ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIV, № 5, 1989 Математика

УДК 517.946

С. Ю. НАЗАРОВ

О НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ДАРБУ

В области $D=\{(x, y): 0<x<y<1\}$ рассмотрим уравнение Эйлера—Дарбу

$$u_{xy}-\frac{\beta}{x-y}u_x+\frac{\alpha}{x-y}u_y=0. \tag{1}$$

1°. Пусть $\beta>0$, $\alpha>0$, $\alpha+\beta<1$.

Задача 1. Найти решение $u(x, y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\cup\{(x, y): x=y, 0<x<1\})\cap C^2(D)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{gathered}I_{0x}^{a,\, b,\, -a+\beta-1}u(0, x)+A(x)\, I_{0x}^{c,\, b,\, \alpha+\beta-c-1}u(x, x)+\\+B(x)\, u(x, x)=f(x),\ 0<x<1,\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}c_0(x)\left[(y-x)^{\alpha+\beta}(u_y-u_x)\right]\Big|_{y=x}+b_0(x)\, u(x, x)+\\+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\, D_{0x}^{\alpha_i}u(x, x)+\sum_{j=1}^{m}c_j(x)\, D_{0x}^{\gamma_j}\left[(y-x)^{\alpha+\beta}(u_y-u_x)\right]\Big|_{y=x}=\\=f_1(x),\ 0<x<1.\end{gathered} \tag{3}$$

Задача 2. Найти решение $u(x, y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\cup\{(x, y): x=y, 0<x<1\})\cap C^2(D)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{gathered}J_{x1}^{a,\, b,\, -a+\beta-1}u(x, 1)+A(x)\, J_{x1}^{c,\, b,\, \alpha+\beta-c}u(x, x)+\\+B(x)\, u(x, x)=f(x),\ 0<x<1,\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}c_0(x)\left[(y-x)^{\alpha+\beta}(u_y-u_x)\right]\Big|_{y=x}+b_0(x)\, u(x, x)+\\+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\, D_{x1}^{\alpha_i}u(x, x)+\sum_{j=1}^{m}c_j(x)\, D_{x1}^{\gamma_j}\left[(y-x)^{\alpha+\beta}(u_y-u_x)\right]\Big|_{y=x}=\\=f_1(x),\ 0<x<1.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $A(x)$, $B(x)$, $b_0(x)$, $b_i(x)$, $c_0(x)$, $c_j(x)$, $f(x)$, $f_1(x)$ — заданные функции, принадлежащие классу $C^1(\overline{J})\cap C^3(J)$; J — единичный интервал $0<x<1$, a, b, c, α_i, γ_j — заданные действительные числа, причем $|\alpha_i|<1$, $|\gamma_j|<1$, $-1<c<0$, $1-\alpha-a+c>0$, $\beta-a-b>0$, $1-\beta+a>0$, $1-\alpha-\beta+c>0$, $\alpha+a>0$, $1-\alpha-\beta+a>0$, $1>\alpha+a+b>0$, $i=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, m}$, D_{ax}^{μ}, D_{xb}^{μ} — операторы дробного, в смысле Римана—Лиувилля, интегро-дифференцирования, выражаемые формулой [1, 2]

$$D_{ax}^{\mu} f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\mu)} \displaystyle\int_a^x \dfrac{f(t)\,dt}{|x-t|^{\mu+1}}, & \mu < 0, \\ f(x), & \mu = 0, \\ \operatorname{sign}(x-a) \dfrac{d^{[\mu]+1}}{dx^{[\mu]+1}} D_{ax}^{\mu-[\mu]-1} f(x), & \mu > 0, \end{cases}$$

где $[\mu]$ — целая часть μ, $[\mu] \leqslant \mu < [\mu]+1$, $I_{0x}^{\alpha,\beta,\gamma}$, $J_{x1}^{\alpha,\beta,\gamma}$ — операторы дробного интегро-дифференцирования в смысле М. Сайго [3]

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\gamma} f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\gamma, \alpha, \dfrac{x-t}{x}\right) f(t)\,dt, & \alpha > 0, \\ \dfrac{d^n}{dx^n} I_{0x}^{\alpha+n, \beta-n, \gamma-n} f(x), & 0 < \alpha+n < 1, \end{cases}$$

$$J_{x1}^{\alpha,\beta,\gamma} f(x) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\gamma, \alpha, -\dfrac{x-t}{1-x}\right) f(t)\,dt, & \alpha > 0, \\ (-1)^n \dfrac{d^n}{dx^n} J_{x1}^{\alpha+n, \beta-n, \gamma-n} f(x), & 0 < \alpha+n < 1. \end{cases}$$

Без ограничения общности положим

$$\begin{aligned} &-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p < 0 < \alpha_{p+1} < \dots < \alpha_n < 1, \\ &-1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_l < 0 < \gamma_{l+1} < \dots < \gamma_m < 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Для простоты рассуждений будем рассматривать только задачу 1. Решение будем искать в классе функций таких, что функции

$$u(x, x) = \tau(x), \quad (y-x)^{\alpha+\beta} (u_y - u_x)|_{y=x} = \nu(x)$$

принадлежит пространству Гельдера с показателем $k (1 > k > \max \times \times \{\alpha_n, \gamma_m, -c, -a\})$.

Теорема 1. *Пусть* $A(x) \neq 0$, $c_m(x) \neq 0$ $\forall x \in \bar{J}$, $\gamma_m > \alpha_n$, $-c \geqslant b \geqslant 0$. *Тогда задача 1 разрешима и притом единственным образом.*

Доказательство. Преобразуем краевое условие (3). Действуя на обе части (3) оператором $D_{0x}^{-\gamma_m}$ и учитывая

$$D_{0x}^{-\mu} D_{0x}^{\mu} f = D_{0x}^{\mu} D_{0x}^{-\mu} = f$$

после некоторых преобразований получим

$$\nu(x) + \int_0^x K(x, t)\,\nu(t)\,dt = D_{0x}^{-\gamma_m} \frac{f_1(x)}{c_m(x)} - \int_0^x K_1(x, t)\,\tau(t)\,dt, \tag{7}$$

где

$$K(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma_m)} \left\{ (x-t)^{\gamma_m - 1} \frac{c_0(t)}{c_m(t)} + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{\Gamma(-\gamma_j)} (x-t)^{\gamma_m - \gamma_j - 1} \int_0^1 z^{\gamma_m - 1} (1-z)^{-\gamma_j - 1} \frac{c_j(x-(x-t)z)}{c_m(x-(x-t)z)} dz +$$

$$+ \sum_{k=l+1}^{m} \frac{1}{\Gamma(1-\gamma_k)} \Big[(\gamma_m - \gamma_k)(x-t)^{\gamma_m - \gamma_k - 1} \times$$

$$\times \int_0^1 z^{\gamma_m - 1} (1-z)^{-\gamma_k} \frac{c_k(x-(x-t)z)}{c_m(x-(x-t)z)} dz + (x-t)^{\gamma_m - \gamma_k} \times$$

$$\left. \times \int_0^1 z^{\gamma_m - 1} (1-z)^{-\gamma_k} \frac{d}{dt} \left[\frac{c_k(x-(x-t)z)}{c_m(x-(x-t)z)} \right] dz \Big] \right\},$$

$$K_1(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma_m)} \left\{ (x-t)^{\gamma_m - 1} \frac{b_0(t)}{c_m(t)} + \right.$$

$$+ \sum_{l=1}^{p} \frac{1}{\Gamma(-\alpha_l)} (x-t)^{\gamma_m - \alpha_l - 1} \int_0^1 z^{\gamma_m - 1} (1-z)^{-\alpha_l - 1} \frac{b_l(x-(x-t)z)}{c_m(x-(x-t)z)} dz +$$

$$+ \sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_k)} \Big[(x-t)^{\gamma_m - \alpha_k - 1} \int_0^1 z^{\gamma_m - 1} (1-z)^{-\alpha_k} \frac{b_k(x-(x-t)z)}{c_m(x-(x-t)z)} dz \times$$

$$\left. \times (\gamma_m - \alpha_k) + (x-t)^{\gamma_m - \alpha_k} \int_0^1 z^{\gamma_m - 1} (1-z)^{-\alpha_k} \frac{d}{dt} \left[\frac{b_k(x-(x-t)z)}{c_m(x-(x-t)z)} \right] dz \Big] \right\}.$$

Из представлений видно, что $K(x, t)$ и $K_1(x, t)$ непрерывны в квадрате $0 \leqslant x,\ t \leqslant 1$ при $x \neq t$, а при $x = t$ могут обращаться в бесконечность порядка не больше $-\gamma_m + \gamma_{m-1} + 1, -\gamma_m + \alpha_n + 1$, соответственно. Кроме того, из условий задачи 1 и свойств операторов дробного интегро-дифференцирования следует, что

$$D_{0x}^{-\gamma_m} \frac{f_1(x)}{c_m(x)} \in C^1(\bar{J}) \cap C^3(J).$$

Соотношение (7) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно неизвестной функции $\nu(x)$. Разрешая его по известной схеме (см., напр., [4, с. 127]), будем иметь

$$\nu(x) + \int_0^x K^*(x, t)\,\tau(t)\,dt = \Phi(x). \tag{8}$$

где

$$K^*(x, t) = K_1(x, t) + \int_t^x R(x, y) K(y, t)\, dy,$$

$$\Phi(x) = D_{0x}^{-\gamma m} \frac{f_1(x)}{c_m(x)} + \int_0^x R(x, t) D_{0t}^{-\gamma m} \frac{f_1(t)}{c_m(t)}\, dt,$$

$R(x, t)$ — резольвента ядра $K(x, t)$.

Рассмотрим теперь (2). Пользуясь свойствами функции Римана уравнения (1) можно показать, что любое решение задачи 1, если оно существует, представимо в виде (см. [3])

$$u(x, y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \tau[x + (y-x)t]\, t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}\, dt +$$
$$+ \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} (y-x)^{1-\alpha-\beta} \int_0^1 \nu[x + (y-x)t]\, t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}\, dt. \qquad (9)$$

Из (9) с учетом формулы $I_{ox}^{\alpha, \beta, \eta} I_{ox}^{\gamma, \delta, \alpha+\eta} f = I_{ox}^{\alpha+\gamma, \beta+\delta, \eta} f$, условие (2) можно записать в виде

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} I_{ox}^{\alpha+a, b, -a+\beta-1} \tau(x) + A(x) I_{ox}^{c, b, -1+\alpha+\beta-c} \tau(x) +$$
$$+ B(x)\tau(x) = f(x) - \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\alpha)} I_{ox}^{a+1-\beta, b+\alpha+\beta-1, -a+\beta-1} \nu(x). \qquad (10)$$

Разделив обе части (10) на $A(x)$ и подействовав оператором $I_{ox}^{-c, -b, -1+\beta+\alpha}$, применяя формулу [3]

$$[I_{ox}^{\alpha, \beta, \eta} f]^{-1} = I_{ox}^{-\alpha, -\beta, \alpha+\eta} f$$

запишем

$$\tau(x) + \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} I_{ox}^{-c, -b, -1+\alpha+\beta} \frac{1}{A(x)} I_{ox}^{\alpha+a, b, -a+\beta-1} \tau(x) +$$
$$+ I_{ox}^{-c, -b, -1+\alpha+\beta} \frac{B(x)}{A(x)} \tau(x) = I_{ox}^{-c, -b, -1+\alpha+\beta} \frac{f(x)}{A(x)} -$$
$$- \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\alpha)} I_{ox}^{-c, -b, -1+\alpha+\beta} \frac{1}{A(x)} I_{ox}^{a+1-\beta, b+\alpha+\beta-1, -a+\beta-1} \nu(x)$$

или, после некоторых преобразований

$$\tau(x) + \int_0^x K_1^*(x, t)\tau(t)\, dt = f_2(x) - \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x K_2(x, t)\nu(t)\, dt, \qquad (11)$$

где

$$f_2(x) = I_{ox}^{-c, -b, -1+\alpha+\beta} \frac{f(x)}{A(x)},$$

$$K_1^*(x,t)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\;x^{1-\alpha-\beta+c}}{\Gamma(\beta)\Gamma(-c)\Gamma(\alpha+a)}\,t^{\beta-a-b-1}\int\limits_t^x\frac{y^b}{A(y)}(x-y)^{-c-1}\times$$

$$\times(y-t)^{\alpha+a-1}F\left(b,c+\alpha+\beta-1,-c,\frac{x-y}{x}\right)F\left(-b,\alpha+\beta-1,\alpha+a,\frac{y-t}{y}\right)dy+$$

$$+\frac{x^{1-\alpha-\beta+c}}{\Gamma(-c)}(x-t)^{-c-1}\,t^{\alpha+\beta+b-1}\,\frac{B(t)}{A(t)}F\left(b,-c+\alpha+\beta-1,-c,\frac{x-t}{x}\right),$$

$$K_2(x,t)=\frac{x^{1-\alpha-\beta+c}}{\Gamma(-c)\Gamma(1-\beta+\alpha)}\,t^{-\alpha-a-\beta}\int\limits_t^x\frac{1}{A(y)}(x-y)^{-c-1}\times$$

$$\times(y-t)^{a-\beta}\,y^{\alpha+\beta+b-1}F\left(b,-c+\alpha+\beta-1,-c,\frac{x-y}{x}\right)dy.$$

Можно показать, что ядра $K_1^*(x,t)$ и $K_2(x,t)$ допускают оценки

$$K_1^*(x,t)=(x-t)^{-\lambda}O(1),\quad 0<\lambda<1,$$

$$K_2(x,t)=(x-t)^{-\lambda_1}O(1),\quad 0<\lambda_1<1.$$

Исключая $\nu(x)$ из (11) посредством (8) находим

$$\tau(x)+\int\limits_0^x K_2^*(x,t)\,\tau(t)\,dt=\Phi_1(x), \tag{12}$$

где

$$K_2^*(x,t)=K_1^*(x,t)-\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_t^x K_2(x,y)\,K^*(y,t)\,dy,$$

$$\Phi_1(x)=f_2(x)-\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x \Phi(t)\,K_2(x,t)\,dt.$$

Пользуясь результатами работы [5] нетрудно убедиться, что

$$\Phi_1(x)\in C(\bar J)\cap C^2(J).$$

Таким образом, задача 1 эквивалентно редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое разрешимо безусловно и однозначно в классе $C(\bar J)\cap C^2(J)$, а следовательно и функция $\nu(x)$, определяемая из (8), принадлежит требуемому классу.

Единственное решение задачи 1 дается формулой (9). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $A(x)\equiv 0$, $B(x)\neq 0$. $c_m(x)\neq 0$ $\forall x\in\bar J$ $\gamma_m>\alpha_n$, $b\leqslant 0$. *Тогда задача 1 имеет и притом единственное решение.*

Доказательство. В этом случае из (10) сразу же имеем

$$\tau(x)+\frac{x^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha+a)B(x)}\int\limits_0^x t^{-1+\beta-a-b}(x-t)^{\alpha+a-1}\times$$

$$\times F\left(-b,\ \alpha+\beta-1,\ \alpha+a,\ \frac{x-t}{x}\right)\tau(t)\,dt=$$

$$=\frac{f(x)}{B(x)}-\frac{1}{\Gamma(1-\beta+a)B(x)}\int\limits_0^x (x-t)^{-a-\beta}\,t^{-\alpha-a-b}\,\nu(t)\,dt.$$

Так же как и в теореме 1, подставляя в полученное выражение значение $\nu(x)$ из (8), после элементарных выкладок придем к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно функции $\tau(x)$, которое разрешимо безусловно и однозначно в требуемом $(C(\overline{J})\cap C^2(J))$ классе функций.

Единственное решение задачи 1 будет задаваться формулой (9).

Теорема доказана.

2° Пусть $\beta=\dfrac{1-a}{4}$, $\alpha=\dfrac{1+a}{4}$, $a\equiv\mathrm{const}>0$. В этом случае уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$y^2u_{xx}-u_{yy}+au_x=0. \tag{13}$$

Область D преобразуется в область Ω, ограниченную отрезком $AB=\{(x,y):y=0,\ 0<x<1\}$ и характеристиками

$$AC:\xi=x-\frac{1}{2}y^2=0,\quad BC:\eta=x+\frac{1}{2}y^2=1$$

уравнения (13), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$.

Задача 3. Найти регулярное в области Ω и непрерывное в замыкании $\overline{\Omega}$, за исключением быть может точек A и B, решение уравнения (13), удовлетворяющее краевым условиям

$$u[\theta_1(x)]=\varphi(x),\ x\in\overline{J}, \tag{14}$$

$$a_0(x)u_y(x,0)+b_0(x)u_x(x,0)+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)D_{0x}^{\alpha_i}\omega_i^0(x)u(x,0)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}b_j(x)D_{x1}^{\gamma_j}\omega_j^1(x)u(x,0)=\Psi_1(x),\ x\in J, \tag{15}$$

где $\theta_1(x)$ — аффикс точки пересечения характеристики уравнения (13) выходящей из точки $x\in\overline{J}$, с характеристикой BC, $a_i(x)$, $b_j(x)$, $\varphi(x)$ $\psi_1(x)$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $a_{n+1}(x)$, $\omega_i^0(x)$, $\omega_j^1(x)$ — заданные действительные функции, непрерывные в замыкании множества их определения, α_i, γ_j — заданные действительные числа, удовлетворяющие (6), $i=\overline{1,n}$ $j=\overline{1,m}$.

Согласно [6, 7] любое решение задачи 3, если оно существует представимо в виде

$$u(x,y)=(1-\xi)^{\beta}(\eta-\xi)^{-\beta}\varphi(\xi)-\eta^{-\beta}(1-\xi)^{-\beta}F(\alpha,\beta,1,z_1)\varphi(0)-$$

$$-\beta(1-\alpha)(1-\eta)(1-\xi)^{-\alpha}\int\limits_0^{\xi}\frac{F(\alpha,\beta+1,2,z_2)\varphi(t)}{\sqrt{1-t}\,(\eta-t)^{\beta-1}}\,dt+$$

$$+\left(\frac{\eta-\xi}{\eta}\right)^{-\alpha}\psi(\eta)+\beta(1-\beta)\xi\eta^{-\beta}\int_{1}^{\eta}\frac{F(\alpha+1,\ \beta,\ 2,\ z_3)}{\sqrt{t}\ (t-\xi)^{\alpha+1}}\,dt, \tag{16}$$

где

$$z_1=\frac{\xi(1-\eta)}{\eta(1-\xi)},\quad z_2=\frac{(1-\eta)(\xi-t)}{(1-\xi)\ (\eta-t)},\quad z_3=\frac{\xi(t-\eta)}{\eta(t-\xi)},$$

$$\varphi(x)\in C(0\leqslant x<1)\cap C^2(J),\ \psi(x)\in C(0<x\leqslant 1)\cap C^2(J).$$

Теорема 3. *Задача 3 разрешима и притом единственным образом, если выполняется одно из следующих двух условий:*

1. $$\alpha=4k+3,\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ a_0(x)\neq 0\ \forall x\in\bar{J},$$
$$a_0(x),\ a_i(x),\ a_{n+1}(x),\ \omega_i^0(x),\ b_0(x),\ b_j(x),$$
$$\omega_j^1(x),\ \psi_1(x)\in C^{k+3}(\bar{J}),\ \varphi(x)\in C^{2k+4}(\bar{J})\cap C^{2k+5}(J),$$
$$i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}.$$

2. $$\alpha=4k+1,\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ a_i(x)\equiv 0,$$
$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}\varphi(x)\in C^{2k+3}(\bar{J})\cap C^{2k+1}(J),\ a_0(x),\ a_{n+1}(x),$$
$$b_0(x),\ b_j(x),\ \omega_j^1(x),\psi_1(x)\in C^{k+1}(\bar{J})\cap C^{k+3}(J),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$$

и $b_0(x)\neq 0\ \forall x\in\bar{J}$ *либо* $b_0(x)\equiv 0$ *и* $\omega_m^1(x)\neq 0,\ b_m(x)\neq 0\ \forall x\in\bar{J}$.

Доказательство. Предположим, что в условии 1, теоремы $\alpha=3$ и существует решение задачи. Тогда из [6]

$$u(x,\ 0)=\varphi(x)+2(1-x)\varphi'(x),\ x\in J,$$

$$u_y(x,\ 0)=x^{-\frac{1}{2}}[\varphi(0)+2(1-x)\varphi'(0)]-x^{-\frac{1}{2}}\psi(x)+$$
$$+2(1-x)\int_0^x(x-t)^{-\frac{1}{2}}\varphi''(t)\,dt,\ x\in J.$$

Подставляя эти выражения в краевое условие (15), получим искомую функцию $\psi(x)$:

$$\psi(x)=\frac{x^{1/2}}{a_0(x)}\Big\{b_0(x)\,[2(1-x)\varphi''(x)-\varphi'(x)]+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)D_{0x}^{\alpha_i}\omega_i^0(x)\,[\varphi(x)+2(1-x)\varphi'(x)]+ \tag{17}$$
$$+\sum_{j=1}^{m}b_j(x)D_{x1}^{l_j}\omega_j^1(x)\,[\varphi(x)+2(1-x)\varphi'(x)]-$$
$$-\psi_1(x)\Big\}-\varphi(0)-2(1-x)\varphi'(0)-2(1-x)^{\frac{1}{2}}\int_0^x(x-t)^{-\frac{1}{2}}\varphi''(t)\,dt.$$

Пусть теперь $a=4k+3$, $k=1, 2, \cdots$. Из [6] имеем

$$u(x, 0)=\varphi(x)+\sum_{r=1}^{k+1}\frac{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}-r\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}(-1)^{r+1}(k+1)\times$$

$$\times F(-r+1, 2+k, 2, 1)(1-x)^r\varphi^{(r)}(x), \quad x\in J,$$

$$u_y(x, 0)=x^{-k-\frac{3}{2}}(1-x)^k F\left(-k, k+\frac{3}{2}, 1, 1\right)\varphi(0)+$$

$$+(k+1)\left(k+\frac{3}{2}\right)F\left(-k, k+\frac{5}{2}, 2, 1\right)(1-x)^{k+1}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{k+2}\frac{(-1)^r\varphi^{(r)}(x)\,x^{r-k-\frac{3}{2}}}{r!\left(r-k-\frac{3}{2}\right)}+\frac{(-1)^{k+1}}{(k+2)!}(k+1)\left(k+\frac{3}{2}\right)\times$$

$$\times F\left(-k, k+\frac{5}{2}, 2, 1\right)(1-x)^{k+1}\int_0^x(x-t)^{1/2}\,dt\int_0^1\varphi^{(k+3)}\times$$

$$\times(t+(x-t)s)\,s^{k+2}\,ds-k(k+1)\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(-k+\frac{1}{2}\right)F\left(-k+1,\right.$$

$$\left.k+\frac{3}{2}, 3, 1\right)\times x^{-k-\frac{1}{2}}\int_x^1\frac{\psi(t)\,dt}{(t-x)^{-k+1}}, \quad x\in J.$$

Отсюда

$$\int_x^1(t-x)^{k-1}\psi(t)\,dt=\Phi_3(x),$$

где

$$\Phi_3(x)=\frac{-x^{k+\frac{1}{2}}}{a_0(x)\,k(k+1)\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(-k+\frac{1}{2}\right)F\left(-k+1, k+\frac{3}{2}, 3, 1\right)}\times$$

$$\times\left\{\psi_1(x)-\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\,D_{ox}^{\alpha_i}\,\omega_i^0(x)\,\varphi(x)-\sum_{j=1}^{m}b_j(x)\,D_{x1}^{\gamma_j}\,\omega_j^1(x)\,\varphi(x)-\right.$$

$$-\sum_{r=1}^{k+1}(k+1)\frac{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}-r\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}(-1)^r F(-r+1, 2+k, 2, 1)\times$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\,D_{ox}^{\alpha_i}\,\omega_i^0(x)(1-x)^r\varphi^{(r)}(x)+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{m} b_j(x)\, D_{x1}^{\gamma_j}\omega_j^1(x)\,(1-x)^r \varphi^{(r)}(x) + a_{n+1}(x)\,(1-x)^r \varphi^{(r)}(x)\Big] -$$

$$-a_0(x)\, x^{-k-\frac{3}{2}}(1-x)^k F\left(-k,\, k+\frac{3}{2},\, 1,\, 1\right)\varphi(0) -$$

$$-a_0(x)\,(k+1)\left(k+\frac{3}{2}\right)F\left(-k,\, k+\frac{5}{2},\, 2,\, 1\right)(1-x)^{k+1}\sum_{r=0}^{k+2}\times$$

$$\times\frac{(-1)^r\varphi^{(r)}(x)\, x^{r-k-\frac{3}{2}}}{r!\left(r-k-\frac{3}{2}\right)} - \frac{a_0(x)\,(-1)^{k+1}}{(k+2)!}(k+1)\left(k+\frac{3}{2}\right)\times$$

$$\times F\left(-k,\, k+\frac{5}{2},\, 2,\, 1\right)(1-x)^{k+1}\times\int_0^x (x-t)^{1/2}\,dt\,\times$$

$$\times\int_0^1 s^{k+2}\varphi^{(k+3)}(t+(x-t)\,s)\,ds\Big\}.$$

Дифференцируя k раз получим

$$\psi(x) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\,\Phi^{(k)}(x). \tag{18}$$

Легко видеть, что при выполнении условий 1. теоремы единственное решение задачи 3 дается формулой (16), где $\psi(x)$ определяется из (17) или (18).

Пусть в условии 2. теоремы $a=1$ и существует решение задачи. Тогда из (7)

$$u(x,\, 0) = \psi(x) + \int_0^x\left(\frac{1-t}{x-t}\right)^{1/2}\varphi'(t)\,dt,\quad x\in J,$$

$$u_y(x,\, 0) = 2\,(1-x)^{\frac{1}{2}}\varphi'(x),\quad x\in J.$$

Принимая это во внимание, с учетом того, что $a_i(x)\equiv 0,\ i=\overline{1,n}$ из краевого условия (15) находим

$$b_0(x)\psi(x) + \sum_{j=1}^{m} b_j(x)\, D_{x1}^{\gamma_j}\omega_j^1(x)\,\psi(x) + a_{n+1}(x)\,\psi(x) =$$

$$= \psi_1(x) - 2\,a_0(x)\,(1-x)^{1/2}\varphi'(x) - b_0(x)\frac{d}{dx}\int_0^x\left(\frac{1-t}{x-t}\right)^{1/2}\varphi'(t)\,dt - \tag{19}$$

$$-\sum_{j=1}^{m} b_j(x)\, D_{x1}^{\gamma_j}\omega_j^1(x)\int_0^x\left(\frac{1-t}{x-t}\right)^{1/2}\varphi'(t)\,dt - a_{n+1}(x)\int_0^x\left(\frac{1-t}{x-t}\right)^{1/2}\varphi'(t)\,dt.$$

В предположении, что $b_0(x)\neq 0\ \ \forall x\in\overline{J}$ проинтегрируем (19) в пределах от x до 1. Учитывая, что $\psi(1)=\varphi(0)$, будем иметь

$$\psi(x)+\int\limits_x^1 K_2^*(x,\ t)\,\psi(t)\,dt=\varphi_1(x), \tag{20}$$

где

$$K_2^*(x,\ t)=\frac{1}{b_0(x)}\Big\{-b_0'(t)+\sum_{j=1}^{l}\frac{\omega_j^1(t)}{\Gamma(-\gamma_j)}\int\limits_x^t(t-y)^{-1-\gamma_j}b_j(y)\,dy+$$

$$+\sum_{k=l+1}^{m}\frac{\omega_k^1(t)}{\Gamma(1-\gamma_k)}\Big[b_k(x)(t-x)^{-\gamma_k}+\int\limits_x^t(t-y)^{-\gamma_k}b_k'(y)\,dy\Big]+a_{n+1}(t)\Big\},$$

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{b_0(x)}\Big\{\int\limits_x^1\Big\{\psi_1(t)-2a_0(t)(1-t)^{1/2}\varphi'(t)-$$

$$-\sum_{j=1}^{m}b_j(t)\,D_{t1}^{\gamma_j}\omega_j^1(t)\int\limits_0^t\Big(\frac{1-y}{t-y}\Big)^{1/2}\varphi'(y)\,dy-$$

$$-a_{n+1}(t)\int\limits_0^t\Big(\frac{1-y}{t-y}\Big)^{1/2}\varphi'(y)\,dy+b_0'(t)\int\limits_0^t\Big(\frac{1-y}{t-y}\Big)^{1/2}\varphi'(y)\,dy\Big]\,dt-$$

$$-b_0(1)\int\limits_0^1\varphi'(t)\,dt+b_0(1)\,\varphi(0)+b_0(x)\int\limits_0^x\Big(\frac{1-t}{x-t}\Big)^{1/2}\varphi'(t)\,dt\Big\}.$$

Нетрудно показать, что при соблюдении условий 2. теоремы $\varphi_1(x)\in C(\bar{J})\cap C^2(J)$ и ядро $K_2^*(x,\ t)$ непрерывно в квадрате $\bar{J}\times\bar{J}$ при $x\neq t$ и при $x=t$ может обращаться в бесконечность порядка не больше γ_m.

Таким образом, уравнение (20) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода, которое разрешимо безусловно и однозначно в классе функций $C(\bar{J})\cap C^2(J)$.

При $b_0(x)\equiv 0$, а $b_m(x)\neq 0$, $\omega_m^1(x)\neq 0$ $\forall x\in\bar{J}$ подействуем в (19) оператором $D_{x1}^{-\gamma_m}$.

Принимая во внимание тождество

$$\frac{d}{dt}\int\limits_x^{t-\varepsilon}(y-x)^{\gamma_m-1}(t-y)^{-\gamma_k}b_k(y)\,dy=$$

$$=-\gamma_k\int\limits_x^{t-\varepsilon}(y-x)^{\gamma_m-1}(t-y)^{\gamma_k-1}b(y)\,dy+\varepsilon^{-\gamma_k}b(t-\varepsilon)(t-\varepsilon-x)^{\gamma_m-1},$$

после несложных преобразований получим

$$\psi(x)+\int\limits_x^1 K_3^*(x,\ t)\,\psi(t)\,dt=\varphi_2(x), \tag{21}$$

где

$$K_3^{\circ}(x,t)=\frac{1}{\omega_m^1(x)}\left\{\sum_{j=1}^{l}\frac{\omega_j^1(t)}{\Gamma(\gamma_m)\Gamma(-\gamma_j)}\int_t^x\frac{b_j(y)}{b_m(y)}(y-x)^{\gamma_m-1}\times\right.$$

$$\times(t-y)^{-\gamma_j-1}dy-\sum_{k=l+1}^{m-1}\frac{\omega_k^1(t)}{\Gamma(\gamma_m)\Gamma(1-\gamma_k)}\left[(\gamma_m-\gamma_k)(t-x)^{\gamma_m-\gamma_k-1}\times\right.$$

$$\times\int_0^1 s^{-\gamma_k}(1-s)^{\gamma_m-1}\frac{b_k(t-(t-x)s)}{b_m(t-(t-x)s)}ds+(t-x)^{\gamma_m-\gamma_k}\times$$

$$\left.\left.\times\int_0^1 s^{-\gamma_k}(1-s)^{\gamma_m-1}\frac{d}{dt}\left[\frac{b_k(t-(t-x)s)}{b_m(t-(t-x)s)}\right]ds\right]+\frac{1}{\Gamma(\gamma_m)}\frac{a_{n+1}(t)}{b_m(t)}\right\},$$

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{\omega_m^1(x)}\left\{D_{x1}^{-\gamma_m}\frac{1}{b_m(x)}\left[\psi_1(x)-2a_0(x)(1-x)^{1/2}\varphi'(x)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{j=1}^{m-1}b_j(x)D_{x1}^{\gamma_j}\int_0^x\left(\frac{1-t}{x-t}\right)^{1/2}\varphi'(t)\,dt-a_{n+1}(x)\int_0^x\left(\frac{1-t}{x-t}\right)^{1/2}\varphi'(t)\,dt\right]\right\}.$$

Из представлений видно, что $K_3(x,t)\in C(\bar{J}\times\bar{J})$ при $x\neq t$ и при $x=t$ обращается в бесконечность порядка не больше $1-\gamma_m+\gamma_{m-1}$. Из свойств операторов дробного интегро-дифференцирования следует [8], что $\varphi_2(x)\in C(\bar{J})\cap C^2(J)$.

Следовательно, уравнение (21) также является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, которое разрешимо безусловно и однозначно в требуемом классе функций.

Случай $a=4k+1$, $k=1,2,\cdots$ рассматривается аналогично случаю $a=1$.

Единственное решение задачи 3 будет задаваться формулой (16). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В случае, если в условии 2. теоремы 3 $a_i(x)\not\equiv 0$, $i=\overline{1,n}$, задача эквивалентно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и можно говорить лишь об условной разрешимости задачи 3.

Автор благодарен профессору А. М. Нахушеву и профессору А. Б. Нерсесяну за помощь и внимание, оказанные при написании работы.

НИИ прикладной математики и механики
Кабардино-Балкарского госуниверситета

Поступила 11.IV.1985

Ս. ՅՈՒ. ՆԱԶԱՐՈՎ. Ոչ լոկալ եզրային խնդիրներ էյլեր-Դարբուի հավասարման համար (ամփոփում)

Հետազոտվում են խնդիրներ կոտորակային ինտեգրո-դիֆերենցիալ օպերատորներ (Ռիման-Լիուվիլ-Սայգոյի իմաստով)՝ պարունակող եզրային պայմաններով։

S. Y. NAZAROV. *On some nonlocal boundary value problems for the Euler—Darboux equation* (summary)

Some boundary problems with operators of fractional integro-differentiation in the sense of Riemann—Liouville and M. Saigo are solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. М. Нахушев.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями, Диф. уравнения, 1985, 21, № 1, 92—101.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.
3. *M. Saigo.* A certain boundary value problem for the Euler—Darboux equation, II, Math. Japon., 1980, v. 25, № 2, 211—220.
4. *М. Л. Краснов.* Интегральные уравнения, «Наука», М., 1975, 304 с.
5. *M. Saigo.* On the Hölder continuity of the generalized fractional integrals and derivatives, Math. Rep. Kyushu Univ., 1980, v. 12, № 2, 55—57.
6. *Ф. Б. Нахушева.* О некоторых конструктивных свойствах решений вырождающегося гиперболического уравнения влагопереноса, Изв. АН УзбССР, сер. физ.-мат. наук, 1981, № 5, 22—29.
7. *Ф. Б. Нахушева.* Некоторые конструктивные свойства решений вырождающегося гиперболического уравнения, Диф. уравнения, 1982, 17, № 2, 334—340.
8. *G. Hardy, J. Littlewood.* Some properties of fractional integrals, I, Math. Zeitschrift, 1928, v. 27, № 4, 565—606.