ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 5, 1989 Математика

УДК 519.218.5

Г. С. СУКИАСЯН

РАНДОМИЗИРУЕМЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ И ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ

Введение

Простейшим примером точечной системы, рандомизируемой относительно группы T_n параллельных переносов евклидова пространства R^n, является решетка точек, имеющих в декартовой системе координат в R^n целочисленные координаты. Имеется в виду ее следующее свойство. Сдвигая решетку l на случайный вектор, распределенный равномерно на $[0,1)^n$, получим случайный точечный процесс, распределение которого

а) инвариантно относительно группы T_n,

б) сосредоточено на множестве $\{tl : t \in T_n\}$ (tl—образ l при преобразовании t).

Представляет интерес отыскать все точечные системы (т. е. подмножества R^n, не имеющие точек сгущения), обладающие такими же свойствами. Естественно также рассмотреть аналогичную задачу для других групп.

Определение 1. *Пусть G — группа преобразований пространства R^n. Точечная система ω называется G-рандомизируемой, если существует G-инвариантный случайный точечный процесс распределение которого сосредоточено на множестве образов $\{g\omega : g \in G\}$.*

Еще один пример рандомизируемой точечной системы доставляет известная из интегральной геометрии теорема Зигеля [1]. Обозначим через A_n группу сохраняющих меру Лебега аффинных преобразований пространства R^n. Согласно теореме Зигеля решетка l A_n-рандомизируема.

Впервые понятие рандомизируемой точечной системы было введено в [2], где показано, что для группы T_n и для группы M_n евклидовых движений пространства R^n точечная система ω рандомизируема тогда и только тогда, когда ω есть объединение k штук n-мерных решеток, получающихся друг из друга сдвигом (такие системы называем k-решетками).

В настоящей статье введены понятия параболических решеток I и II типа. Показано, что для исследуемой в статье подгруппы B группы A_2 все параболические решетки I типа B-рандомизируемы, но некоторые параболические решетки обоих типов не являются

k-решетками. Показано также, что все параболические решетки являются правильными (см. [3]) относительно группы B точечными системами, однако параболические решетки II типа не являются B-рандомизируемыми. (В связи с этим отметим, что для групп T_n и M_n все правильные точечные системы рандомизируемы [2]). Полученные результаты применяются в § 5 для решения задачи Давидсона [4] о построении M_2-инвариантных процессов прямых.

Некоторые результаты статьи анонсированы в [5]. В [6] развит алгебраический подход к тем же задачам с привлечением понятий из теории дискретных групп.

§ 1. Группа B и решетки

Обозначим через C подгруппу аффинных преобразований плоскости, имеющих следующий вид:

$$\begin{cases} x' = x + cy, \\ y' = y. \end{cases} \quad c \in R^1,$$

Через B обозначим подгруппу группы A_2, состоящую из аффинных преобразований $t\bar{c}$ следующего вида:

$$t\bar{c}: \begin{cases} x' = x + cy + a, \\ y' = y + b, \end{cases} \quad a,\ b,\ c \in R^1$$

(вначале делается преобразование $\bar{c} \in C$ с параметром c, затем параллельный перенос $t \in T_2$ на вектор $(a,\ b)$). Заметим, что группа B участвует в построении так называемой геометрии Галилея [7].

Определение 2. *В пространстве R^n решетками называются точечные системы, получающиеся из множества I точек с целочисленными координатами аффинным преобразованием.*

Определение 3. *Плоская решетка называется решеткой I типа, если она содержит хотя бы две точки с одинаковыми y-ординатами, в противном случае решетка называется II типа.*

Отметим, что преобразования из группы B сохраняют тип решетки.

Лемма 1.1 (см. [6]). *Все плоские решетки I типа B-рандомизируемы.*

В [2, 6] рекомендовано исследование рандомизируемых точечных систем начать с нахождения правильных относительно данной группы систем.

§ 2. Правильные точечные системы

Определение 4. (ср. [3]). *Точечная система $\omega \subset R^n$, содержащая начало координат O, называется правильной относительно группы G, если для любой точки $a \in \omega$ существует такое $g \in G$, что $g\omega = \omega$ и $gO = a$.*

Всякая правильная относительно группы G_1 точечная система является правильной и относительно любой более широкой группы

$G_2 \supset G_1$. Относительно группы T_n все решетки и только они являются правильными [3]. Следовательно, класс F правильных относительно группы B точечных систем содержит по меньшей мере все плоские решетки, так как T_2 является подгруппой группы B.

Известно [3], что все правильные относительно группы M_n точечные системы (т. н. кристаллографические множества) являются k-решетками (обратное неверно). Мы покажем, что F содержит и отличные от k-решеток точечные системы.

Пусть $\omega \in F$. Для того, чтобы преобразованием $t\bar{c} \in B$ точку O перевести в a, надо чтобы сдвиг t был бы на вектор a, так как любое $\bar{c} \in C$ оставляет на месте начало координат. Следовательно для каждой точки $a \in \omega$ существует такое $\bar{c}_a \in C$, что

$$\bar{c}_a\omega + a = \omega, \tag{2.1}$$

где $\omega + a$ означает сдвиг множества ω на вектор $a \in R^2$.

Лемма 2.1. *Всякая правильная относительно группы B точечная система вместе с точками $a = (x_a, y_a)$ и $b_0 = (x_b, y_b)$ содержит точки*

$$b_n = \left(x_b + nx_a + nc_a y_b + \frac{n}{2}(n-1)c_a y_a;\ ny_a + y_b\right),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Доказательство. Преобразование $\bar{c}_a$ переводит точку $b_0 \in \omega$ в точку $b' = (x_b + c_a y_b,\ y_b)$. Из (2.1) следует, что ω содержит точку $b_1 = b' + a = (x_b + x_a + c_a y_b;\ y_a + y_b)$. Продолжая подобным образом, получим искомые координаты точек $b_n = \bar{c}_a b_{n-1} + a$, лежащих в ω.

Если $y_a \neq 0$, то точки b_n лежат на параболе Z, описываемой формулой

$$x = \frac{c_a}{2y_a}(y^2 - y_b^2) + \left(\frac{x_a}{y_a} - \frac{c_a}{2}\right)(y - y_b) + x_b. \tag{2.2}$$

Кривизна $\dfrac{c_a}{y_a}$ и ось $y = \dfrac{y_a}{2} - \dfrac{x_a}{c_a}$ параболы Z не зависят от точки b_0. Параболы, у которых кривизны и оси совпадают, называются [7] концентрическими. Итак, во всякой правильной относительно B точечной системе точки располагаются вдоль концентрических парабол, общая ось которых параллельна оси абсцисс.

Лемма 2.2. *На оси абсцисс точки из $\omega \in F$ образуют одномерную решетку (в частности, эта решетка может состоять из одной точки O).*

Доказательство. Пусть на оси Ox кроме O есть и другие точки из ω, и пусть $e = (x_e, 0)$ — ближайшая к O такая точка. Взяв в лемме 2.1 $a = e$, и $b_0 = 0$, получим, что точки $e_n = (nx_e;\ 0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ лежат в ω и образуют решетку. Из леммы 2.1 следует, что на оси Ox нет кроме $\{e_n\}$ других точек $b \in \omega$, иначе среди точек $b_n = b + e_n \in \omega$ нашлась бы точка, более близкая к O, чем e.

Пусть $\omega \in F$ содержит точку $a = (x_a; y_a)$, причем $y_a \neq 0$. Обозначим через Z_0 параболу (2.2) с $x_b = 0$, $y_b = 0$. Возьмем в лемме 2.1 $b_0 = e_n$, получим семейство концентрических парабол $Z_n = Z_0 + e_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Семейство парабол назовем решеткой парабол, если они концентрические и их вершины образуют одномерную решетку. Согласно лемме 2.2 $\{Z_n\}$ есть решетка парабол. В силу леммы 2.1, точки пересечения решетки парабол $\{Z_n\}$ с прямыми $y = my_a$; $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ принадлежат ω, при этом образуется т. н. параболическая решетка I типа.

§ 3. Параболические решетки I типа

Под решеткой прямых понимаем семейство параллельных равноотстоящих прямых на плоскости.

Определение 5. *Параболической решеткой I типа называется множество узлов пересечения решетки парабол с решеткой прямых, параллельных оси парабол* (рис. 1).

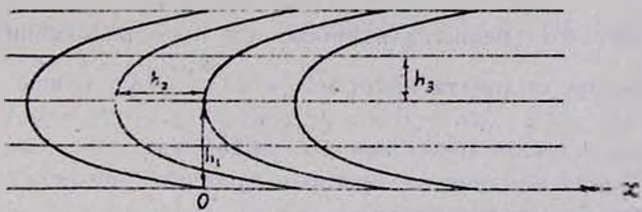

Рис. 1.

Параболические решетки I типа, оси которых параллельны оси Ox, описываются параметрами (r, h_1, h_2, h_3), где r — кривизна парабол, h_1 — ордината оси парабол, h_2 — шаг решетки парабол, h_3 — шаг решетки прямых (рис. 1). Из результатов § 2 следует, что если точечная система $\omega \in F$ содержит точки $a = (x_a, y_a)$ и $b = (x_b, 0)$, то все точки параболической решетки I типа с параметрами $r = \frac{c_a}{y_a}$, $h_1 = \frac{y_a}{2} - \frac{x_a}{c_a}$, $h_2 = x_b$, $h_3 = y_a$ принадлежат ω. Для доказательства того, что ω исчерпывается этими точками, нам потребуются следующие леммы.

Лемма 3.1. *Если точечная система $\omega \in F$ содержит точки a и $b = (x_b, 0)$, то точка $a + b$ также лежит в ω.*

Доказательство следует из леммы 2.1, если взять $y_b = 0$, $n = 1$.

Лемма 3.2. *Если точечная система $\omega \in F$ содержит на оси Ox другие (кроме O) точки и $a = (x_a, y_a) \in \omega$, то на прямой $y = y_a$ точки из ω образуют решетку с тем же шагом, что и на оси Ox.*

Доказательство следует из лемм 2.2 и 3.1.

Лемма 3.3. *Если точечная система $\omega \in F$ содержит на оси Ox другие точки кроме O, то среди точек $\omega \setminus Ox$ существует точка с минимальной по абсолютной величине ординатой.*

Доказательство. Предположим противное, что существует последовательность точек из $\omega \setminus Ox$, ординаты y_n которых стремятся к 0 при $n \to \infty$. По лемме 3.2 на прямых $y = y_n$ имеем решетки точек из ω с одинаковым шагом h. В прямоугольник D с основанием $[0, h)$ и высотой y_1 попадает по одной точке из этих решеток. То есть в D имеется счетное множество точек из ω, что противоречит условию, что ω не имеет точек сгущения.

Лемма 3.4. *Пусть ω — параболическая решетка I типа с параметрами (r, h_1, h_2, h_3). Преобразование $\bar{c} \in C$ с параметром $c = nrh_3$ (n — целое число) эквивалентно сдвигу ω на вектор t с ординатой $y_t = nh_3$, т. е. $\bar{c}\omega = \omega + t$.*

Доказательство. Парабола $x = \frac{r}{2} y^2$ кривизны r преобразованием $\bar{c} \in C$ с параметром c переходит в параболу с той же кривизной

$$x = \frac{r}{2} y^2 + cy = \frac{r}{2}\left(y + \frac{c}{r}\right)^2 - \frac{c^2}{2r}. \tag{3.1}$$

Таким образом, решетка парабол при преобразовании $\bar{c}$ передвигается на вектор, ордината которого, в силу (3.1), равна $\frac{c}{r}$. Решетки же прямых, параллельных оси Ox, преобразование $\bar{c}$ оставляет на месте, так же как и сдвиг на вектор с ординатой nh_3, где h_3 — шаг решетки прямых, n — целое число.

Эти леммы приводят нас к следующему утверждению.

Теорема 1. *Для того, чтобы точечная система ω, имеющая на оси Ox более одной точки, была правильной относительно группы B, необходимо и достаточно, чтобы ω была параболической решеткой I типа с осью, параллельной оси абсцисс.*

Доказательство. Пусть $\omega \in F$ и пусть $e = (x_e, 0)$ — ближайшая к O точка из $\omega \cap Ox$; $a = (x_a, y_a)$ — точка из ω с минимальной ординатой (лемма 3.3). Точки параболической решетки I типа γ с параметрами $r = c_a/y_a$, $h_1 = \frac{y_a}{2} - \frac{x_a}{c_a}$, $h_2 = x_e$, $h_3 = y_a$ принадлежат ω. Пусть этими точками ω не исчерпывается, есть точка $b \in \omega$, отличная от точек γ. По лемме 3.2 точка b не может иметь ординату $y_b = ny_a$, где n — целое. Среди ординат $ny_a + y_b$ точек $b_n \in \omega$ (лемма 2.1) найдется такая, что лежит между O и y_a, что противоречит минимальности y_a. Следовательно, ω совпадает с параболической решеткой γ.

Теперь положим, что ω есть параболическая решетка I типа с параметрами (r, h_1, h_2, h_3). В силу леммы 3.4, для произвольной точки $a = (x_a, y_a) \in \omega$ параметром преобразования $\bar{c}_a$, фигурирующего в (2.1), будет $c_a = ry_a$. Теорема 1 доказана.

Заметим, что параболическая решетка I типа с параметрами (2,0, 1,1) есть обычная плоская решетка l точек с целочисленными координатами. Однако существуют параболические решетки, не являющиеся k-решетками.

Теорема 2. *Параболическая решетка I типа с параметрами* $(1, h_1, h_2, h_3)$ *(без ограничения общности один из параметров, например, кривизну можно взять единичным) является k-решеткой тогда и только тогда, когда величины* h_2 *и* h_3^2 *соизмеримы.*

Доказательство. Пусть параболическая решетка I типа ω является k-решеткой. Тогда существует пара центрально-симметричных точек v и $-v$, лежащих в ω. Пусть v является узлом пересечения прямой $y = mh_3$ с параболой Z_n; m, n — целые. Подставив в (2.2) $r = \frac{c}{y_a} = 1$, $y_a = h_3$, $y_b = 0$, $x_b = nh_2$, $\frac{x_a}{y_a} = \frac{1}{2}h_3 - h_1$, получим уравнение параболы Z_n:

$$x = \frac{1}{2}y^2 - h_1 y + nh_2. \tag{3.2}$$

Точка v имеет координаты (x_v, mh_3), где

$$x_v = \frac{1}{2}m^2h_3^2 - h_1 h_3 m + nh_2.$$

Рассмотрим лежащую на Z_n точку $\bar{v} \in \omega$ с координатами $(\bar{x}_v, -mh_3)$. В силу (3.2) имеем

$$\bar{x}_v = \frac{1}{2}m^2h_3^2 + mh_1h_3 + nh_2.$$

В силу леммы 3.2 и теоремы 1 точки $-v$, $\bar{v} \in \omega$ лежат на прямой $y = -mh_3$ и принадлежат одномерной решетке с шагом h_2. Величина

$$\bar{x}_v - (-x_v) = m^2h_3^2 + 2nh_2,$$

следовательно кратна h_2, откуда получаем, что h_3^2 и h_2 соизмеримы

Теперь положим $\frac{h_3^2}{h_2} = \frac{n}{m}$. Точка v пересечения прямой $y=2mh_3$ и параболы Z_{-2mn}, согласно (3.2), имеет абсциссу

$$x_v = 2m^2h_3^2 - 2mh_1h_3 - 2mnh_2 = -2mh_1h_3.$$

Для любого целого i точки $v_i = (-2mih_1h_3, 2mih_3)$ лежат в ω и образуют одномерную решетку. Векторы v и $(h_2, 0)$ будут составляющими фундаментального параллелограмма k-решетки ω.

§ 4. Инверсия и параболические решетки II типа

Определение 6. (см. [7]). *Параболической инверсией* J_r *с параметром* $r \in R^1$ *называется (неаффинное) преобразование плоскости, задаваемое уравнениями:*

$$\begin{cases} x' = ry^2 - x \\ y' = y. \end{cases} \tag{4.1}$$

Лемма 4.1. (см. [7]). *При параболической инверсии* J_r *параболы с кривизной* r_1 *и осями, параллельными оси* Ox, *переходят в параболы кривизны* $2r - r_1$; *параллельные прямые (параболы нулевой кривизны) переходят (кроме прямых, параллельных оси* Ox*) в концентрические параболы кривизны* $2r$.

Прямые, параллельные оси Ox, при параболической инверсии остаются на месте, при этом сохраняются расстояния между точками, лежащими на таких прямых. Следовательно, одномерные решетки на прямых, параллельных оси Ox, при инверсии переходят в решетки на тех же прямых, с тем же шагом. Из леммы 4.1 следует, что параболические решетки I типа с кривизной $2r$ при инверсии с параметром r переходят в обычные решетки со счетным множеством точек на оси Ox, т. е. решетки I типа. Так как $J_r = J_r^{-1}$, верно и обратное утверждение, что позволяет дать общее

Определение 7. *Параболической решеткой называется точечная система, получающаяся из плоской решетки параболической инверсией J_r, при этом если ω — решетка i-го типа (см. определение 3), то $J_r\omega$ называется параболической решеткой i-го типа, $i = 1, 2$.*

Лемма 4.2. (см. [6]). *Для того, чтобы точечная система ω была правильной относительно группы B необходимо и достаточно, чтобы $J_r\omega$ для всех $r \in R^1$ также были бы правильными относительно B.*

Следствие. *Все параболичгские решетки правильны относительно B.*

Ниже показано, что параболическими решетками класс F исчерпывается.

Лемма 4.3. (см. [6]). *Точечная система ω B-рандомизируема тогда и только тогда, когда $J_r\omega$ для всех $r \in R^1$ также B-рандомизируемы.*

Из лемм 1.1 и 4.3 следует

Теорема 3. *Все параболические решетки I типа B-рандомизируемы.*

Всякую плоскую решетку можно представить как множество узлов пересечения двух решеток прямых, не параллельных оси Ox. Отсюда следует

Теорема 4. *Всякая параболическая решетка есть множество узлов пересечения двух решеток парабол равной кривизны и осями, параллельными оси Ox.*

Заметим, что множество ординат точек параболической решетки II типа, в отличие от параболических решеток I типа (лемма 3.3), всюду плотно на оси Oy. Оказывается полезным следующее описание параболических решеток II типа. Рассмотрим на плоскости решетку парабол $\{Z_n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. На параболе Z_n выделим точки, имеющие ординаты $my_a + ny_b$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Если величины y_a и y_b несоизмеримы, то полученная точечная система есть параболическая решетка II типа. И наоборот, для каждой параболической решетки II типа γ существуют такие y_a и y_b, что γ получается приведенным построением.

Пусть $\omega \in F$ и не имеет на оси Ox точек, кроме O. Докажем, что ω — параболическая решетка II типа. Для фиксированной точки $\overline{a} \in \omega$ построим параболу Z, взяв в (2.2) $x_b = 0$, $y_b = 0$. В качестве a в лемме 2.1 возьмем точку из $\omega \cap Z$, наиболее близко лежащую к O. Каждой точке $b_l \in \omega$ согласно (2.2) соответствует парабола Z_l, концентричная Z. Заметим, что вершины концентрических парабол Z_l не могут иметь точек сгущения, так как ω — точечная система. В качестве b возьмем такую точку, у которой вершина соответствующей параболы Z_l наиболее близко лежит к вершине Z. Точки параболической решетки II типа, построенной вышеописанной процедурой, по лемме 2.1 принадлежат ω. С другой стороны ω не содержит других точек ввиду экстремальности точек a и b. Отсюда получается обобщение теоремы 1.

Теорема 5. *Точечная система $\omega \subset R^2$ правильна относительно группы B тогда и только тогда, когда ω есть параболическая решетка (одного из двух типов).*

Отметим, что плоские решетки II типа не являются B-рандомизируемыми, и в силу леммы 4.3 параболические решетки II типа не являются B-рандомизируемыми.

§ 5. Решение проблемы Давидсона

Полученные результаты можно применить для решения следующей задачи, сформулированной Р. Давидсоном [4] и привлекшей значительное внимание [8—10]: существует ли на плоскости стационарный (т. е. T_2-инвариантный) случайный процесс прямых II порядка, не являющийся процессом Кокса (т. е. дважды стохастическим пуассоновским процессом), и реализации которого с вероятностью 1 не содержат пар параллельных прямых. Эта задача решена Калленбергом [9] построением соответствующего (и до последнего времени единственного) примера. Ниже мы построим семейство таких примеров, содержащее, в частности, и пример Калленберга.

Представим процессы прямых как точечные процессы. Прямую g на плоскости опишем с помощью параметров (x, y), где x — абсцисса точки пересечения g с осью Ox, $y = \operatorname{ctg} \varphi$, φ — угол между прямой g и осью Ox. Процессу прямых P_g, реализации которого с вероятностью 1 не содержат прямых, параллельных оси Ox, соответствует точечный процесс P на параметрической плоскости. Сдвигу прямой g на вектор с координатами (a, c) соответствует следующее преобразование ее параметров (рис. 2)

$$\begin{cases} x' = x + cy + a \\ y' = y. \end{cases} \tag{5.1}$$

Процесс прямых P_g стационарен тогда и только тогда, когда соответствующий точечный процесс P инвариантен относительно группы H аффинных преобразований вида (5.1). Группа H есть подгруппа группы B.

Случайным процессом прямых II порядка называется процесс, у которого вторая моментная мера локально конечна, т. е. для всех ограниченных подмножеств D плоскости математическое ожидание квадрата числа прямых, пересекающих D, конечно. Отметим, что это условие приводит к существенным ограничениям на соответствующий точечный процесс. В частности, B-инвариантный точечный процесс никогда не соответствует процессу прямых II порядка. Но из B-инвариантного точечного процесса можно получить процесс прямых II порядка соответствующим прореживанием. Например, достаточно взять кусок реализации точечного процесса, попадающий в любую параллельную оси Ox полосу произвольной конечной ширины.

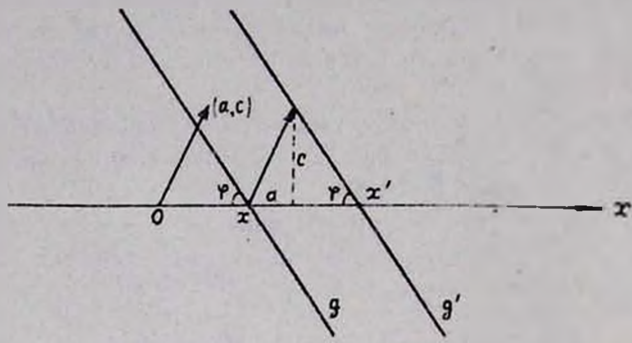

Рис. 2.

На параметрической плоскости параллельным прямым соответствуют точки с равными ординатами. Итак, для решения задачи Дависона достаточно построить на плоскости некоксовский B-инвариантный точечный процесс, реализации которого с вероятностью 1 не содержат пар точек с одинаковой ординатой. Последнее условие не разрешает использовать существующий по теореме 3 B-инвариантный точечный процесс, сосредоточенный на параболических решетках I типа.

Инверсией μ_r меры μ на R^2 назовем меру на плоскости, задаваемую для всех борелевских $A \subset R^2$ равенством $\mu_r(A) = \mu(J_r A)$, $r \in R^1$. Аналогично, инверсия P_r точечного процесса P на плоскости определяется равенством

$$P_r(A) = P(\{\omega : J_r \omega \in A\})$$

(здесь случайный процесс и его распределение обозначаются одинаково).

Лемма 5.1. *Пусть P — точечный процесс Кокса с управляющей мерой μ. Для любого $r \in R^1$ инверсия P_r также является процессом Кокса с управляющей мерой μ_r.*

Лемма 5.2. *Точечный процесс P на плоскости инвариантен относительно группы B тогда и только тогда, когда для любого $r \in R^1$ его инверсия P_r также B-инвариантна.*

На основании теоремы Зигеля (см. введение) в [8, 9] построен процесс прямых $\overline{P}$, удовлетворяющий условиям задачи Дависона и соответствующий точечный процесс P которого сосредоточен на кусках решеток II типа. Инверсия P_r точечного процесса P сосредоточена на кусках параболических решеток II типа. Следовательно, реализации соответствующего процесса прямых $\overline{P}_r$ не содержат с вероятностью 1 пар параллельных прямых. В силу лемм 5.1 и 5.2, для любого $r \in R^1$ точечный процесс P_r не является процессом Кокса, но инвариантен относительно группы B. Следовательно, процесс прямых $\overline{P}_r$ стационарен, откуда получается

Теорема 6. *Семейство* $\{\overline{P}_r\}$, $r \in R^1$ *стационарных процессов прямых является решением проблемы Давидсона. Оно содержит при* $r=0$ *пример Калленберга* [9].

Аналогично теореме 2 можно показать, что параболические решетки II типа не являются k-решетками. Поэтому процесс прямых $\overline{P}_r$, $r \neq 0$ нельзя получить из калленбергского процесса прямых $\overline{P}$ аффинными преобразованиями и операциями наложения и прореживания.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 28.I.1986
20.VIII.1989

Հ. Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ. Ռանդոմիզացվող կետային համակարգեր և պարաբոլիկ կավարներ (ամփոփում)

Հոդվածում ներմուծված են ձևափոխությունների խմբերի նկատմամբ ինվարիանտ ռանդոմիզացվող կետային համակարգերի, ինչպես նաև I և II տեսակների պարաբոլիկ կավարների հասկացությունները։ Ապացուցված է, որ հարթության վրա աֆին ձևափոխությունների խմբի հատուկ B *ենթախմբի նկատմամբ ռանդոմիզացման ենթակա են բոլոր I տեսակի պարաբոլիկ կավարները։*

Ցույց է տրված, որ B *խմբի նկատմամբ կանոնավոր կետային համակարգեր են հանդիսանում միայն պարաբոլիկ կավարները։ Ստացված արդյունքները կիրառվում են ուղիղների համասեռ պատահական պրոցեսների կառուցման մասին Դևիդսոնի խնդրի լուծման համար։*

G. S. SUKIASIAN. *Randomizable point systems and parabolic lattices* (summary)

The concepts of the I and II type parabolic lattices and randomizable point systems are introduced. It is shown, that all I type parabolic lattices are randomizable with respect to the special subgroup B of the group of affine transformations of the plane. It is also shown, that all parabolic lattices are regular with respect to the group B.

The results are applied to the solution of R. Davidson's problem on construction of line processes.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Сантало.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности, М., «Наука», 1983.
2. *Г. С. Сукиасян.* О характеризации случайных решеток, Изв. АН Арм.ССР, «Математка», 20, № 4, 1985, 299—306.
3. *Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен.* Наглядная геометрия, М., «Наука», 1981.
4. *R. Davidson.* Construction of line processes, second order properties. Изв. АН АрмССР, Математика, 5, № 3, 1970, 219—234.
5. *Г. С. Сукиасян.* Инвариантные рандомизации решеток и проблема Дэвидсона, Тезисы докладов IV международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей, Вильнюс, 1985, 162—163.
6. *G. S. Sukiasian.* Randomizable point systems, Acta Appl. Math., 9, 1987, 83—95.
7. *И. М. Яглом.* Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия, М., «Наука», 1969.
8. *J. Mecke.* An explicit description of Kallenberg's lattice type point process Math. Nachr., 89, 1979, 185—195.
9. *O. Kallenberg.* A counterexample to R. Davidson's conjecture on line processes, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 82, 1977, 301—307.
10. *R. V. Ambartzumian.* Factorization in integral and stochastic geometry. Stochastic geometry, Geometric Statistics, Stereology. Teubner—Texte zur Math., 65, 1984, 14—33.