ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIV, № 6, 1989 Математика

УДК 517.538.5 + 517.986

Б. Т. БАТИКЯН, С. А. ГРИГОРЯН

О РАВНОМЕРНЫХ АЛГЕБРАХ, СОДЕРЖАЩИХ $A(K)$

1°. Пусть K — компактное подмножество комплексной плоскости с непустой внутренностью K°, и $A(K)$ — алгебра всех тех непрерывных функций на K, которые аналитичны в каждой точке K°. Поскольку каждая функция из $A(K)$ однозначно определяется своим поведением на топологической границе ∂K компакта K, то в дальнейшем мы будем отождествлять алгебру $A(K)$ с ее сужением на ∂K.

Цель настоящей работы — описание равномерных алгебр на ∂K, содержащих в качестве подалгебры алгебру $A(K)$. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть компакт K удовлетворяет следующим условиям:*

1) *внутренность K° состоит из конечного числа компонент связности $G_1, \cdots, G_n$;*

2) *для каждой компоненты G_i существует хотя бы одна граничная точка $\xi_i \in \partial G_i$ и круг $U(\xi_i)$ с центром в этой точке, что пересечение $U(\xi_i) \cap K$ имеет в дополнении конечное число компонент связности.*

Тогда произвольная равномерная алгебра B на ∂K, содержащая в себе $A(K)$, совпадает с одной из алгебр вида $A(K')$, где компакт K' возникает из K в результате удаления некоторых компонент связности K°.

В частности, если компакт K имеет связную внутренность и существуют точка $\xi \in \partial K^\circ$ и круг $U(\xi)$ такие, что дополнение множества $U(\xi) \cap K$ имеет конечное число компонент, то алгебра B совпадает либо с $A(K)$, либо с $C(\partial K)$. Другими словами, любую непрерывную на ∂K функцию можно равномерно на ∂K аппроксимировать полиномами вида $\sum f_n h^n$, где $f_n \in A(K)$, h — произвольная непрерывная функция, не принадлежащая $A(K)$. В таких случаях говорят, что равномерная алгебра $A(K)$ максимальна на ∂K.

Понятие максимальной подалгебры, тесно связанное с вопросами равномерной аппроксимации, было введено Дж. Вермером [1], который установил максимальность алгебры $A(K)$ в случае, когда K—единичный круг. Ставшая уже классической теорема Вермера, выявив важность понятия максимальной подалгебры, стимулировала появление большого количества работ, посвященных непосредственно теории максимальных равномерных алгебр. Укажем, в частности, на работы К. Гофмана, И. Зингера [2], Е. А. Горина, В. М. Золотаревского [3], П. Пейпа [4], в которых изучались максимальные алгебры аналитических функций.

После работы Вермера естественно возникала задача о непосредственном обобщении теоремы о максимальности на произвольные компактные подмножества (с непустой внутренностью) комплексной плоскости. Первый результат в этом направлении принадлежит Э. Бишопу [5]. Он установил максимальность алгебры $A(K)$ на ∂K в предположении полиномиальной выпуклости K и связности K°. Согласно более общей теореме Т. Гамелина и X. Росси [6] предположение о полиномиальной выпуклости K можно заменить условием: каждая точка внутренности K° обладает единственной представляющей мерой Йенсена на ∂K. Наиболее тонкий результат получил В. Н. Сеничкин [7], согласно которому максимальность алгебры $A(K)$ вытекает из связности K° и из условия: совокупность точек пика алгебры $A(K)$ образует множество единственности для субгармонических на K° функций.

Подчеркнем, что связность внутренности компакта K есть необходимое условие максимальности $A(K)$ на ∂K. Является ли оно также и достаточным, неизвестно.

В даннной работе рассматривается тот случай, когда внутренность K разлагается на конечное число компонент связности и устанавливается, что при выполнении условия 2) теорема 1, все равномерные алгебры на ∂K, содержащие в себе $A(K)$ в качестве замкнутой подалгебры, допускают простое и естественное описание. Причем, как мы убедимся в процессе доказательства, теорема 1 останется справедливой, если в ней условие 2) заменить условиями Гамелина—Росси или Сеничкина.

Теорема 1 допускает эквивалентную формулировку в терминах подалгебр конечного типа. Понятие подалгебры конечного типа, введенное в нашей работе [8] и обобщающее понятие максимальной алгебры, заключается в следующем.

Пусть A — равномерная алгебра на произвольном компактном пространстве X. Рассмотрим следующую конечную цепочку длины k равномерных алгебр на X (включения строгие):

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{k-1} \subset A_k = C(X). \tag{1}$$

Если при всех $i\,(0 \leqslant i \leqslant k-1)$ между A_i и A_{i+1} не существует промежуточных равномерных подалгебр, то цепочка (1) называется неуплотняемой. По определению равномерная алгебра A называется подалгеброй конечного типа, а именно типа n, алгебры $C(X)$, если всякая цепочка вида (1) имеет длину $\leqslant n$ и существует хотя бы одна неуплотняемая цепочка в точности длины n. Очевидно, максимальные подалгебры суть подалгебры типа 1.

Теперь теорему 1 можно сформулировать следующим образом: если компакт K удовлетворяет условию 2), то алгебра $A(K)$ является подалгеброй конечного типа алгебры $C(\partial K)$ тогда и только тогда, когда внутренность компакта K состоит из конечного числа компонент связности. При этом тип алгебры $A(K)$ совпадает с числом компонент K°.

Опишем в общих чертах содержание статьи. В п. 2° задача об описании промежуточной подалгебры сводится к инъективности естественного отображения из пространства максимальных идеалов этой подалгебры в компакт K и к одной теореме о равномерной аппроксимации. В п. 3 мы устанавливаем инъективность этой проекции. В п. 4° собраны вспомогательные результаты об ортогональных мерах. В п. 5° завершается доказательство основной теоремы.

Основные результаты работы были анонсированы в заметке [9].

2°. Пусть B — произвольная равномерная алгебра на ∂K, содержащая в себе $A(K)$. Обозначим через $M(B)$ компактное пространство максимальных идеалов алгебры B, т. е. множество всех нетривиальных комплексных гомоморфизмов B, наделенное слабо* топологией, и через $\Gamma(B)$ — ее границу Шилова.

Напомним. что граница Шилова $\Gamma(A(K))$ алгебры $A(K)$ гомеоморфна ∂K (следовательно, и $\Gamma(B)=\partial K$), а пространство $M(A(K))$ ее максимальных идеалов естественно отождествляется с компактом K ([10], стр. 49). В связи с последним, рассмотрим непрерывное отображение $\pi: M(B)\to K$, сопоставляющее каждому комплексному гомоморфизму алгебры B его сужение на $A(K)$. Отображение π совпадает, как легко видеть, с преобразованием Гельфанда $\hat{z}$ функции z как элемента алгебры B. Для каждой компоненты G внутренности K° имеются две возможности: либо G целиком содержится в образе $\pi(M(B))$ отображения π, либо найдется точка $\lambda_0\in G$, не отвечающая никакому гомоморфизму алгебры B. Последний случай означает, что преобразование Гельфанда элемента $z-\lambda_0$ не обращается в нуль на $M(B)$ и, следовательно, функция $\dfrac{1}{z-\lambda_0}$ принадлежит B.

Обратимся к первому случаю: $G\subset\pi(M(B))$. Отметим, прежде всего, что, вообще говоря, отображение π не обязано быть инъективным. Предположим тем не менее однозначность отображения λ^{-1} на G. Тогда π^{-1} будет однозначным и на замыкании компоненты G (см. [11], теорема 1.7). Следовательно, полагая $g(\lambda)=\hat{g}(\pi^{-1}(\lambda))$ для $\lambda\in G$, мы можем любую функцию $g\in B$ непрерывно продолжить с ∂K на компоненту G. Оказываетя это продолжение является аналитическим. В самом деле, пусть замкнутый круг $\overline{U}$ целиком содержится в G, и $B_{\overline{U}}$ — равномерное замыкание сужений функций из B на $\overline{U}$. Согласно локальному принципу максимума модуля ([10], стр. 127) $\Gamma(B_{\overline{U}})\subset\partial\overline{U}$ и поскольку алгебра B, а значит и $B_{\overline{U}}$, содержит все многочлены, то по теореме Вермера о максимальности $B_{\overline{U}}=A(\overline{U})$. В частности, $g\in$ $\in A(\partial K\cup G)$.

Таким образом, каждая равномерная алгебра B, содержащая в себе $A(K)$, выделяет из совокупности компонент связности K° семейство $\{G_j\}$, каждая из которых содержит такую точку λ_j, что $\dfrac{1}{z-\lambda_j}\in B$.

Если к тому же проекция π иньективна, то B содержится в алгебре $A(K \setminus \cup G_j)$.

Следовательно, для доказательства теоремы 1 достаточно установить, что 1) отображение π иньективно; 2) если λ_j принадлежит компоненте G_j внутренности компакта K, то равномерная алгебра на ∂K, порожденная элементами из $A(K)$ и системой функций $\frac{1}{z-\lambda_j}$, совпадает с алгеброй $A(K \setminus \cup G_j)$.

3°. В этом пункте мы показываем, что какова бы ни была алгебра B, содержащая $A(K)$, условие 2) теоремы 1 обеспечивает однозначность π^{-1} на K° (точнее на тех компонентах связности K°, которые целиком содержатся в образе отображения π).

Предварительно заметим, что прообраз $\pi^{-1}(\zeta)$ точки пика ζ алгебры $A(K)$ обязан быть одноточечным. В самом деле, пусть x_1, $x_2 \in \pi^{-1}(\zeta)$ и μ_1, μ_2 — положительные меры на $\Gamma(B) = \partial K$, представляющие, соответственно, точки x_1 и x_2. Тогда для любого $f \in A(K)$ будем иметь

$$\int\limits_{\partial K} f d\mu_1 = \int\limits_{\partial K} f d\mu_2 = f(\zeta),$$

т. е. две отличные друг от друга положительные меры представляют точку пика, что невозможно.

Основному результату этого пункта предпошлем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $R(K)$ — равномерная алгебра тех непрерывных функций на K, которые аппроксимируются на K рациональными дробями с полюсами вне K, и V — открытое (в индуцированной топологии) подмножество компакта K. Тогда точки пика алгебры $R(\overline{V})$, принадлежащие V, будут точками пика и для алгебры $R(K)$.*

Доказательство. Пусть точка $\zeta \in V$ есть точка пика для алгебры $R(\overline{V})$. Согласно известному критерию Гликсберга ([10], стр. 85) это означает, что $\nu(\{\zeta\}) = 0$ для любой меры ν, ортогональной к $R(\overline{V})$. Мы должны доказать это же равенство при всех $\mu \perp R(K)$.

Выберем для этого открытое множество $W \subset K$ так, чтобы $\zeta \in W \subset \overline{W} \subset V$. Тогда множества V и $K \setminus \overline{W}$ будут образовывать открытое покрытие компакта K. По теореме Бишопа о расщеплении ([10], стр. 74) всякая мера $\mu \perp R(K)$ разлагается в сумму мер $\mu_1 + \mu_2$, где $\mathrm{supp}(\mu_1) \subset V$, $\mathrm{supp}(\mu_2) \subset K \setminus \overline{W}$, $\mu_1 \perp R(\overline{V})$ и $\mu_2 \perp R(K \setminus \overline{W})$. В частности, $\mu(\{\zeta\}) = \mu_1(\{\zeta\}) = 0$.

Теорема 2. *Пусть для компоненты G внутренности компакта K найдутся точка $\zeta \in \partial G$ и открытый круг U с центром в ζ такие, что дополнение пересечения $\overline{U} \cap K$ состоит из конечного числа компонент связности. Тогда для любой равномерной на ∂K алгебры $B \supset A(K)$ такой, что $G \subset \pi(M(B))$, отображение π^{-1} будет однозначным на G.*

Доказательство. В силу конечносвязности дополнения множества $F=\overline{U}\cap K$ имеем: 1) $A(F)=R(F)$; 2) каждая точка границы $\partial F=(\partial U\cap K)\cup(U\cap\partial K)$ является точкой пика для алгебры $R(F)$; 3) каждая внутренняя точка компакта F обладает единственной представляющей мерой Йенсена на ∂F. Поскольку $R(F)\subset R(\overline{U\cap K})$, то точки множества $U\cap\partial K$ будут точками пика и для $R(\overline{U\cap K})$, а по лемме 1 и для алгебры $R(K)$, следовательно, для $A(K)$*. Кроме того, заменив, если это необходимо, круг U на круг меньшего радиуса мы можем считать, что $\partial U\cap K$ есть собственное подмножество окружности ∂U и, в частности, полиномиально выпукло.

Покажем одноточечность слоя $\pi^{-1}(\lambda)$ над произвольной точкой $\lambda\in F^{\circ}$. Обозначим через B_0 равномерную алгебру, полученную посредством замыкания сужений преобразований Гельфанда элементов B на компакте $\pi^{-1}(F)$. Нам будет удобнее рассматривать слой $\pi^{-1}(\lambda)$ в качестве замкнутого подмножества $M(B_0)$, причем, как нетрудно убедиться, $\Gamma(B_0)\subset\pi^{-1}(\partial F)$.

Пусть $x_1,\ x_2\in\pi^{-1}(\lambda)$ и $\mu_1,\ \mu_2$— соответсвующие этим точкам положительные представляющие меры Йенсена на $\pi^{-1}(\partial F)$. Тогда меры $\tilde{\mu}_1=\pi^{-1}\circ\mu_1$ и $\tilde{\mu}_2=\pi^{-1}\circ\mu_2$ будут определены на ∂F и служить положительными представляющими (относительно алгебры $A(F)$) мерами Йенсена для точки λ. Следовательно, $\tilde{\mu}_1=\tilde{\mu}_2$, а отсюда в силу однозначности π^{-1} на $U\cap\partial K$ вытекает совпадение мер μ_1 и μ_2 на $U\cap\partial K$. Выберем функцию $g\in B$ так, чтобы $g(x_1)=1$ и $g(x_2)=0$, положим $\nu=g(\mu_1-\mu_2)$ и рассмотрим соответствующую ей меру $\tilde{\nu}$. Понятно, что мера $\tilde{\nu}$ равна нулю на $U\cap\partial K$ и в силу выбора g является (комплексной) представляющей мерой для точки λ. Поэтому для любой функции $f\in A(F)$ будем иметь.

$$\int\limits_{\partial F} f\,d\tilde{\nu}=\int\limits_{\partial U\cap K} f\,d\tilde{\nu}=f(\lambda),$$

что невозможно, поскольку $\partial U\cap K$ полиномиально выпукло и не содержит λ.

Таким образом, π^{-1} однозначно на открытой части $F^{\circ}\cap G$ компоненты G. Теперь, используя, точно такие же соображения что и выше, можно доказать однозначность π^{-1} на открытом подмножестве области G, имеющем с $F^{\circ}\cap G$ непустое пересечение, и т. д.

Теорема доказана.

Замечания. 1) Из условия Гамелина—Росси немедленно следует однозначность π^{-1}, так как неодноточенность слоя $\pi^{-1}(\lambda)$ над некоторой точкой $\lambda\in K^{\circ}$ приводит к существованию нескольких мер Йенсена, одновременно представляющих точку λ.

---

* Последнее утверждение можно вывести и из известного критерия М. С. Мельникова о точках пика [12].

2). Условие Сеничкина, как показано в его работе [7], обеспечивает гомеоморфность отображения π.

4°. Здесь приводятся вспомогательные результаты, необходимые для доказательства в п. 5° аппроксимационной теоремы. В частности, мы распространим на алгебру $A(K)$ известную лемму Бишопа о расщеплении ортогональной меры.

Установим сперва одно утверждение о слабо* замкнутых подпространствах сопряженного пространства.

Лемма 2. *Пусть X— сопряженное пространство некоторого банахового пространства, и пусть Y и Z — ее слабо* замкнутые подпространства, сумма $Y+Z$ которых также слабо* замкнута. Если подпространство $Y_1 \subset Y$ слабо* замкнуто и содержит в себе $Y \cap Z$, то и сумма $Y_1 + Z$ будет слабо* замкнутой.*

Доказательство. Убедимся сначала, что сумма $Y_1 + Z$ замкнута относительно нормы пространства X. Для этого рассмотрим фактор-пространство $X/Y \cap Z$ и непрерывное фактор-отображение $\rho: X \to X/X \cap Z$. Очевидно, подпространства $\rho(Y_1)$ и $\rho(Z)$ замкнуты в топологии нормы фактор-пространства. Но тогда будет замкнутой и прямая сумма $\rho(Y_1) + \rho(Z) = \rho(Y_1 + Z)$, следовательно, ее прообраз $Y_1 + Z$ будет замкнут в X.

Теперь в силу непрерывности операции сложения $(y, z) \to y + z$ и по теореме об открытом отображении мы можем указать константу $\gamma > 0$ такую, что для любого $x \in Y_1 + Z$ найдутся такие $y \in Y_1$ и $z \in Z$, что

$$x = y + z \text{ и } \|y\| + \|z\| < \gamma \|x\|.$$

В частности, замкнутый единичный шар подпространства $Y_1 + Z$ содержится в $S + T$, где S и T — замкнутые шары радиуса γ подпространств Y_1 и Z, соответственно. Так как S и T слабо* компактны, а отображение $(y, z) \to y + z$ слабо* непрерывно, то и $S + T$ слабо* компактно. По теореме Крейна—Шмульяна ([13], стр. 465) сумма $Y_1 + Z$ слабо* замкнута.

Лемму 2 мы будем применять в ситуации, когда в качестве X рассматривается пространство $M(K)$ всех конечных комплексных регулярных борелевских мер на компакте K, служащем сопряженным пространством для алгебры $C(K)$. Если E — некоторое подпространство $C(K)$ (соответственно, если L — подпространство $M(K)$), то через $E^{\perp}$ (соответственно, ${}^{\perp}L$) будет обозначаться его аннулятор. Известно, что $E^{\perp}$ — слабо* замкнуто в $M(K)$, а ${}^{\perp}L$ суть замкнутое по норме подпространство $C(K)$.

Если F — замкнутое подмножество компакта K, то, имея в виду теорему Титце о продолжении (с сохранением нормы) непрерывной функции с F на K, мы можем рассматривать алгебру $A(K)$ (или алгебру $R(K)$) в качестве замкнутой подалгебры $A(F)$ (соответственно, $R(F)$), а пространство $A(F)^{\perp}$ (или $R(F)^{\perp}$) в качестве слабо* замкнутого подпространства в $A(K)^{\perp}$ (соответственно, $R(K)^{\perp}$).

Напомним также, что мера $\mu \in M(K)$ ортогональна к алгебре $R(K)$ в том и только в том случае, когда ее преобразование Коши $\hat{\mu}(\lambda) = \int \frac{d\mu(z)}{z-\lambda}$ обращается в нуль всюду вне компакта K.

Лемма 3. *Пусть U_1, U_2 — такое открытое покрытие компакта K, что $A(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2) = R(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2)$ и пусть $\mu \in A(K)^{\perp}$. Тогда найдутся такие меры $\mu_1 \in A(\overline{U}_1)^{\perp}$ и $\mu_2 \in A(\overline{U}_2)^{\perp}$, что $\mu = \mu_1 + \mu_2$.*

Доказательство. Согласно лемме Бишопа о расщеплении пространство $R(K)^{\perp}$ разлагается в сумму своих слабо* замкнутых подпространств $R(\overline{U}_1)^{\perp}$ и $R(\overline{U}_2)^{\perp}$.

Если положить $L = R(\overline{U}_1)^{\perp} \cap R(\overline{U}_2)^{\perp}$, то очевидно, $R(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2)^{\perp} \subset \subset L$. Обратно, если $\nu \in L$, то $\hat{\nu}(\lambda)$ обращается в нуль вне $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$, т. е. $\nu \in R(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2)^{\perp}$. Следовательно,

$$R(\overline{U}_1)^{\perp} \cap R(\overline{U}_2)^{\perp} = R(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2)^{\perp} = A(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2)^{\perp}.$$

Согласно лемме 2 (если применить ее двукратно) сумма $A(\overline{U}_1)^{\perp} + A(\overline{U}_2)^{\perp}$ слабо* замкнута, и, конечно, содержится в $A(K)$.

Заметим теперь, что всякая непрерывная на K функция, принадлежащая аннулятору ${}^{\perp}(A(\overline{U}_1)^{\perp} + A(\overline{U}_2)^{\perp})$, аналитична в каждой внутренней точке множеств $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ и, следовательно, содержится в $A(K)$ Другими словами, ${}^{\perp}(A(\overline{U}_1)^{\perp} + A(\overline{U}_2)^{\perp}) = A(K)$ или, что то же, $A(\overline{U}_1)^{\perp} + A(\overline{U}_2)^{\perp} = A(K)^{\perp}$. Лемма доказана.

5°. В этом пункте мы завершаем доказательство основной теоремы 1. Вспомним, что согласно результатам п. п. 2° и 3° равномерная алгебра B обязана содержаться в алгебре $A(K \setminus \cup G_j)$, причем в каждой из компонент C_j можно выделить такую точку λ_j, что $\frac{1}{z-\lambda_j} \in B$. Нам осталось установить, что равномерная алгебра на ∂K, порожденная элементами алгебры $A(K)$ и конечной системой функций $\left\{\frac{1}{z-\lambda_j}\right\}$ совпадет с алгеброй $A(K \setminus \cup G_j)$.

С этой целью мы докажем более общую теорему, не предполагающую, в отличие от теорем 1 и 2, каких-либо ограничений на компакт K и представляющую, быть может, самостоятельный интерес.

Теорема 3. *Пусть K — произвольный компакт на комплексной плоскости, G — компонента связности множества внутренних точек K, λ_0 — любая точка из G. Тогда равномерная алгебра на ∂K, порожденная элементами $A(K)$ и функцией $\frac{1}{z-\lambda_0}$, совпадает с алгеброй $A(K \setminus G)$.*

Доказательство. Для удобства обозначим через A_0 равномерную алгебру $\left[A(K), \frac{1}{z-\lambda_0}\right]$. Очевидно, $A_0 \subset A(K \setminus G)$, так что нам надо доказать обратное включение.

Пусть μ — ортогональная к алгебре A_0 мера, сосредоточенная на множестве $K \setminus G$.

Выберем в компоненте G последовательность открытых областей $\{U_n\}$, подчиненных следующим условиям: 1) $\bigcup U_n = G$; 2) $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$; 3) компакт $E_n = \overline{U}_{n+1} \setminus U_n$ является множеством рациональной аппроксимации, т. е. $R(E_n) = A(E_n)$ (см. [14], стр. 19). Поскольку множества $V_n = K \setminus \overline{U}_n$ и U_{n+1} составляют открытое покрытие компакта K, причем пересечение $\overline{V}_n \cap \overline{U}_{n+1}$ совпадает с E_n, то мера μ, принадлежащая, очевидно, $A(K)^{\perp}$, по лемме 3 разлагается в сумму $\mu_1 + \mu_2$, где $\mu_1 \in A(\overline{V}_n)^{\perp}$, $\mu_2 \in A(\overline{U}_{n+1})^{\perp}$.

Рассмотрим преобразования Коши указанных мер. Так как носитель меры μ содержится в $K \setminus G$, то функция $\hat{\mu}(\lambda)$ аналитична на G, а ее производная любого порядка

$$\hat{\mu}^{(k)}(\lambda) = k! \int \frac{d\mu}{(z-\lambda)^k}$$

обращается в нуль в точке λ_0, поскольку $\mu \perp A_0$. Так что $\hat{\mu}(\lambda) = 0$ на G. Далее, $\hat{\mu}_1 = 0$ вне $\overline{V}_n$ (в частности, на U_n), а функция $\hat{\mu}_2$ равна нулю вне U_{n+1} и, в силу равенства $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, на области U_n. Следовательно, $\hat{\mu}_2 = 0$ вне компакта E_n, т. е. $\mu_2 \in R(E_n)^{\perp} = A(E_n)^{\perp}$. Но $A(\overline{V}_n) \subset A(E_n)$, поэтому $\mu_2 \in A(\overline{V}_n)^{\perp}$, а значит и мера μ ортогональна к алгебре $A(\overline{V}_n)$. Это означает, что любую функцию алгебры $A(\overline{V}_n)$ можно равномерно на $K \setminus G$ аппроксимировать элементами алгебры A_0.

По теореме С. Н. Мергеляна (см. [10], стр. 277) каждая функция алгебры $A(K \setminus G)$ может быть равномерно на $K \setminus G$ аппроксимирована такими функциями из $A(K \setminus G)$, которые аналитичны в некоторой окрестности границы компоненты G, т. е. принадлежат $A(\overline{V}_n)$ при некотором n. Таким образом, $A(K \setminus G) \subset A_0$. Теорема 3, а вместе с ней и теорема 1, доказаны.

Следствие. Пусть компакт K с непустой внутренностью является множеством рациональной аппроксимации ($R(K) = A(K)$), и пусть $\{G_1, \cdots, G_n\}$ — некоторое семейство компонент связности внутренности K°. Тогда компакт $K' = K \setminus \bigcup_{1=1}^{n} G_j$ также является множеством рациональной аппроксимации.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку λ_j из каждой компоненты G_j. Тогда

$$R(K') = \left[R(K), \frac{1}{z-\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{z-\lambda_n} \right] =$$

$$= \left[A(K); \frac{1}{z-\lambda_1}; \cdots, \frac{1}{z-\lambda_n} \right] = A(K').$$

Замечание. Это следствие может быть получено и из известного критерия А. Г. Витушкина о рациональной аппроксимации [15].

Замечание. Аналогичное теореме 3 утверждение, относящееся к тому случаю, когда из компакта K удаляются все компоненты связности K°, установил А. Дэви [16], основываясь на общих свойствах равномерных алгебр. Соответствующий этому случаю вариант следствия (если $R(K) = A(K)$, то $R(\partial K) = c(\partial K)$), тоже хорошо известен ([17], стр. 74). Нам неизвестно, справедлива ли теорема 3 в общем случае, когда из K удаляется произвольное бесконечное семейство компонент внутренности K°.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 9.VI.1988.

Բ. Թ. ԲԱՏԻԿՅԱՆ, Ս. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. $A(K)$ հանրահաշիվը պարունակող հավասարաչափ հանրահաշիվների մասին *(ամփոփում)*

Դիցուք K-ն կոմպակտ ենթաբազմություն է կոմպլեքս հարթությունում, իսկ $A(K)$-ն՝ K-ի վրա անընդհատ և K-ի ներքին կետերում անալիտիկ ֆունկցիաների հանրահաշիվն է։

Աշխատանքում տրվում է այն հավասարաչափ հանրահաշիվների նկարագրումը, որոնք սահմանված են K-ի եզրի վրա և պարունակում են $A(K)$-ն։ Մասնավոր դեպքում, երբ K-ի ներքին կետերի բազմությունը կապակցված է, այդ նկարագրումը բերում է $A(K)$ հանրահաշվի մաքսիմալությանը։ Ապացուցված է հետևյալ մոտարկման թեորեմը. դիցուք G-ն՝ K-ի ներքին կետերի բազմության կապակցված կոմպոնենտն է և $\lambda \in G$ Այդ $\frac{1}{z-\lambda}$ ֆունկցիայով և $A(K)$-ի էլեմենտներով ծնված հանրահաշիվը համընկնում է $A(K \setminus G)$-ի հետ։

B. T. BATIKIAN, S. A. GRIGORIAN. *On untform algebras, which contained* *A (K)* (summary)

Let K be a compact subset of the complex plane with nonempty interior, $A(K)$ be the algebra of continuons functions on K, which are analytic in the interior of K

In the paper for sufficiently large class of compacts a description of uniform algebras, which are defined on the boundary of K and containe $A(K)$ as a subalgebra, is given. Preliminary the injectivity of the natural map of the space of maxima ideals of superalgebra of $A(K)$ in the compact K is established. Further the following approximation theorem is proved: let G be connected component of the interior of K, λ be an arbitrary point from G. Then the uniform algebra on ∂K, gencrated by the elements of $A(K)$ and by the function $\frac{1}{z-\lambda}$ co incide with the algebra $A(K \setminus G)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Wermer.* On algebras of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 6 1953. 866—869.
2. *K. Hoffman, I. M. Singer.* Maximal algebras of continuous functions. Acta Math., 103, 3, 1960. 217—241.
3. *Е. А. Горин, В. М. Золотаревский.* Максимальные инвариантные подалгебры в алгебрах с инволюцией, Мат. сб., 85, 3, 1971, 373—387.
4. *P. J. de Paepe.* Maximality in function algebras, J. Lond. Math. Soc. (2), 22, 1980 345—354.
5. *Э. Бишоп.* Структура некоторых мер. Сб. Некоторые вопросы теории приближений, М., ИЛ, 1963, 74—86.
6. *T. Gamelin, H. Rossi.* Jensen measures and algebras of functions, Сб. Functoin algebras, Chicago, Scott—Foresman, 1966.

7. *В. Н. Сеничкин.* Субгармонические функции и аналитическая структура в пространстве максимальных идеалов равномерной алгебры, Мат. сб., 108, 1, 1979, 115—133.
8. *Б. Т. Батикян, С. А. Григорян.* О функциональных алгебрах конечного типа, УМН 29, 6, 1974, 155—156.
9. *Б. Т. Батикян, С. А. Григорян.* О равномерных алгебрах, содержащих $A(K)$, УМН. 40, 2, 1985, 169—170.
10. *Т. Гамелин.* Равномерные алгебры, М., Мир, 1973.
11. *J.—E. Bjork.* Analytic structures in the maximal ideal space of a uniform algebra, Arkiv for Matematik, 8, 3, 1971. 239—244.
12. *М. С. Мельников.* Оценка интеграла Коши по аналитической кривой, Мат. сб., 71, 4, 1966, 503—514.
13. *Н. Данфорд, Дж. Шварц.* Линейные операторы, общая теория, М., ИЛ. 1962.
14. *Дж. Уолш.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., ИЛ. 1961.
15. *А. Г. Витушкин.* Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений, УМН, 22, 6, 1967, 141—199.
16. *A. M. Davie.* Algebras of analytic functions on plane sets, Dissertation, Aarhus Univ., 1970.
17. *L. Zalcman.* Analytic capacity and rational approximation, Lect. Not. Math., 50, 1968.