

УДК 517.538.5

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Р. Ш. СААКЯН

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ А. А. ГОНЧАРА

Исследования граничных вопросов единственности аналитических функций начинаются с классических работ М. и Ф. Рисса [1], а также Н. Н. Лузина и И. И. Привалова [2]. Полученные ими результаты относятся к случаю односвязных областей. Аналогичные вопросы для бесконечносвязных областей менее изучены. Первый результат в этом направлении принадлежит А. А. Гончару [3]. Некоторые из его результатов подтверждены дальнейшему изучению в [4]. Данная работа посвящена подтверждению одного предположения об областях неединственности, выдвинутого А. А. Гончаром в [3].

1.1. Пусть $K = \{z; |z| < 1\}$, $C = \{z; |z| = 1\}$, $\bar{K} = K \cup C$, $K(t, r)_i = \{z; |z - t| < r, r > 0\}$.

Если последовательности $\{z_j\}_{j=0}^\infty$, $|z_j| < 1$ и $\{r_j\}_{j=0}^\infty$, $r_j > 0$ таковы, что

$$|z_j|' = C, \quad r_j < 1 - |z_j|, \quad r_j + r_i < |z_j - z_i| \quad (i \neq j),$$

то замкнутую область вида

$$\Omega = \Omega(\{z_j\}, \{r_j\}) = \bar{K} \setminus \bigcup_{j=1}^\infty K(z_j, r_j)$$

называют областью типа L . Если $\Omega = \Omega(\{z_j\}, \{r_j\})$ — область типа L , то для любого $\delta \in (0, 1]$ область $\Omega = \Omega(\{z_j\}, \{\delta r_j\})$ также является областью типа L .

Через $A(\Omega)$ обозначим множество функций, голоморфных в Ω° и непрерывных на Ω .

Привято говорить, что замкнутая область Ω типа L обладает свойством единственности, если из условий $\varphi \in A(\Omega)$ и $\varphi(z) = 0$ при $z \in C$ следует, что $\varphi = 0$. Если же существует функция $\varphi \in A(\Omega)$ такая, что $\varphi(z) = 0$ для $z \in C$ и $\varphi \neq 0$, то говорят, что область Ω обладает свойством неединственности.

В работе [3] А. А. Гончар, используя известный метод Вольфа (см. [5], [6]), предложил некоторую общую схему построения областей типа L , обладающих свойством неединственности. Из его результатов следовало, в частности, для любого $\beta > 2$ существуют:

(1Г) замкнутая область $\Omega = \Omega(\{z_j\}, \{r_j\})$ типа L такая, что

$$\sum_{j=1}^\infty \left(\log \frac{1}{r_j} \right)^{-\beta} < +\infty, \quad (1)$$

(2Г) функция $\varphi \in A(2)$ такая, что $\varphi(z) = 0$ для $z \in C$ и $\varphi \neq 0$.

В действительности, у А. А. Гончара функция $\varphi(z)$ мероморфна при $|z| < 1$ с полюсами в $|z_j|$ и представляется рядом

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j (z - z_j)^{-1}. \quad (2)$$

При этом $\varphi \in A(\Omega_\delta)$ для всех $\delta \in (0, 1]$, так что заменяя в (1Г) область Ω на Ω_δ , можно (при достаточно малом δ) сделать сумму ряда (1) меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$.

С другой стороны, в [3] отмечено, что если область $\Omega = \Omega(|z_j|, |r_j|)$, удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - |z_j|}{\log \frac{1 - |z_j|^2}{r_j}} < +\infty, \quad (3)$$

то тогда она обладает свойством единственности. Отсюда, в частности, следует, что утверждение (1Г) — (2Г), верное при $\beta > 2$, теряет силу при $\beta \leq 1$.

В связи со сказанным А. А. Гончаром было выдвинуто предположение [3], что утверждение (1Г) — (2Г) сохраняет силу при любом $\beta > 1$. Мы доказываем это предположение в пункте 1.2., установив предварительно, аналогично [3], одно общее предложение о построении областей типа L , обладающих свойством неединственности. Это предложение, полученное с помощью несколько модернизированного варианта метода Вольфа, дает таким образом в известном смысле точные результаты.

Следует отметить, что в несколько более общей формулировке подробное доказательство критерия (3), основанное на положительности гармонической меры $\omega(z, \Omega, C)$, приводится в работе А. Г. Балакян [4]. Она также получила метрические условия на область Ω типа L , при которых $\omega = 0$, но Ω обладает свойством единственности. Наличие таких условий а priori может представлять препятствие для доказательства предположения А. А. Гончара.

1.2. Лемма. Пусть $f(z)$ — голоморфная при $|z| \geq R$ функция, $f(\infty) = 0$ и $M = \sup_{|z|=R} |f(z)|$. Рассмотрим разложение f вокруг точки ∞ :

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}, \quad |z| > R$$

и пусть $P_n^f(z)$ — n -ая частичная сумма этого ряда. Тогда

$$|f(z) - P_n^f| \leq M \left| \frac{R}{z} \right|^n \sqrt{\frac{R}{|z| - R}}, \quad |z| > R, \quad (4)$$

$$|P_n^f(z)| \leq M \sqrt{\frac{R}{|z| - R}}, \quad |z| > R. \quad (5)$$

Доказательство. Согласно равенству Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{R^{2k}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})|^2 d\theta \leq M^2.$$

Отсюда, применяя к суммам

$$|f(z) - P'_n(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k|}{R^k} \left| \frac{R}{z} \right|^k, \quad |P'_n(z)| < \sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{R^k} \left| \frac{R}{z} \right|^k$$

неравенство Шварца, приходим к оценкам (4), (5).

Как и в [3] рассмотрим специального типа подкласс областей типа L . Пусть $\{R_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательности чисел $0 < R_k \uparrow \infty$, $1 < n_k \uparrow \infty$. Положим $R'_k = (R_{k+1} + R_k) 2^{-1}$ $k \geq 0$. $\Delta_k = R_{k+1} - R_k$ и пусть $\{\rho_k\}_{k=0}^{\infty}$ последовательность чисел таких, что

$$0 < \rho_k < \min \left\{ R_k n_k^{-1}, \frac{\Delta_{k-1}}{2}, \frac{\Delta_k}{2} \right\}.$$

Обозначим через $\{\zeta_{kl}\}_{l=1}^{n_k}$ множество корней уравнения $z^{n_k} = R_k$ и рассмотрим область

$$\Omega = \Omega(\{R_k\}, \{n_k\}, \{\rho_k\}) = \bar{K} \setminus \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{n_k} K(\zeta_{kl}, \rho_k)$$

и соответствующую $\delta \in (0, 1]$ область Ω_{δ} .

Предложение. Пусть $\{R_k\}$, $\{n_k\}$ и $\{\rho_k\}$ выбраны так, что

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{6^k}{(\Delta_1 \cdots \Delta_{k-1})^2} \exp \left[-\frac{1}{4} \sum_{m=1}^{k-1} \Delta_m n_m \right] \frac{1}{\rho_k} < +\infty. \quad (6)$$

Тогда существует мероморфная в K функция $\varphi \neq 0$ с полюсами на совокупности $\{\zeta_{kl}\}$ $1 \leq i \leq n_k$, $k \geq 0$, вида

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j (z - z_j)^{-1}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |A_j| < +\infty \quad (7)$$

такая, что $\varphi(z) = 0$ для $z \in C$ и $\varphi_{\Omega_{\delta}} \in A(\Omega_{\delta})$ для всех $\delta \in (0, 1]$.

Доказательство. Пусть $V_k = \{z; |z| > R_k\}$, $k \geq 0$. Положим

$$\omega_k = z^{-n_k} - R_k^{-n_k}, \quad k \geq 1, \quad \varphi_0(z) = (z^{n_0} - R_0^{n_0})^{-1}, \quad |z| \geq R_0,$$

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} - P_{n_k}^{n_k-1} \omega_k \omega_k^{-1} = \varphi_{k-1} - Q_k, \quad k \geq 1 \text{ и } M_k = \sup_{|z|=R_k} |\varphi_k(z)|, \quad k \geq 0.$$

Учитывая, что для $z \in \bar{V}_k$

$$\frac{\Delta_k}{R_k^{n_k}} \leq |\omega_k(z)| \leq \frac{2}{R_k^{n_k}}, \quad k \geq 1,$$

в силу утверждения [4] леммы, примененной к функции $\varphi_{k-1} \omega_k$, получим

$$|\varphi_k(z)| \leq M_0 \frac{6^k}{(\Delta_1 \cdots \Delta_{k-1})^{3/2}} \left(\frac{R_0}{R_1} \right) \cdots \left(\frac{R_{k-1}}{R_k} \right)^{n_k}, \quad z \in \bar{V}_k,$$

причем $\varphi_k(\infty) = 0$.

Обозначив через A_{kl} вычет функции Q_k в точке ζ_{kl} , $1 \leq i \leq n_k$, в силу (5) будем иметь, что

$$|A_{kl}| \leq \frac{M_0 6^k}{n_k (\Delta_1 \cdots \Delta_{k-1})^2} \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^{n_1} \cdots \left(\frac{R_{k-2}}{R_{k-1}} \right)^{n_{k-1}}, \quad i = 1, \dots, n_k. \quad (8)$$

Учитывая оценку $\log(x+1) > x2^{-1}$ при $x \in (0, 1)$, из (8) получим

$$|A_{ki}| \leq \frac{M_0 6^k}{n_k (\Delta_1 \cdots \Delta_{k-1})^2} \exp \left| -\frac{1}{4} \sum_{m=1}^{k-1} \Delta_m n_m \right|, \quad i=1, \dots, n_k. \quad (9)$$

Далее для $z \in \Omega_k \cup \{z; |z| \geq 1\}$ будем иметь

$$\left| \frac{A_{ki}}{z_{k+1} - z} \right| \leq \frac{M_0 6^k}{n_k (\Delta_1 \cdots \Delta_{k-1})^2} \exp \left| -\frac{1}{4} \sum_{m=1}^{k-1} \Delta_m n_m \right| \frac{1}{\delta \varphi_k}, \quad k \geq 2.$$

Отсюда в силу условия (6) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_k} A_{ki} (z_{k+1} - z)^{-1} \quad (10)$$

сходится абсолютно и равномерно на $\Omega_k \cup \{z; |z| \geq 1\}$. Более того, поскольку множество $|z| \geq 1$ принадлежит всем V_k , то из

$$|\varphi_k(z)| = |\varphi_0(z) - Q_1(z) - \dots - Q_k(z)| \leq M_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$$

получим, что ряд (10) равномерно на $|z| \geq 1$ сходится к функции φ_0 . Подходящим образом перенумеровывая ряд (10) и обозначив через

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j (z - z_j)^{-1},$$

где $A_j = \text{Res}_{z_j} \varphi_0(z)$, $j=1, \dots, n_0$, получим мероморфную в K функцию с полюсами на совокупности точек $\{z_j\}$ такую, что $\varphi(z) = 0$ для $z \in C$, $|\varphi(z)| \rightarrow \infty$, когда $z \rightarrow z_j$, $1 \leq j \leq n_0$, и $\varphi|_{\Omega_k} \in A(\Omega_k)$ для любого $k \in (0, 1]$.

Убедимся теперь, что существует выбор чисел $\{R_k\}$, $\{n_k\}$ и $\{\rho_k\}$, гарантирующий выполнение условия (6).

Пусть ψ — положительная, непрерывная и возрастающая функция такая, что

$$\psi'(x) \geq c_0 > 0, \quad c_0 = \text{const}, \quad (11)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log \psi(m+1)}{\log \psi(m)} = 1, \quad (12)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log \psi(m)}{\log m} = \infty. \quad (13)$$

Положим

$$\Delta_k = \frac{\psi(k+1) - \psi(k)}{\psi(k+1) \log \psi(k+1)} c_1, \quad k \geq 2, \quad \Delta_1 = \frac{c_1 \psi(2)}{\psi(2) \log \psi(2)}, \quad \alpha > 1,$$

где постоянная c_1 определяется из условия $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k = 1 - R_0$. И пусть

$$n_k = \left[\psi(k+1) \log \psi(k+1) \right] \quad \text{и} \quad \rho_k = c_2 \exp \left[-\frac{1}{16} c_1 \psi(k) \right], \quad k \geq 0,$$

где $[x]$ — целая часть x , а c_2 находим из условия $\rho_k \leq \pi R_k n_k^{-1}$. Ясно, что $\Delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и легко проверить, что $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k < \infty$. Учитывая, что $x-1 < [x] < x$ оценим предварительно несколько сумм;

$$\sum_{m=1}^{k-1} \Delta_m n_m > c_1 \psi(k) - 1, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{k-1} \log n_m \Delta_m &\geq \sum_{m=1}^{k-1} \log (c_1 (\psi(m+1) - \psi(m)) - 1) \geq \\ &> \sum_{m=1}^{k-1} \log \left(c_1 \int_m^{m+1} \psi'(x) dx - 1 \right) > (k-1) \log (c_0 c_1 - 1), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\sum_{m=1}^{k-1} \log n_m \leq (1 + \alpha) (k-1) \log \psi(k). \quad (16)$$

Отсюда в силу (12) — (16) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{6^k}{(\Delta_1 \cdots \Delta_{k-1})^2} \exp \left(-\frac{1}{4} \sum_{m=1}^{k-1} \Delta_m n_m \right) \frac{1}{\rho_k} &\leq \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{6^k \left(\prod_{m=1}^{k-1} n_m \right)^2}{\left(\sum_{m=1}^{k-1} \Delta_m n_m \right)^2} \exp \left(-\frac{1}{4} \sum_{m=1}^{k-1} \Delta_m n_m \right) \frac{1}{\rho_k} \leq \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} A_1^k \exp \left(A_2 (k-1) \log \psi(k) - \frac{3}{16} c_1 \psi(k) \right) \leq \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} A_3 \exp \left(-\frac{1}{16} c_1 \psi(k) \right) < +\infty, \end{aligned}$$

где $A_k (k=1, 2, 3)$ — константы.

Пусть, теперь, $\beta > 1$, тогда из (12) и (13) получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{n_j}{\left(\log \frac{1}{\rho_j} \right)^{\beta}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi(j+1) \log \psi(j+1)}{A \psi^{\beta}(j)} \leq A \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\log \psi(j+1)}{\psi^{\beta}(j)} < \infty, \quad \varepsilon > 0. \quad (17)$$

Таким образом, в силу доказанного предложения и (17) имеем, что для любого $\beta > 1$ утверждения (1Г) — (2Г) остаются в силе.

Замечание 1. Здесь важно, что выбор чисел $\{R_k\}$, $\{n_k\}$ и $\{\rho_k\}$ а следовательно и конструкция области Ω , ни коим образом не зависит от β . Следует также отметить, что если условий (12) и (13) на функцию ψ не налагать, то в зависимости от β , допустимую для функции ψ „шкалу роста“ можно несколько расширить.

Замечание 2. В [4] А. Г. Балакян получила условия на числа $\{R_k\}$, $\{n_k\}$ и $\{\rho_k\}$, при которых область $\Omega \in L(\{R_k, n_k, \rho_k\})$ является областью единственности. При нашем выборе этих параметров полученные в [4] условия в совокупности не выполняются, однако если положить

$$\rho_k = \exp \left(\frac{1}{16} c_1 \psi^{1+\varepsilon}(k) \right), \quad \varepsilon > 0,$$

то они будут выполнены. Это еще раз показывает, что в случае неединственности числа ρ_k не могут сколь угодно быстро стремиться к

нулю, и указывает на определенную степень точности как результата А. Г. Балакян, так и выбора последовательности $\{p_k\}$.

В заключение хочу выразить благодарность Н. У. Аракеляну за руководство и ценные обсуждения.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 23.V.1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *F. und M. Riesz*. Über die Randwerte einer analytischen Function. IV Cong. Scand. Math., Stockholm, 1916. 27—44.
2. *И. И. Привалов*. Граничные значения аналитических функций, М.—Л., «Гостехиздат», 1950.
3. *А. А. Гончар*. О примерах неединственности аналитических функций, Вестник МГУ, сер. матем. и механ., № 1, 1964, 37—44.
4. *А. Г. Балакян*. Метрические критерии единственности голоморфных функций в бесконечно связанных областях типа L , Изв. АН Арм.ССР, сер. матем, XX, № 2, 1985, 131—145.
5. *J. Wolff*. Sur les séries $\sum A_k(Z - z_k)^{-1}$ "Comptes Rendus". 173, 1921, 1327—1328