղից հետևում է ազատ էներգիայի գոյությունը։ Բացի այդ, եթե բոլոր* $U_A(x_A)$, $A \subset Z^\nu$, $x_A \in (\mathrm{R}^k)^A$ *անալիտիկորեն կախված են* $z_1, \ldots, z_n$ *պարամետրերից վերջիններիս փոփոխման* $D \subset \mathrm{C}^n$ *տիրույթում, (*D*-ն պոլիշրջան է), ապա նույն հատկությամբ օժտված է նաև ազատ էներգիան։*

M. H. MARTIROSIAN. *On nonfinite perturbations of the gaussian Gibbsian fields* (summary)

We consider in this paper nonfinite perturbations of the random gaussian Gibbsian field by the complex valued potential

$$U = \{U_A(x_A),\ x_A \in (\mathrm{R}^k)^A,\ \mathrm{card}(A) < \infty\}.$$

It is proved that if the perturbative potential U satisfies the condition

$$\sum_{A: t \in A} |U_A(x_A)| e^{\varkappa |A|} < \gamma_t < \gamma$$

(for some $\varkappa > 0$ and γ), then the partition function does not vanish and the existence of the free energy follows. Moreover, if all $U_A(x_A)$, $A \subset Z^\nu$, $x_A \in (\mathrm{R}^k)^A$ depend analytically on $z_1, \cdots, z_n$ in the region $D \subset \mathrm{C}^n$, (D is a polydisk), then the same property is true for the free energy also.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Малышев, Р. А. Минлос.* Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений, М., «Наука», 1985.
2. *Р. Л. Добрушин.* Аналитичность корреляционных функций в одномерных классических системах со степенным убыванием потенциала, Матем. сб., 94 (136), № 1 (5), 1974, 16—48.
3. *Р. Л. Добрушин, С. Б. Шлосман.* Вполне аналитические гиббсовские поля, Препринт, М., ИППИ АН СССР, 1986.
4. *Р. Л. Добрушин.* Новый подход к исследованию гиббсовских возмущений гауссовских полей, Препринт, М., ИППИ АН СССР, 1987.
5. *Р. Л. Добрушин, М. Р. Мартиросян.* Нефинитные возмущения гиббсовских полей, ТМФ, 74, № 1, 1988, 16—28.
6. *R. L. Dobrushin, M. Zahradnik.* Phase diagrams for the continuous spin models, Extension of Pirogov—Sinai theory, in: Mathematical Problems of Statistical Mechanics and Dynamics, Dodrecht, Netherlands, D. Reidel Publ. Comp., 1986.