ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 5, 1989 Математика

УДК 517.98

Р. Л. ШАХБАГЯН

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Статья посвящена исследованию разрешимости первой краевой задачи в полупространстве для одного класса бесконечномерных эллиптических псевдодифференциальных операторов.

Полученные в ней результаты являются обобщением на случай бесконечномерных псевдодифференциальных операторов некоторых фактов построенной автором [1]—[4] теории разрешимости общих краевых задач для бесконечномерных эллиптических дифференциальных уравнений.

1. Обозначим через H вещественное гильбертово пространство l_2 с нормой $\|\xi\|=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k^2\right)^{1/2}<\infty$. Пространство H', по определению, — подпространство H, определяемое следующим образом:

$$H'=\left\{\xi'=(\xi_2,\ \xi_3,\cdots),\ \|\xi'\|=\left(\sum_{k=2}^{\infty}\xi_k^2\right)^{1/2}<\infty\right\}.$$

На пространстве H рассмотрим класс символов вида

$$a(\xi_1,\ \xi')=\sum_{k=0}^{2m} a_k(\xi')\,\xi_1^{2m-k}, \tag{1}$$

где $m\in \mathbf{Z}_+$, а функции $a_k(\xi')$ — положительно однородные относительно ξ' порядка k:

$$a_k(t\xi')=t^k a_k(\xi'),\ t>0.$$

Класс E. Функция $a(\xi_1,\ \xi')$ вида (1) принадлежит E (классу эллиптических символов), если она удовлетворяет условию эллиптичности

$$a(\xi)\neq 0, \text{ при } \xi\in H\diagdown\{0\}. \tag{2}$$

и бесконечно дифференцируема: $a\in C^\infty(H\diagdown\{0\})$.

Предполагается, что „вектор" $\operatorname{grad} a=\left(\dfrac{\partial a}{\partial\xi_1},\ \dfrac{\partial a}{\partial\xi_2},\ \cdots\right)\in H,\ \xi\in H$, при этом выполнена оценка

$$\|\operatorname{grad} a\|_H=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\partial a}{\partial\xi_k}\right|^2\right)^{1/2}<C\,\|\xi\|^{2m-1}.$$

Исследование краевой задачи будет существенно опираться на возможность факторизации символов рассматриваемого класса операторов. Как будет показано ниже (см. лемму 1), число граничных условий, обеспечивающих корректную постановку задачи Дирихле, обуславливается индексом фактора a_- (участвующего в представлении (3) символа эллиптического оператора), равного m ($\operatorname{ind} a_+ = m$).

2. Факторизация символов. Функция $a(\xi) \in \mathrm{E}$ — полином по ξ_1 порядка $2m$ с коэффициентами, определёнными на H'. В силу условия эллиптичности (2), при $\xi' \in H' \setminus \{0\}$ он не имеет вещественных корней. Обозначим через $a_+(\xi_1 + i\tau, \xi')$ многочлен относительно $\xi_1 + i\tau$, натянутый на корни символа $a(\xi_1 + i\tau, \xi')$, лежащие в комплексной полуплоскости $\mathrm{C}_- = \{\xi_1 + i\tau, \tau < 0\}$, $\xi' \in H' \setminus \{0\}$. По аналогии, через $a_-(\xi_1 + i\tau, \xi')$ обозначим полином по $\xi_1 + i\tau$, натянутый на корни символа $a(\xi_1 + i\tau, \xi')$, лежащие в полуплоскости $\mathrm{C}_+ = \{\xi_1 + i\tau, \tau > 0\}$, $\xi' \in H' \setminus \{0\}$.

Имеет место

Предложение 1. *Пусть символ $a \in \mathrm{E}$, тогда он допускает однородную факторизацию*

$$a(\xi_1, \xi') = a_+(\xi_1, \xi')\, a_-(\xi_1, \xi'), \tag{3}$$

при этом порядок однородности: $\operatorname{ord} a_+ = \operatorname{ord} a_- = m$. *Если потребовать дополнительно выполнения нормировочного условия* $a_+(0,1) = 1$, $a(0,1) = a_-(0,1)$, *то факторизация* (3) *единственна, при этом функции a_+ и a_- аналитически по ξ_1 продолжаются в полуплоскость C_+ и C_-, соответственно, при этом*

$$a_+(\xi_1 + i\tau, \xi') \neq 0 \text{ при } \tau > 0,\ |\xi_1| + \|\xi'\| + \tau > 0,$$

$$a_-(\xi_1 + i\tau, \xi') \neq 0 \text{ при } \tau < 0\ |\xi_1| + \|\xi'\| + |\tau| > 0.$$

Доказательство мы опускаем, поскольку оно по существу совпадает с конечномерным случаем (см. [5])

Замечание 1. Утверждение предложения 1, на самом деле, справедливо при более общих предположениях на символы $a(\xi)$, а именно, достаточно предположить, что функция $a(\xi)$ положительно однородна порядка α ($\alpha \in \mathrm{C}$), удовлетворяет условию (2) и имеет непрерывные первые производные, ограниченные на единичной сфере $\|\xi\| = 1$, $\xi' \neq 0$. Мы же ограничились лишь тем классом символов, который исследуется в работе.

Замечание 2. Символ $a(\xi_1, \xi')$ имеет особенность при $\xi = 0$. Факторы $a_\pm^{-1}(\xi_1, \xi')$ будут участвовать в представлении решения краевой задачи в полупространстве. Чтобы исключить эту особенность, поступим следующим образом.

Пусть $\omega = \dfrac{\xi'}{\|\xi'\|}$, $\omega_k = \dfrac{\xi_k}{\|\xi'\|}$. Обозначим через

$$a'(\xi_1, \xi') = a(\xi_1, (1 + \|\xi'\|)\,\omega), \text{ а } \tilde{a}(\xi_1, \xi') \text{ — разность}$$

$$\tilde{a}(\xi_1, \xi') = a'(\xi_1, \xi') - a(\xi_1, \xi').$$

Имеем

$$|\tilde{a}(\xi_1, \xi')| = |a(\xi_1, \xi' + \omega) - a(\xi_1, \xi')| =$$

$$= \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\partial a(\xi_1, \xi' + \theta\omega)}{\partial \xi_k} \omega_k\right| < \left(\sum_{k=2}^{\infty} \left|\frac{\partial a}{\partial \xi_k}\right|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \omega_k^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$< C(1 + \|\xi'\| + |\xi_1|)^{2m-1}. \tag{4}$$

С точки зрения разрешимости краевых задач символы $\tilde{a}(\xi)$, удовлетворяющие оценке (4), играют (как и в конечномерном случае) подчинённую роль. Поэтому в дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что исследуемый нами символ есть $a'(\xi)$.

Из условия (2) следует, что для символа $a'(\xi)$ выполняется оценка

$$C_1(1 + |\xi_1| + \|\xi'\|)^{2m} \leqslant |a'(\xi)| \leqslant C_2(1 + |\xi_1| + \|\xi'\|)^{2m}. \tag{5}$$

3. Опишем классы символов и функциональные пространства, в которых исследуется краевая задача (ср. [1]).

Класс $\sum_{a_0}^{q, s}$. Пусть $a_0(\xi)$—фиксированный эллиптический символ второго порядка. В качестве a_0 можно выбрать $a_0 = \|\xi\|^2 + 1$—символ оператора $-\Delta + I$.

Обозначим через H_1 пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \cdots)$ с конечной нормой

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \sigma_k^{-2}\right)^{1/2} < +\infty, \tag{6}$$

где $\{\sigma_k\}$—заданная последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum \sigma_k^{-2} < \infty$.

Пусть функция $Q(x, \xi)$ определена на $H_1(x) \times \{H(\xi) \setminus 0\}$ и принадлежит $C^\infty(H_1(x) \times \{H(\xi) \setminus 0\})$. Пусть, далее, $Q(x, \xi^N) = Q(x, P^N \xi)$—ограничение $Q(x, \xi)$ на $H_1(x) \times \{H^N(\xi) \setminus 0\}$ ($H^N = \{\xi \in H,\ \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N, 0, \cdots)\}$). Положим

$$G^N(x, z^N) = F^{-1}_{\xi^N \to z^N} Q(x, \xi^N) = (2\pi)^{-N/2} \int_{H^N} e^{-i(\xi^N, z^N)} Q(x, \xi^N)\, d\xi^N \tag{7}$$

и предположим, что ядра $G^N \in L_1(H_z^N)$ при любых $x \in H_1$ и $N \in Z_+$.

Введём следующие нормы:

$$\|Q(x, \xi)\|_0 = \sup_N \|G^N(x, z^N)\|_{L_1(H_z^N)}, \tag{8}$$

$$|||Q|||_0^{(q)} = \sup_{\beta, \gamma} \|a_0^{\frac{-q+|\gamma|}{2}}(\xi) D_x^\beta \partial_\xi^\gamma Q\|_0, \tag{9}$$

где sup берётся по β, γ, $\beta \leqslant \beta_0$, $|\gamma| \leqslant \gamma_0$.

Положим, наконец, для любых $s \in Z_+^1$, $R > 0$

$$|||Q|||_{s, R}^{(q)} = \sum_{|\alpha| \leqslant s} \sup_{\|x\|_1 < R} |||D_x^\alpha Q(x, \xi)|||_0^{(q)}. \tag{10}$$

Определение 1. Символ $Q(x, \xi)$ принадлежит пространству $\sum_{a_0}^{q, s}$, если при любых β_0, γ_0 выполняются следующие условия:

$$\text{a)} \quad |||Q|||_{s, \infty} < +\infty$$

и для любого $N \in Z_+$

$$|||Q(x^N, \xi)|||_{s, \infty}^{(q)} < +\infty;$$

$$\text{в)} \lim_{N \to \infty} |||Q(x, \xi) - Q(x^N, \xi)|||_{s, R}^{(q)} = 0$$

для любого R, $0 < R < \infty$.

Пространства $CL^s(H_1)$ и $CL^s(H_1^+)$. По определению, пространство $CL^s(H_1)$ есть пополнение множества C_Φ цилиндрических функций, заданных на H_1, в смысле следующей сходимости: для $f \in C_\Phi$ положим

$$\|f\|_{0, R} = \sup_{\|x\|_1 < R} |f(x)|, \ 0 < R \leqslant \infty.$$

Пусть, далее, $s > 0$—целое число. Обозначим

$$\|f\|_{s, R} = \sum_{|\alpha| < s} \|D^\alpha f\|_{0, R}, \ 0 < R \leqslant \infty.$$

Последовательность $\{f_k\}_1^\infty$, $f_k \in C_\Phi$ называется фундаментальной, если

а) $$\sup_k \|f_k\|_{s, \infty} \leqslant M < +\infty,$$

в) для любого R, $0 < R < \infty$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N > 0$, что $\|f_n - f_m\|_{s, R} < \varepsilon$ при n, $m > N$.

Обозначим через H_1^+ полупространство $H_1^+ = \{x \in H_1, \ x_1 > 0\}$. Пусть P^+ — оператор сужения функции, заданной на H_1, на полупространство $H_1^+ : P^+ : H_1 \to H_1^+$.

Определение 2. Мы скажем, что функция $f(x)$ принадлежит пространству $CL^s(H_1^+)$, если она является сужением функции, принадлежащей пространству $CL^s(H_1)$.

Это определение равносильно тому, что если $f \in CL^s(H_1^+)$, то для неё существует гладкое продолжение $lf \in CL^s(H_1)$ (подробнее о свойствах введённых пространств см. [6], [7]).

4. **Предложение 2.** *Оператор $\hat{a}'$, порождённый символом a', допускает замыкание в пространстве $CL^0(H_1^+)$.*

Доказательство. Замыкаемость оператора $\hat{a}'$ будет доказана, если мы установим принадлежность его символа $a'(\xi)$ соответствующему классу $\sum_{a_0}^{q, s}$ (см. [6], теорема 6.1). С этой целью введём обозначения: $\eta_1 = \xi_1$, $\eta' = \xi' + \omega$, тогда символ $a'(\xi_1, \xi') = a(\eta_1, \eta')$. Положим $\eta = (\eta_1, \eta')$, $P^n\eta = \eta^n$ и рассмотрим символ

$$Q(\eta^n) = \|\eta^n\|^{-2m+\varepsilon} a(\eta^n), \ \|\eta^n\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2\right)^{1/2}, \ \varepsilon > 0. \tag{11}$$

Очевидно функция $Q(\eta^n)$ положительно однородна по η^n, при этом порядок однородности равен ε. Отсюда, как хорошо известно, следует, что её преобразование Фурье в смысле обобщенных функций

$$F^{-1}_{\eta^n \to z^n} Q(\eta^n) = q(z^n)$$

удовлетворяет оценке

$$|q(z^n)| \leqslant C\|z^n\|^{-n-\varepsilon}, \quad z^n \neq 0 \tag{12}$$

с некоторой постоянной $C > 0$ и, стало быть, $q \in L_1(R^n_{z^n})$.

Переходя к sup по n, получаем

$$\|Q(\xi)\|_{\alpha} = \sup_n \|q(z^n)\|_{L_1(R^n_{z^n})} \leqslant M < \infty. \tag{13}$$

Используя, далее, однородность и гладкость функции Q, получаем

$$||| Q |||^{2\varepsilon}_0 = \sup_{\gamma} \|a_0^{\frac{-2\varepsilon+|\gamma|}{2}}(\eta)\, \partial^{\gamma}_{\eta} Q(\eta)\|_{\alpha} < \infty. \tag{14}$$

Поскольку символ Q не зависит от x, то очевидным образом выполняются также условия а) и в) определения 1, откуда следует принадлежность символа Q классу $\sum^{2\varepsilon, s}_{a_0}$ при любом $s > 0$.

Очевидно, далее, что $\|\eta\|^{2m-\varepsilon} \in \sum^{2m, s}_{a_0}$. Отсюда, в силу свойства мультипликативности классов $\sum_{a_0}$ (см. [6], предложение 4.1) получаем, что символ $a(\eta) = \|\eta\|^{2m-\varepsilon} Q(\eta)$, а значит и $a'(\xi)$, принадлежит классу $\sum^{2m+2\varepsilon, s}_{a_0}$ при любом s. Отсюда, согласно упомянутой теореме 6.1 [6] получаем, что оператор a' замыкаем в пространстве $CL^0(H_1)$.

Докажем теперь замыкаемость оператора $\hat{a}'$ в пространстве $CL^0(H_1^+)$. Пусть $\varphi \in C_\Phi(H_1^+)$, то есть $\varphi(x) = \varphi(P^N x) = \varphi(x^N) \in C_0^\infty(H_1^+)$

Как известно, на множестве $C_\Phi(H_1^+)$ оператор $\hat{a}'$, порожденный символом $a'(\xi)$, задается как псевдодифференциальный оператор:

$$\hat{a}'\varphi(x^N) = (2\pi)^{-N/2} \int_{H_1^N} e^{-i(x^N, \xi^N)} a'(\xi^N)\, \tilde{\varphi}(\xi^N)\, d\xi^N, \tag{15}$$

где $\tilde{\varphi}(\xi^N) = F_{x^N \to \xi^N} \varphi(x^N)$.

Очевидно

$$\hat{a}' : C_\Phi(H_1^+) \to CL^0(H_1^+).$$

Пусть последовательность $\{\varphi_n\}_1^\infty$, $\varphi_n \in C_\Phi(H_1^+)$ стремится к нулю в $CL^0(H_1^+)$: $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\hat{a}'\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ также в $CL^0(H_1^+)$. Нам надлежит доказать, что $f(x) \equiv 0$, при $x \in H_1^+$.

Поскольку оператор $\hat{a}'$ дифференциальный по переменной x_1, то он представим в виде

$$\hat{a}'\varphi(x) = (2\pi)^{\frac{-n+1}{2}} \sum_{k=0}^{2m} \int_{H_1^{x_1=0}} e^{-i(x'^n, \xi'^n)} a'_k(\xi'^n)\, D_1^{2m-k} \tilde{\varphi}_n(x_1, \xi'^n)\, d\xi'^n,$$

где положено: $a'_k(\xi') = a_k((1+\|\xi'\|)\omega)$, $x''=(x_2,\cdots,x_n)$,

$$\xi''=(\xi_2,\cdots,\xi_n),\ D_1^k=i^k\frac{\partial^k}{\partial x_1^k},\ \tilde{\varphi}_n(x_1,\xi'')=F^{-1}_{\xi_1\to x_1}\tilde{\varphi}(\xi'').$$

Из последнего представления следует, что

$$\widehat{a'}\,\varphi_n(x)\equiv 0 \text{ в } H_1^-=\{x\in H_1,\ x_1<0\},$$

поскольку $D_1^k\tilde{\varphi}(x_1,\xi'')\equiv 0$, при $x_1<0$ и $\forall\xi''$. Продолжая $\varphi_n(x)$ и $f(x)$ нулём в H_1^- и обозначая полученные продолжения, соответственно, через $l\varphi_n$ и lf, имеем

$$l\varphi_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \text{ и } \widehat{a'}(l\varphi_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}lf \text{ в } CL^0(H_1).$$

Но поскольку оператор $\widehat{a'}$ допускает замыкание в $CL^0(H_1)$, то $lf(x)\equiv 0$ в H_1, а, значит, $f(x)\equiv 0$ в H_1^+, чем и завершается доказательство предложения.

З а м е ч а н и е. Обозначим через

$$H^+_{1,\varepsilon}=\{x\in H_1,\ x_1\geqslant-\varepsilon\},\quad \varepsilon\in R^1_+.$$

Тогда точно так же как и выше доказывается, что оператор $\widehat{a'}$ допускает замыкание в пространстве $CL^0(H^+_{1,\varepsilon})$.

Это замечание будет использовано при исследовании задачи Дирихле.

5. П о с т а н о в к а к р а е в о й з а д а ч и. В полупространстве H_1^+ рассмотрим однородную задачу Дирихле

$$\widehat{a'}\,u(x)=f(x),\ x\in H_1^+, \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}\right|_{x_1=0}=0,\ k=\overline{0,\ m-1}. \tag{17}$$

Предполагается, что символ оператора $\widehat{a'}$:

$$a'(\xi_1,\xi')=a(\xi_1,(1+\|\xi'\|)\omega) \text{ и } a\in\mathrm{E}.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ оператор, соответствующий краевой задаче (16), (17):

$$\mathfrak{M}u=\left\{\widehat{a'}\,u(x),\ x\in H_1^+,\ u|_{x_1=0},\ \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0},\ \cdots,\ \left.\frac{\partial_a^{m-1}u}{\partial x_1^{m-1}}\right|_{x_1=0}\right\}.$$

Пусть $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{M}}$ — область определения замыкания оператора $\mathfrak{M}$.

Через $\mathfrak{Q}^0_{\mathfrak{M}}$ обозначим следующее множество:

$$\mathfrak{Q}^0_{\mathfrak{M}}=\left\{u\in\mathfrak{Q}_{\mathfrak{M}},\ u|_{x_1=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}=\cdots=\left.\frac{\partial^{m-1}u}{\partial x_1^{m-1}u}\right|_{x_1=0}=0\right\}.$$

Таким образом, задача Дирихле (16), (17) заключается в отыскании функции $u \in \Omega^0_{\mathfrak{M}}$ и удовлетворяющей уравнению (16) для произвольно заданной функции $f \in CL^0(H_1^+)$.

Ниже будет приведена формула, задающая решение задачи (16), (17). В ней существенную роль будут играть свойства факторов $a_\pm(\xi)$, входящих в представление (3) для символа $a(\xi)$.

Функция $a(\xi_1, \xi')$ — полином по ξ_1 степени $2m$. Пусть $\tau_j^+ = \tau_j^+(\xi')$ и $\tau_j^- = \tau_j^-(\xi')$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ — корни символа $a(\xi_1, \xi')$, лежащие, соответственно, в верхней и нижней комплексных полуплоскостях $\mathbf{C}_\pm$. Имеем тогда

$$a_\pm(\xi_1, \xi') = \prod_{j=1}^{m} (\xi_1 - \tau_j^\pm(\xi')). \tag{18}$$

Решение $u(x)$ задачи Дирихле будем искать, по аналогии с конечномерным случаем, в виде

$$u(x) = P^{+\wedge}(\psi(x_1)\, a'^{-1}_+(\xi))\, \theta(x_1)\, o\, (\psi(x_1)\, a'^{-1}_-(\xi)) o l f, \tag{19}$$

где P^+ — оператор сужения функций на H_1^+,

$$a'_\pm = a_\pm(\xi_1, (1 + \|\xi'\|)\,\omega), \quad \psi \in C^\infty(R^1),$$

$\psi(x_1) \equiv 1$, при $x_1 \geqslant -\varepsilon/2$, $\psi(x_1) \equiv 0$, при $x_1 \leqslant -\varepsilon$, $\varepsilon > 0$; $\theta(x_1)$ — функция Хевисайда, а lf — гладкое продолжение функции $f \in CL^0(H_1^+)$ на $H_1 : lf \in CL^0(H_1)$.

Легко доказать, что функция $u(x)$ не зависит от конкретного выбора оператора продолжения l.

Теорема 1. *Оператор*

$$\hat{R} f = P^{+\wedge}(\psi(x_1)\, a'^{-1}_+(\xi))\, \theta(x_1)\, o^\wedge (\psi(x_1)\, a'^{-1}_-(\xi)) o l f \tag{19'}$$

осуществляет непрерывное отображение пространства $CL^{2m}(H_1^+)$ в $CL^{2m}(H_1^+) \cap \Omega^0_{\mathfrak{M}}$.

Доказательству теоремы предпошлём две леммы.

Лемма 1. *Оператор $P^+(\psi(x_1)\, a'^{-1}_+)\, \theta(x_1)$ непрерывно действует из пространства $CL^{2m}(H^+_{1,\varepsilon})$ в $CL^{2m}(H_1^+) \cap \Omega^0_{\mathfrak{M}}$.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что поскольку перед множителем $\psi(x_1)$ в выражении для решения задачи стоит оператор проектирования P^+, либо $\theta(x_1)$, а в R^1_+ $\theta(x_1) \equiv 1$, то его мы будем опускать.

Пусть последовательность $\{\varphi_n\}_1^\infty$, $\varphi_n \in C_\Phi(H^+_{1,\varepsilon})$ сходится к φ в $CL^{2m}(H^+_{1,\varepsilon})$:

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi \text{ в } CL^{2m}(H^+_{1,\varepsilon}). \tag{20}$$

Обозначим через

$$\Psi_n(x^n) = P^+ \widehat{a_+^{-1}}(\xi_1, \xi'^{*})\, \theta\, \varphi_n$$

(здесь мы опускаем множитель Ψ) и покажем, что $\Psi_n \in CL^{2m}(H_1^+) \cap \overset{0}{\Omega}_{\mathfrak{M}}$.
Действительно, в силу (18) и предложения 1 функция $a_{-}^{-1}(\xi_1 + i\tau, \xi')$ аналитична по $\xi_1 + i\tau$ при $\tau > 0$ и допускает оценку

$$\left|a_{+}^{'-1}(\xi_1 + i\tau, \xi'^{n})\right| < C(1 + \|\xi'^{n}\| + |\xi_1| + |\tau|)^{-m}. \tag{21}$$

Поскольку $\varphi_n \in C_0(H_{1,\epsilon}^+)$, то $\varphi_n' = \theta\varphi_n \in S(H_1^+)$, откуда легко следует, что $\tilde{\varphi}_n' = F\varphi_n'$ допускает аналитическое продолжение по $\xi_1 + i\tau$ в полуплоскость $\tau > 0$. В самом деле, из представления

$$\tilde{\varphi}_n'(\xi_1, \xi'^{n}) = (2\pi)^{-n/2} \int_0^{\infty} \int_{H_1^{n-1}} e^{i x_1 \xi_1 + i(x'^{n}, \xi'^{n})} \varphi_n'(x_1, x'^{n})\, dx'^{n}\, dx_1 \tag{22}$$

вытекает, что (заметим, что интегрирование по x_1 ведётся от 0 до $+\infty$) правая часть представления (22) допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\mathbf{C}_+$:

$$\tilde{\varphi}_n'(\xi_1 + i\tau, \xi'^{n}) = (2\pi)^{-n/2} \int_0^{\infty} \int_{H_1^{n-1}} e^{i x_1 (\xi_1 + i\tau) + i(x'^{n}, \xi'^{n})} \varphi_n'(x_1, x'^{n})\, dx'^{n}\, dx_1.$$

При этом, очевидно, выполняется оценка

$$(1 + \|\xi'^{n}\| + |\xi_1| + \tau)^N |\tilde{\varphi}_n'(\xi_1 + i\tau, \xi'^{n})| \leqslant C_N \tag{23}$$

при любых $\tau > 0$ и $N > 0$.

Обозначим через $\tilde{\Psi}_n' = a_{+}^{'-1}(\xi_1, \xi'^{n})\, \tilde{\varphi}_n'$, тогда

$$\Psi_n'(x_1, x'^{n}) = (2\pi)^{-n/2} \int_{H^n} e^{-i x_1 \xi_1 - i(x'^{n}, \xi'^{n})} a_{+}^{'-1}(\xi_1, \xi'^{n})\, \tilde{\varphi}_n'(\xi_1, \xi'^{n})\, d\xi^{n}. \tag{24}$$

Из (21) и (23) очевидным образом следует, что $\Psi_n \in C^{\infty}(H_1^n)$. Покажем теперь, что $\Psi_n' \in C_0^{\infty}(\overline{H_1^n})$. В самом деле, в силу аналитичности функции $a_{+}^{-1}(\xi_1 + i\tau, \xi'^{n})\, \widetilde{\theta\varphi}_n(\xi_1 + i\tau, \xi'^{n})$ по $\xi_1 + i\tau$ в полуплоскости $\mathbf{C}_+$ и непрерывности в замкнутой полуплоскости $\overline{\mathbf{C}}_+$, используя теорему Коши, представим

$$\Psi_n'(x_1, x'^{n}) = (2\pi)^{-n/2} \int_{H^n} e^{-i x_1 (\xi_1 + i\tau) - i(x'^{n}, \xi'^{n})} \tilde{\Psi}_n'(\xi_1 + i\tau, \xi'^{n})\, d\xi^{n},$$

где τ произвольно. Учитывая вновь оценки (21) и (23), приходим к неравенству

$$|\Psi_n'(x_1, x'^{n})| < C_1 e^{x_1 \tau}, \tag{25}$$

где $C_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от τ.

Произвольным образом фиксируя $x_1 < 0$ и устремляя $\tau \to +\infty$, из последней оценки имеем $\Psi'_n(x_1, x'^n) = 0$, то есть $\operatorname{supp} \Psi'_n \in \overline{H}_1^+$. Таким образом, $\Psi'_n \in C^\infty(H_1^+)$. Отсюда легко следует, что $\Psi_n = P^+\Psi'_n \in C^\infty(H_1^+)$ и, стало быть, $\Psi_n \in CL^{2m}(H_1^+)$.

Очевидно, далее, что $\Psi_n \in \Omega_{\mathfrak{M}}$, покажем, что они удовлетворяют граничным условиям (17), то есть, что $\Psi_n \in \Omega^0_{\mathfrak{M}}$. Имеем

$$\frac{\partial^k \Psi_n}{\partial x_1^k} = P^+\,\tilde{}\,((-i\xi_1)^k a'^{-1}_+(\xi_1, \xi'^n)\,\theta\varphi_n,\quad k = \overline{0, m-1}.$$

Функция $\xi_1^k a'^{-1}_+(\xi_1, \xi'^n)$ аналитична по $\xi_1 + i\tau$ при $\tau > 0$, непрерывна в $\overline{C}_+$ и, в силу (21), удовлетворяет оценке

$$|(\xi_1 + i\tau)^k a'^{-1}_+(\xi_1 + i\tau, \xi'^n)| \leqslant C(1 + |\xi'^n| + |\xi_1| + |\tau|)^{k-m}$$

для $0 \leqslant k \leqslant m-1$. Отсюда, как и выше, следует, что

$$\left.\frac{\partial^k \Psi_n}{\partial x_1^k}\right|_{x_1=0} = 0,\quad k = \overline{0, m-1},$$

то есть $\Psi_n \in \Omega^0_{\mathfrak{M}}$. Таким образом, получено, что $\Psi_n \in CL^{2m}(H_1^+) \cap \Omega^0_{\mathfrak{M}}$.

Для завершения доказательства леммы нам надлежит совершить предельный переход по n. С этой целью докажем, что $a'^{-1}_+ \in \sum_{a_0}^{-m+s, s}$. Из неравенств (5) и (18) следует оценка

$$|a'^{-1}_+(\xi_1, \xi'^n)| \leqslant C(1 + |\xi'^n| + |\xi_1|)^{-m}.$$

Используя далее эту оценку, нетрудно убедиться, что

$$F^{-1}_{\xi^n \to x^n}(a_0^{\frac{m-s+|\gamma|}{2}}(\xi_1, \xi'^n)\,\partial^\gamma_\xi a'^{-1}_+(\xi_1, \xi'^n)) \in L_1(H_1^n),$$

откуда, переходя к sup по n и γ, получаем

$$\||a'^{-1}_+|\|^{(q)}_s = \sup \|a_0^{\frac{m-s+|\gamma|}{2}}(\xi)\,\partial^\gamma_\xi a'^{-1}_+(\xi)\|_0 < +\infty.$$

Поскольку символ a'^{-1}_+ не зависит от x, то условия a) и в) определения 1 очевидным образом выполняются и, следовательно, $a'^{-1}_+ \in \sum_{a_0}^{-m+s, s}$ при любом $s > 0$. Но тогда, согласно теореме 3.2 [6], оператор $\widehat{a}'^{-1}_+$ продолжается с множества C_Φ до непрерывного оператора:

$$\widehat{a}'^{-1}_+ : CL^{2m}(H_1) \to CL^{2m}(H_1).$$

Отсюда, в силу (20), имеем

$$\widehat{a}'^{-1}_+ \theta\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \widehat{a}'^{-1}_+ \theta\varphi \text{ в } CL^{2m}(H_{1,x}^+). \tag{26}$$

Докажем теперь, что $\Psi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Psi$ в $CL^{2m}(H_1^+)$. Из представления (24) следует, что для любого α, $|\alpha| \leqslant 2m$

$$D^\alpha \Psi_n = D^\alpha P^+ \hat{a}_+^{\prime,-1} \theta\varphi_n = P^+ \hat{a}_+^{\prime,-1} D^\alpha (\theta\varphi_n),$$

откуда, в соответствии с (26), имеем

$$\Psi_n - \Psi = P^+ \hat{a}_+^{\prime,-1} \theta\varphi \text{ в } CL^{2m}(H_1^+). \tag{27}$$

Из (20) и (27) следует, что оператор $P^+ \hat{a}_+^{\prime,-1} \circ \theta$ непрерывным образом отображает пространство $CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^+)$ в $CL^{2m}(H_1^+)$.

Лемма доказана.

Замечание. Совершенно аналогично можно доказать, что оператор $P^+ \hat{} (\psi(x_1)\, a_+^{\prime-1})\, \theta(x_1)$ непрерывно действует из пространства $CL^0(H_{1,\varepsilon}^+)$ в $CL^0(H_1^+) \cap \Omega^0_{\mathfrak{M}}$.

Имеет место

Предложение 3. *Существует счётно-аддитивная мера $\mu(dz)$, сосредоточенная на H_1 такая, что имеет место представление*

$$P^+ \hat{} (\psi a_+^{\prime-1})\, \theta\varphi(x) = P^+ \int \varphi(x-z)\, \mu(dz) \tag{28}$$

для любого $\varphi \in CL^0(H_{1,\varepsilon}^+)$.

Доказательство. В процессе доказательства леммы 1 было установлено, что символ $a_+^{\prime-1} \in \sum_{a_0}^{-m+\varepsilon,\, s}$, где $\varepsilon > 0$ и $s \geqslant 0$— произвольные числа. Отсюда следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $-m+$ $+\varepsilon < 0$ и $\sum_{a_0}^{-m+\varepsilon,\, s} \subset \sum_{a_0}^{0,\, 0}$ (здесь мы воспользовались известным свойством вложения классов $\sum_{a_0}^{q,\, s}$, а именно, по следствию предложения 3.3 [6]: $\sum_{a_0}^{q_1,\, s} \subset \sum_{a_0}^{q_2,\, s}$ при $q_1 < q_2$). Принадлежность же символа $a_+^{\prime-1}$ классу $\sum_{a_0}^{0,\, 0}$, в соответствии с теоремой 2.2 [7], в свою очередь, обеспечивает существование счётно-аддитивной меры, заданной на пространстве H_1 и такой, что для любого $\varphi \in CL^0(H_{1,\varepsilon}^+)$ имеет место представление (28), в котором $\mu(dz)$ есть проекция этой меры на полупространство $H_{1,\varepsilon}^+$, что и доказывает наше утверждение.

Лемма 2. *Оператор $\hat{} (\psi(x_1)\, a_-^{\prime-1}) \circ l$ непрерывно действует из пространства $CL^{2m}(H_1^+)$ в $CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^+)$.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{\varphi_n\}_1^\infty$, $\varphi_n \in C_0(H_1^+)$ сходится к φ в пространстве $CL^{2m}(H_1^+)$:

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi \text{ в } CL^{2m}(H_1^+). \tag{29}$$

Обозначим через $l\varphi_n$ гладкое продолжение функции φ_n на H_1: $: l\varphi_n \in CL^{2m}(H_1)$. Как доказано в [1] из (29) следует

$$l\varphi_n \to l\varphi \text{ в } CL^{2m}(H_1), \tag{30}$$

то есть оператор l непрерывно действует из $CL^{2m}(H_1^+)$ в $CL^{2m}(H_1)$.

Аналогично тому, как это было установлено в процессе доказательства леммы 1, используя оценку

$$|a_-^{\prime -1}(\xi_1, \xi')| < C(1 + |\xi'| + |\xi_1|)^{-m},$$

можно показать, что символ $a_-^{\prime -1} \in \sum_{a_0}^{-m+\varepsilon, s}$ при любых $\varepsilon > 0$ и $s \in Z_+$. Отсюда, как и выше, получаем, что оператор

$$\widehat{a_-^{\prime -1}} : CL^{2m}(H_1) \to CL^{2m}(H_1), \tag{31}$$

при этом отображение непрерывно. Таким образом, из (29)—(31) имеем

$$\widehat{a_-^{\prime -1}}\, l\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \widehat{a_-^{\prime -1}}\, l\varphi \text{ в } CL^{2m}(H_1). \tag{32}$$

Для завершения доказательства леммы нам остаётся заметить, что оператор ψ умножения на $\psi(x_1)$ непрерывным образом отображает пространство $CL^{2m}(H_1)$ в $CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^+)$:

$$\psi : CL^{2m}(H_1) \to CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^+). \tag{33}$$

Из (32) и (33) окончательно получаем

$$\widehat{}(\psi\, a_-^{\prime -1}) \circ l\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \widehat{}(\psi\, a_-^{\prime -1}) \circ l\varphi \text{ в } CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^+).$$

Лемма доказана.

Следствие. Из доказанной леммы, в частности, вытыкает, что оператор $\widehat{}(\psi\, a_-^{\prime -1}) \circ l$ непрерывно действует из пространства $CL^0(H_1^+)$ в $CL^0(H_{1,\varepsilon}^+)$.

Предложение 4. *Существует счётно-аддитивная мера $\mu_1(dz)$, определённая на H_1 такая, что имеет тесто представление*

$$\widehat{}(\psi\, a_-^{\prime -1}) \circ lf(x) = \psi(x_1) \int_{H_1} lf(x - z)\, \mu_1(dz) \tag{34}$$

для любого $f \in CL^0(H_1^+)$.

Доказательство по существу повторяет доказательство предложения 3, и поэтому мы его опускаем.

Доказательство теоремы 1. Утверждение теоремы 1 есть непосредственное следствие лемм 1 и 2.

Действительно, в силу леммы 2 оператор $\widehat{}(\Psi\, a_-^{\prime -1}) \circ l$ осуществляет непрерывное отображение:

$$\widehat{}(\psi\, a_-^{\prime -1}) \circ l : CL^{2m}(H_1^+) \to CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^+). \tag{35}$$

Далее, согласно лемме 1, оператор

$$P^+\widehat{}(\psi\, a_+^{\prime -1}) \circ \theta : CL^{2m}(H_{1,\varepsilon}^+) \to CL^{2m}(H_1^+) \cap \Omega_{\mathfrak{M}}^0 \tag{36}$$

и отображение непрерывно.

Из (35) и (36) получаем, что оператор $\hat{R}$, задаваемый выражением (19'), осуществляет непрерывное отображение:

$$\hat{R}: CL^{2m}(H_1^+) \to CL^{2m}(H_1^+) \cap \mathfrak{L}^0_{\mathfrak{M}}. \tag{37}$$

Теорема доказана.

Замечание. Используя замечания к леммам 1 и 2, можно доказать, что оператор $\hat{R}$ непрерывно действует из пространства $CL^0(H_1^+)$ в $CL^0(H_1^+) \cap \mathfrak{L}^0_{\mathfrak{M}}$.

6. В этом пункте будет сформулирован и доказан основной результат статьи.

Предварительно введём следующее обозначение:

$$\|f\|_{C(H_1^+)} \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in H_1^+} |f(x)|.$$

Имеет место

Теорема 2. *Пусть символ* $a(\xi) \in \mathrm{E}$, *тогда для любого* $f \in CL^0(H_1^+)$ *существует единственное решение* $u(x)$ *задачи* (16), (17), *принадлежащее пространству* $CL^0(H_1^+) \cap \mathfrak{L}^0_{\mathfrak{M}}$, *определяемое формулой* (19). *При этом входящие в представление решения операторы порождаются счётно-аддитивными мерами, заданными на* H_1.

Имеет место априорная оценка

$$\|u\|_{C(H_1^+)} \leqslant C\|f\|_{C(H_1^+)}, \tag{38}$$

где $C > 0$ — *постоянная, не зависящая от* f.

Доказательство. Проверим, что функция $u(x)$, задаваемая формулой (19), является решением задачи (16), (17). Пусть вначале правая часть f уравнения (16) принадлежит $C_\Phi(H_1^+)$. Применим к оператору $\hat{R}$, задаваемому представлением (19), оператор $\hat{a}'$. Имеем

$$\hat{a}' u = \hat{a}' \circ \hat{R} f = \hat{a}' \circ P^+ \hat{\ } (\psi(x_1)\, a'^{-1}_+)\, \theta(x_1) \circ$$

$$\circ \hat{\ }(\psi(x_1)\, a'^{-1}_-) \circ lf = P^+ \hat{a}'_+ \circ \hat{a}'_- \circ \hat{\ }(\psi(x_1)\, a'^{-1}_+)\, \theta(x_1) \circ$$

$$\circ \hat{\ }(\psi(x_1)\, a'^{-1}_-) \circ lf = P^+ \psi(x_1)\, \hat{a}'_- \circ \theta \circ \hat{a}'^{-1}_- lf =$$

$$= P^+ \theta(x_1)\, lf = f,$$

откуда следует, что $u(x)$ удовлетворяет уравнению (16) в полупространстве H_1^+.

Пусть теперь $f \in CL^0(H_1^+)$ — произвольно заданная функция, и пусть последовательность $\{f_n(x)\}_1^\infty$, $f_n \in C_\Phi$ сходится к f в $CL^0(H_1^+)$. Обозначим через $u_n(x)$ решение задачи (16), (17), отвечающее правой части $f_n(x)$. Для $u_n(x)$ справедливо представление

$$u_n(x) = P^{+}\widehat{\ }(\psi(x_1)\, a_{+}'^{-1})\, \theta(x_1)\widehat{\ }(\psi(x_1)\, a_{-}'^{-1})\, f_n(x). \tag{39}$$

Имеем

$$\widehat{a}'\, u_n(x) = f_n(x),\ x \in H_1^{+},\ n = 1, 2, \cdots. \tag{40}$$

В силу замечания к теореме 1, в формуле (39) можно совершить предельный переход в пространстве $CL^0(H_1^{+})$ при $n \to \infty$. Получаем, что $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \in CL^0(H_1^{+}) \cap \Omega^0_{\mathfrak{M}}$ и, следовательно, $u(x)$ есть решение задачи Дирихле (16), (17), принадлежащее пространству $CL^0(H_1^{+})$.

В силу предложений 3 и 4 операторы, определяющие решение задачи, порождаются счётно- аддитивными мерами, сосредоточенными на пространстве H_1.

Обратимся теперь к оценке (38). В силу замечания к теореме 1 оператор $\widehat{R}$ осуществляет непрерывное отображение пространства $CL^0(H_1^{+})$ в $CL^0(H_1^{+}) \cap \Omega^0_{\mathfrak{M}}$. Из линейности оператора $\widehat{R}$ и свойств пространства CL^0 приходим к неравенству

$$\|u\|_{C(H_1^{+})} \leqslant C\|f\|_{C(H_1^{+})}.$$

Из последней оценки очевидно следует единственность решения задачи (16), (17).

Теорема доказана.

Ереванский государственный университет,
Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 7.IX.1988

Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ. Դիրիխլեի խնդիրը կիսատարածությունում անվերջ չափանի էլիպտական տիպի պսևդո-դիֆերենցիալ օպերատորների համար *(ամփոփում)*

Հոդվածը նվիրված է կիսատարածությունում անվերջ չափանի էլիպտական տիպի պսևդո-դիֆերենցիալ օպերատորների մի դասի համար առաջին եզրային խնդրի միարժեքորեն լուծելիության հարցին։ Ստացված արդյունքները հանդիսանում են հեղինակի կողմից կառուցած [1]—[4] անվերջ չափանի էլիպտական դիֆերենցիալ հավասարումների համար ընդհանուր եզրային խնդիրների լուծելիության տեսության որոշ փաստերի ընդհանրացում էլիպտական պսևդո-դիֆերենցիալ օպերատորների դեպքի համար։

R. L. SHAKHBAGIAN. *Dirichlet problem for the infinite dimensional elliptic pseudo-differential operators in the half-space* (summary)

In the paper the uniquely solvability of the above mentioned problem is investigated. The main results are the generalization of the results of the author's papers [1]—[4] in which the author has constructed the theory of the solvability of the general boundary value problem for the infinite dimensional elliptic differential operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Л. Шахбагян.* Краевая задача в полупространстве для эллиптических операторов второго порядка с бесконечным числом независимых переменных, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XI, № 1, 1976, 82—96.
2. *Р. Л. Шахбагян.* Эллиптическая задача с параметром для уравнений второго порядка с бесконечным числом независимых переменных, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XII, № 4, 1977, 252—261.
3. *Р. Л. Шахбагян.* Задача Дирихле в полупространстве для эллиптических операторов высокого порядка с бесконечным числом независимых переменных, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVI, № 2, 1981, 150—166.
4. *Р. Л. Шахбагян.* Докторская диссертация, Тбилиси, 1985.
5. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН, 20, № 3, 1965, 85—151.
6. *П. М. Блехер, М. И. Вишик.* Об одном классе псевдодифференциальных операторов с бесконечным числом переменных и их приложениях, Матем. сб., 86 (128), № 3 (11), 1971, 446—494.
7. *М. И. Вишик, А. В. Марченко.* Кравые задачи для эллиптических и параболических операторов второго порядка на бесконечномерных многообразиях с краем, Матем. сб., 88, № 3, 1973, 331—371.