

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.21

А. В. КАКОСЯН

ОБ ОЦЕНКЕ БЛИЗОСТИ ДВУМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
С МОНОТОННО ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ
ИНТЕНСИВНОСТИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАРШАЛЛА-ОЛКИНА

Хорошо известна значительная роль, которую играют одномерные распределения с монотонно возрастающей функцией интенсивности (ВФИ-распределения) в математической теории надежности (см. [1]). При этом существенный интерес представляет сравнение ВФИ-распределения с показательным. В [2] и [3] приведены оценки близости ВФИ-распределения к показательному, выраженные в терминах первого момента и значения плотности распределения в нуле. Однако для теории надежности весьма важным является рассмотрение многомерного случая, в котором роль показательного распределения переходит к распределению Маршалла—Олкина (см. [4]).

Ниже мы докажем неравенство, являющееся аналогом утверждения [3], ограничившись, для простоты изложения, двумерным случаем.

Как известно (см., например, [4]) распределение F называется двумерным с возрастающей функцией интенсивности (кратко ВФИ-распределением), если

$$\frac{\bar{F}_1(x_1 + t)}{\bar{F}_1(x_1)}, \frac{\bar{F}_2(x_2 + t)}{\bar{F}_2(x_2)}, \frac{\bar{F}(x_1 + t, x_2 + t)}{\bar{F}(x_1, x_2)},$$

являются невозрастающими функциями по каждой из переменных x_1, x_2 при любом фиксированном $t > 0$. Здесь $F_i (i = 1, 2)$ — маргинальные распределения, соответствующие F , а $\bar{F}(x_1, x_2) = P\{X_1 > x_1, X_2 > x_2\}$, где (X_1, X_2) — двумерная случайная величина с функцией распределения F . Поскольку координаты X_1, X_2 рассматриваемой двумерной случайной величины имеют в приложениях смысл времени безотказной работы некоторого устройства, то мы будем считать, что $X_i > 0$ ($i = 1, 2$), т.е. $\bar{F}(+0, +0) = 1$. Обозначим

$$D_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq x_2 \geq 0\}, D_2 = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq x_2\}.$$

Теорема. Пусть $F(x_1, x_2)$ — ВФИ-распределение. Допустим, что функция $\bar{F}$ дифференцируема в каждом из множеств D_i , имеет там ограниченные частные производные:

$$\left| \frac{\partial \bar{F}(x_1, x_2)}{\partial x_j} \right| \leq M, (x_1, x_2) \in D_i$$

и существуют пределы

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0), (x_1, x_2) \in D_i} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_j}(x_1, x_2) = a_{ij}, \quad i=1, 2; j=1, 2.$$

Обозначим

$$\gamma = \min \left\{ -a_{11} \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{x} \int_0^x \bar{F}(x, y) dy dx - a_{12} \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{x^2} \int_0^x y \bar{F}(x, y) dy dx - \right. \\ \left. - a_{21} \int_0^{\bar{y}} \frac{1}{y^2} \int_0^y x \bar{F}(x, y) dx dy - a_{22} \int_0^{\bar{y}} \frac{1}{y} \int_0^y \bar{F}(x, y) dx dy \right\}.$$

Тогда

$$\sup_{x_1 > 0, x_2 > 0} |\bar{F}(x_1, x_2) - \exp \{a_{21} x_1 + a_{12} x_2 + (a_{11} - a_{21}) \max(x_1, x_2)\}| \leq C \sqrt{1-\gamma} \sqrt{M}, \quad (1)$$

где C — абсолютная постоянная.

Доказательство. Известно, что если (X_1, X_2) имеет ВФИ-распределение, то для любых $a > 0, b > 0$ величина $\max(a X_1, b X_2)$ имеет одномерное ВФИ-распределение. Выберем $\alpha \in]0, 1]$ и рассмотрим величину $Y_\alpha = \min(\alpha^{-1} X_1, X_2)$. Ясно, что $P(Y_\alpha \geq x) = \bar{F}(\alpha x, x)$. В силу результата [3]

$$\sup_{x > 0} |\bar{F}(\alpha x, x) - \exp \{(a_{21} + a_{22}) x\}| \leq \\ \leq 2 \left[1 + (a_{21} + a_{22}) \int_0^{\bar{x}} \bar{F}(\alpha x, x) dx \right].$$

Интегрируя последнее неравенство по α в пределах от нуля до единицы, получаем

$$\int_0^1 \sup_{x > 0} |\bar{F}(\alpha x, x) - \exp \{(a_{21} + a_{22}) x\}| d\alpha \leq \\ \leq 2 \left[1 + \int_0^1 (a_{21} + a_{22}) \int_0^{\bar{x}} \bar{F}(\alpha x, x) dx d\alpha \right] = \\ = 2 \left[1 + a_{22} \int_0^{\bar{x}} dx \int_0^1 \bar{F}(\alpha x, x) d\alpha + a_{21} \int_0^{\bar{x}} dx \int_0^1 \alpha \bar{F}(\alpha x, x) d\alpha \right] = \\ = 2 \left[1 + a_{22} \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{x} \int_0^x \bar{F}(y, x) dy dx + a_{21} \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{x^2} \int_0^x y \bar{F}(y, x) dy dx \right].$$

Таким образом, если обозначить

$$G(\alpha) = \sup_{x > 0} |\bar{F}(\alpha x, x) - \exp \{(a_{21} + a_{22}) \alpha x\}|, \quad \text{то}$$

$$\begin{aligned}
\|G(\alpha)\|_1 \leq & 2 \left[1 + a_{12} \int_0^1 \frac{1}{x^2} \int_0^x y \bar{F}(y, x) dy dx + \right. \\
& \left. + a_{22} \int_0^1 \frac{1}{x} \int_0^x \bar{F}(y, x) dy dx \right] \leq 2(1 - \gamma),
\end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_1$ означает норму в пространстве $L^1([0, 1])$. В силу результата [5] отсюда следует, что

$$\sup_{0 < \alpha < 1} |G(\alpha)| \leq C \sqrt{1 - \gamma} \sqrt{M}, \quad \left(C \leq 2 \left(1 + \frac{8}{\pi} \right) \sqrt{\frac{8}{\pi}} \right).$$

Обозначая $\alpha x = x_1$, $x = x_2$, отсюда находим, что

$$\sup_{(x_1, x_2) \in D_1} |\bar{F}(x_1, x_2) - \exp(a_{21} x_1 + a_{22} x_2)| \leq C \sqrt{1 - \gamma} \sqrt{M}.$$

Аналогичным образом, рассматривая величину $Z_\beta = \min(X_1, \beta^{-1} X_2)$, $\beta \in]0, 1]$, и применяя к ней рассуждения, изложенные выше, для Y_α получаем

$$\sup_{(x_1, x_2) \in D_1} |\bar{F}(x_1, x_2) - \exp(a_{11} x_1 + a_{12} x_2)| \leq C \sqrt{1 - \gamma} \sqrt{M}. \quad (3)$$

Однако луч $x_1 = x_2$, $x_2 \geq 0$ входит как в D_1 , так и в D_2 . Поэтому

$$\left. \frac{d}{dx} \bar{F}(x_1, x) \right|_{x=0} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_1}(0, 0) + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_2}(0, 0) = a_{11} + a_{12} - a_{21} + a_{22}.$$

Отсюда и из (2), (3) вытекает требуемое неравенство (1).

Ереванский институт
народного хозяйства

Поступила 11.XII. 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Барлоу, Ф. Прошан. Математическая теория надежности, М., 1969, 488 с.
2. Т. А. Азларов, И. А. Володин. Характеризационные задачи, связанные с показательным распределением, Ташкент, ФАН, 1982, 98 с.
3. А. Обретенов, С. Рачев. Устойчивость некоторых характеризационных свойств экспоненциального закона, В сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей: М., ВНИИСИ, 1983, 79—87.
4. Р. Барлоу, Ф. Прошан. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, М., Наука, 1984, 327 с.
5. А. В. Какосян. О сравнении норм в $L_p(R^1)$ и $L_{p1}(R^1)$, Тезисы докладов 7-ой научной сессии ЕрИНХа, Ереван, 1987.