ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 4, 1989 Математика

УДК 517.51

К. С. КАЗАРЯН, А. С. САРГСЯН

РАСХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ЧИСЕЛЬСКОГО

1°. **Введение.** В настоящей работе получены оценки снизу для функций системы Франклина и с их помощью доказываются два результата, касающихся системы Чисельского [1].

Система Франклина определяется с помощью функций Шаудера:

$$\varphi_0(t)=1;\ \varphi_n(t)=\int\limits_0^t \chi_n(\tau)\,d\tau,\ t\in[0,\ 1],\ n=1,\ 2,\cdots,$$

где $\chi_n(n=1,\ 2,\cdots)$ — функции системы Хаара (см. напр., [2]). Система Франклина получается из системы Шаудера с помощью ортогонализации методом Шмидта:

$$f_n(t)=\sum_{i=0}^{n}\lambda_{in}\,\varphi_i(t), \tag{1}$$

где $\lambda_{nn}>0,\ n=1,\ 2,\cdots$ (см., напр., [22]).

Опираясь на результаты З. Чисельского ([3], [4]), мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $n=2^m+\nu,\ \ m\geqslant 2,\ \ 1\leqslant\nu<2^m$ *и точки* $t_i\,(i=0,\ 1,\cdots,\ n-1)$ *определяются условиями* (4). *Тогда для функции системы Франклина справедливы следующие оценки:*

1) $$|f_{n-1}(t)|+|f_n(t)|>\alpha\cdot 2^{m/2}$$

при $t\in[t_{2\nu-3},\ t_{2\nu-3}+2^{-m}]$ *и* $2\leqslant\nu\leqslant 2^m-1$;

2) $$|f_{2^m+1}(t)|+|f_{2^m+2}(t)|>\alpha\cdot 2^{m/2}\ \ \text{при}\ t\in\left[0,\ \frac{1}{2^{m+1}}\right];$$

3) $$|f_{2^{m+1}-2}(t)|+|f_{2^{m+1}-3}(t)|>\alpha\cdot 2^{m/2}\ \ \text{при}\ t\in\left[1-\frac{1}{2^{m+1}},\ 1\right],$$

где $\alpha>0$*—абсолютная константа.*

Используя эту теорему, мы докажем два факта, относящихся к некоторым равномерно ограниченным полным ортонормированным системам (ПОНС), которые получаются с помощью системы Франклина.

Определение 1. Равномерно ограниченную ПОНС $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ будем называть системой типа $(F-W)$, если функции $\{\omega_n\}_{n=2^m+1}^{2^{m+1}}$ можно получить ортогональным преобразованием набора функций Франклина $\{f_n\}_{n=2^m+1}^{2^{m+1}},\ m=0,\ 1,\cdots$.

Система Чисельского $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ является системой типа $(F-W)$, для которой соответствующие ортогональные преобразования определяются с помощью матриц Уолша—Пэли (см. [1]).

Первый вопрос, который мы рассматриваем для систем типа $(F-W)$ это вопрос о возможности мультипликативного дополнения до базисов L^p, $1<p<\infty$ их некоторых подсистем. Р. Боэсом и Г. Поллардом [5] была доказана следующая

Теорема А. *Пусть $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ — некоторая ПОНС на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого натурального числа N существует ограниченная функция $m(x)$ такая, что система $\{m(x)\,g_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ является полной в пространстве $L^2_{[a,b]}$.*

В дальнейшем Дж. Прайс и Р. Зинк [6] дали описание систем функций, обладающих таким свойством.

В работе Бен—Ами Брауна [7] было доказано, что если система $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом пространства $L^p_{[a,b]}$, $1\leqslant p<\infty$, то для любого натурального числа N можно найти такую ограниченную функцию $m(x)$, чтобы для любой функции $f\in L^p_{[a,b]}$ существовал ряд $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} c_k\, m(x)\cdot g_k(x)$, который в норме $L^p_{[a,b]}$ сходился бы к f.

В работах [8], [9], [10] был исследован вопрос о возможности мультипликативного дополнения до базиса в L^p, $1\leqslant p<\infty$ некоторых минимальных систем. В частности, была доказана следующая (см. [8 [9]).

Теорема Б. *Пусть $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$—равномерно ограниченная ПОНС на отрезке $[a, b]$. Пусть, далее, система $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обладает свойством* (А), *т. е. существует положительное число $\alpha>0$ такое, что для любого натурального числа N_1 найдется такое натуральное число N_2, что имеет место равенство*

$$\left|\bigcup_{k=N_1}^{N_2} E_k\right| = b-a,$$

где

$$E_k=\{x\in[a, b]:|g_k(x)|\geqslant \alpha\}.$$

Тогда для любого натурального числа N и измеримой функции $m(x)$ система $\{m(x)\,g_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ не является базисом ни в одном из пространств $L^p_{[a,b]}$, $1\leqslant p<\infty$.

В работе [11] была построена равномерно ограниченная ПОНС, из которой можно таким образом удалить конечный набор функций, чтобы оставшуюся систему функций умножением на некоторую ограниченную функцию превратить в базис пространств $L^p_{[0,1]}$, $1<p<\infty$. Это показывает, что теорема Б не имеет места, если снять требование, чтобы система $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяла условию (А). Отметим, что в пространстве L^1 теорема Б справедлива без требования о выполнении условия (А). Это следует из результатов работ [12], [13]; [14], в которых независимо было доказано, в частности. что равномерно ограниченная нормированная система не является базисом ни в одном весовом пространстве $L(\cdot)$.

Из теоремы 1 легко можно вывести, что для систем типа $(F-W)$ выполняется условие (А). Действительно, если $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ является системой типа $(F-W)$, тогда из теоремы 1 и определения 1 очевидно имеем:

$$\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \omega_n^2(x) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cdot 2^m, \quad x \in [0, 1]. \tag{2}$$

Таким образом, применяя теорему Б, получаем, что справедлива

Теорема 2. *Пусть* $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ *является системой типа* $(F-W)$. *Тогда, удаляя любой конечный набор функций из этой системы, оставшуюся систему функций невозможно умножением на некоторую измеримую функцию* $m(x)$ *превратить в базис некоторого пространства* $L^p_{[0,1]}$, $1 \leqslant p < \infty$.

Следующий вопрос, в изучении которого мы используем теорему 1, это вопрос о существовании расходящегося почти всюду ряда Фурье для систем типа $(F-W)$. В работе [15] можно найти обзор последних результатов для ортонормальных сплайн систем.

Историю вопроса, касающегося расходящихся рядов Фурье, мы подробно не будем обсуждать. С обстоятельным изложением этого вопроса можно познакомиться по статье П. Л. Ульянова [16]. Необходимо отметить, что первый пример расходящегося почти всюду ряда Фурье по тригонометрической системе был построен А. Н. Колмогоровым [17]. По всей видимости важную роль для дальнейших исследований сыграла также работа И. Стейна [18].

Общую теорему о расходимости рядов Фурье по произвольной равномерно ограниченной ОНС на множестве положительной меры доказал С. В. Бочкарев [19]. В дальнейшем мы используем теорему С. В. Бочкарева в некоторой видоизмененной форме, поэтому приведем ее в нужной нам формулировке.

Теорема В. *Пусть* $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *равномерно ограниченная ОНС на отрезке* $[0, 1]$. *Пусть, далее,* T — *некоторое множество положительной меры такое, что выполняется следующее условие: существует последовательность натуральных чисел* $\{N_j\}_{j=1}^{\infty}$, $N_1 < N_2 < \cdots$ *такая, что для любых* $x \in T$ *и* $N > 0$ *можно найти число* $m > N$, *чтобы*

$$\sum_{k=mN_j}^{(m+1)N_j-1} g_k^2(x) \geqslant \beta \cdot N_j,$$

где $\beta > 0$ *некоторая константа.*

Тогда существует функция $f \in L_{[0,1]}$ *такая, что ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x)$, *где* $a_k = \int_0^1 f(t) g_k(t)\, dt$ *неограниченно расходится на некотором множестве* $T_1 \subset T$, $|T_1| > 0$.

В справедливости такой формулировки теоремы Бочкарева можно убедиться, внимательно проследив за ходом доказательства этой теоремы. Отметим, что аналог теоремы Колмогорова для ПОНС не имеет места, так как для любого множества $E\subset[0, 1]$, имеющего неполную положительную меру, существует равномерно ограниченная ПОНС на отрезке [0, 1] такая, что ряд Фурье любой функций $f\in L_{[0,1]}$ почти всюду сходится на множестве E (см. [20]).

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть* $\{\omega_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *— ПОНС типа* $(F-W)$. *Существует интегрируемая на отрезке* [0, 1] *функция* f *такая, что ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\,\omega_k(x), \quad \text{где } a_k(f)=\int_0^1 f(t)\,\omega_k(t)\,dt, \tag{3}$$

неограниченно расходится почти всюду на отрезке [0, 1].

2°. Предварительные результаты. Используем обозначения работы [3]. Пусть $S_n[f]$ — n-я частичная сумма разложения функций по системе Франклина и

$$S_{n-1}\left[\sqrt{2^m}\,\varphi_n\right]=\psi,$$

где $n=2^m+\nu$, $m=0, 1,\cdots$, $1<\nu\leqslant 2^m$, а $\varphi_n(t)$ — n-я функция Шаудера.

Обозначим $\eta_i=\psi(t_i)$, где точки t_i определяются следующим образом:

$$t_i=\begin{cases}\dfrac{i}{2^{m+1}}, & i=0, 1,\cdots, 2\nu-2,\\[2mm] \dfrac{i-\nu+1}{2^m}, & i=2\nu-1, 2\nu,\cdots, n-1.\end{cases} \tag{4}$$

где $n=2^m+\nu$, $m=0, 1,\cdots$; $1\leqslant\nu\leqslant 2^m$.

Для $\eta_i (0\leqslant i\leqslant n-1)$ получены следующие неравенства (см. [3], стр. 147):

$$\begin{gathered}\eta_{2\nu-2}>-\eta_{2\nu-3}>\cdots>-\eta_1>\eta_0>0,\\ \eta_{2\nu-1}>-\eta_{2\nu}>\cdots>(-1)^{n-1}\eta_{n-2}>(-1)^n\eta_{n-1}.\end{gathered} \tag{5}$$

Рассмотрим еще одно разбиение отрезка [0, 1] с помощью точек

$$\tau_i=\begin{cases}\dfrac{i}{2^{m+1}}, & i=0, 1,\cdots, 2\nu,\\[2mm] \dfrac{i-\nu}{2^m}, & i=2\nu+1,\cdots, n,\end{cases} \tag{6}$$

где $n=2^m+\nu$, $m=0, 1,\cdots$; $1\leqslant\nu<2^m$.

В точках τ_i, определяемых в форме (6), значения n-ой функции Франклина с помощью η_i определяются так (см. [4], стр. 294)

$$f_n(\tau_k) = \begin{cases} -\eta_k \lambda_{nn} 2^{-m/2}, & k=0,\ 1, \cdots, 2\nu-2 \\ \eta \lambda_{nn} 2^{-m/2}, & k=2\nu-1 \\ -\eta_{k-1}\lambda_{nn} 2^{-m/2}, & k=2\nu, \cdots, n, \end{cases} \tag{7}$$

где $\eta = \frac{1}{2}(1 - \eta_{2\nu-2} - \eta_{2\nu-1})$, а λ_{nn} определяется из равенства (1).

Для η_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ получены также следующие формулы (см. [4], стр, 294—295)

$$\left.\begin{aligned} &\eta_k = (-1)^k \frac{\operatorname{ch} ak}{\operatorname{ch} a(2\nu-2)} \eta_{2\nu-2},\ 0 \leqslant k \leqslant 2\nu-3, \\ &\eta_k = (-1)^{k+1} \frac{\operatorname{ch} a(n-1-k)}{\operatorname{ch} a(n-2\nu)} \eta_{2\nu-1},\ k=2\nu, \cdots, n-1, \\ &\qquad 1 < \nu < 2^m \end{aligned}\right| \tag{8}$$

$$\eta_{k-1} = (-1)^k \frac{\operatorname{ch} a(n-k)}{\operatorname{ch} a(n-2)} \eta_1,\ 2 \leqslant k \leqslant n,\ \nu = 1; \tag{8'}$$

$$\eta_k = (-1)^k \frac{\operatorname{ch} ak}{\operatorname{ch} a(n-2)} \eta_{n-2},\ k=0, \cdots, n-2,\ \nu = 2^m. \tag{8''}$$

В формулах (8)—(8″) a — положительное решение уравнения $\operatorname{ch} a = 2$.

Теорема Г. (см. [4], стр. 293). *Пусть $n = 2^m + \nu$, $m \geqslant 0$, $1 \leqslant \leqslant \nu \leqslant 2^m$ и τ_k определяются из условия* (6). *Тогда имеют место следующие оценки:*

$$c_1 \cdot 2^{m/2} e^{-a|k-(2\nu-1)|} < (-1)^{k+1} f_n(\tau_k) < c_2 \cdot 2^{m/2} e^{-a|k-(2\nu-1)|},$$

где $e^a = 2 + \sqrt{3}$, $c_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$, $c_2 = 4 \cdot \sqrt{3}(2+\sqrt{3})$.

Из (5) и (7) *следует, что*

$$\left.\begin{aligned} &-f_n(\tau_{2\nu-2}) > f_n(\tau_{2\nu-3}) > \cdots > f_n(\tau_1) > -f_n(\tau_0) \\ &-f_n(\tau_{2\nu-1}) > f_n(\tau_{2\nu}) > \cdots > (-1)^{n-1} f_n(\tau_{n-1}) > (-1)^{n-1} f_n(\tau_n) \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Лемма. (см. [3], стр. 148). *Абсолютный максимум n-ой функции Франклина определяется следующим образом:*

$$\|f_n\| = \begin{cases} -f_{2^m+\nu}(0), & \nu = 1, \\ f_{2^m+\nu}\left(\dfrac{2\nu-1}{2^{m+1}}\right), & 1 < \nu < 2^m \\ -f_{2^m+\nu}(1), & \nu = 2^m \end{cases} \tag{10}$$

3°. Доказательство теорем 1 и 3. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим три случая: 1) когда $1 < \nu < 2^m$; 2) когда $\nu = 2^m$; 3) когда $\nu = 1$.

Предположим, что $1 < \nu < 2^m$. Оценим отношение

$$c_\nu^{(n)} = \frac{|f_n(t_{2\nu-3})|}{|f_n(t_{2\nu-2})|}. \tag{11}$$

Из (7) и (8) легко получаем, что

$$c_\nu^{(n)} = \frac{|\eta_{2\nu-3}|}{|\eta_{2\nu-2}|} = \frac{\operatorname{ch} \alpha (2\nu - 3)}{\operatorname{ch} \alpha (2\nu - 2)},$$

где $\operatorname{ch} \alpha = 2$ и $\alpha > 0$. Откуда сразу получаем, что

$$e^{-\alpha} \leqslant c_\nu^{(n)} \leqslant 2e^{-\alpha} = \frac{2}{2+\sqrt{3}}. \tag{12}$$

Из линейности функции $f_n(t)$ на отрезке $[t_{2\nu-3}, t_{2\nu-2}]$ и (9)—(11) имеем, что

$$f_n(t) = \frac{f_n(t_{2\nu-2}) + c_\nu^{(n)} f_n(t_{2\nu-2})}{t_{2\nu-2} - t_{2\nu-3}} (t - t_{2\nu-3}) - c_\nu^{(n)} f_n(t_{2\nu-2}). \tag{13}$$

Из равенства (13) найдем точку $t_0^{(\nu)} \in [t_{2\nu-3}, t_{2\nu-2}]$, где $f_n(t_0^{(\nu)}) = 0$. Очевидно, что

$$t_0^{(\nu)} = t_{2\nu-3} + \frac{c_\nu^{(n)} 2^{-m-1}}{c_\nu^{(n)} + 1}. \tag{14}$$

Из условия (9) получаем, что для функций f_{n-1} справедливо неравенство

$$|f_{n-1}(t_{2\nu-3})| > |f_{n-1}(t_{2\nu-2})|.$$

Следовательно, для точки $t_1^{(\nu)} \in [t_{2\nu-3}, t_{2\nu-2}]$, где $f_{n-1}(t_1^{(\nu)}) = 0$, выполняется условие

$$t_1^{(\nu)} > \frac{t_{2\nu-3} + t_{2\nu-2}}{2}. \tag{15}$$

Из (14) и (15) сразу получаем, что

$$t_1^{(\nu)} - t_0^{(\nu)} > \frac{t_{2\nu-3} + t_{2\nu-2}}{2} - t_{2\nu-3} - \frac{c_\nu^{(n)} 2^{-m-1}}{c_\nu^{(n)} + 1} > \frac{1}{7} \cdot 2^{-m-1}. \tag{16}$$

Отсюда и из линейности функции f_{n-1} на отрезке $[t_{2\nu-3}, t_{2\nu-2}]$ легко получаем, что

$$\left| f_{n-1}\left(\frac{t_1^{(\nu)} + t_0^{(\nu)}}{2} \right) \right| > \frac{1}{14} |f_{n-1}(t_{2\nu-3})|. \tag{17}$$

Аналогичным образом, используя условия (16), получаем

$$\left| f_n\left(\frac{t_1^{(\nu)} + t_0^{(\nu)}}{2} \right) \right| > \frac{1}{14} |f_n(t_{2\nu-2})|. \tag{18}$$

Из (17) и (18) непосредственно следует, что

$$|f_n(t)| + |f_{n-1}(t)| > \frac{1}{14} \min\left[|f_{n-1}(t_{2\nu-3})|, |f_n(t_{2\nu-2})| \right] \tag{19}$$

при $t \in [t_{2\nu-3}, t_{2\nu-2}]$.

Перейдем к получению подобной оценки на отрезке $[t_{2\nu-2}, t_\nu']$, где $t_\nu' = \frac{1}{2}(t_{2\nu-2} + t_{2\nu-1})$. Из условия (10) следует, что график функции f_n на отрезке $[t_{2\nu-2}, t_\nu']$ пересекается с осью $0t$ левее центра этого отрезка. С другой стороны, из условия (9) очевидно, что функция f_{n-1} на отрезке $[t_{2\nu-2}, t_\nu]$ не равняется нулю. Следовательно

$$|f_{n-1}(t)| + |f_n(t)| \geqslant$$
$$\geqslant \min [|f_{n-1}(t_{2\nu-2} + 3\cdot 2^{-m-3}), |f_n(t_{2\nu-2} + 3\cdot 2^{-3-m})|] \geqslant$$
$$\geqslant \min \left[\frac{1}{8}|f_{n-1}(t_{2\nu-2})|, \frac{1}{4}|f_n(t_\nu)|\right] \tag{20}$$

при $t \in [t_{2\nu-2}, t_\nu]$.

Таким образом, из (19) и (20) получаем, что

$$|f_{n-1}(t)| + |f_n(t)| > \beta\cdot 2^{m/2} \tag{21}$$

при $t \in [t_{2\nu-3}, t_{2\nu-3} + 2^{-m}]$, $n = 2^m + \nu$, $m = 0, 1, \cdots, \nu=2, 3, \cdots, 2^m-1$; $\beta = \frac{1}{84}$ и точка $t_{2\nu-3}$ определяется из условия (4).

Рассмотрим теперь случай, когда $t \in \left[1 - \frac{1}{2^{m+1}}, 1\right]$ и оценим снизу сумму $|f_{2^{m+1}-2}(t)| + |f_{2^{m+1}-3}(t)|$.

Пусть

$$t_2^{(m)} \in \left[1 - \frac{1}{2^{m+1}}, 1\right], \quad f_{2^{m+1}-2}(t_2^{(m)}) = 0$$

и

$$t_3^{(m)} \in \left[1 - \frac{1}{2^{m+1}}, 1\right], \quad f_{2^{m+1}-3}(t_3^{(m)}) = 0.$$

Тогда подобным рассуждением, как и при доказательстве условия (14), мы уже конкретно получаем

$$t_2^{(m)} = 1 - \frac{1}{3}\cdot 2^{-m}, \quad t_3^{(m)} = 1 - \frac{1}{8}2^{-m}.$$

Отсюда, как и выше, выводим

$$|f_{2^{m+1}-2}(t)| + |f_{2^{m+1}-3}(t)| >$$
$$> \min \left[\frac{5}{16}|f_{2^{m+1}-2}(1)|, \frac{5}{42}\left|f_{2^{m+1}-3}\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)\right|\right],$$

при $t \in \left[1 - \frac{1}{2^m}, 1\right]$.

Таким образом, из условия (8) имеем

$$|f_{2^{m+1}-2}(t)| + |f_{2^{m+1}-3}(t)| > \beta_1\cdot 2^{m/2}$$

при $t \in \left[1 - \frac{1}{2^{m+1}}, 1\right]$, где $\beta_1 = \frac{1}{189}$, $n = 2^{m+1}$, $m = 1, 2, \cdots$.

И, наконец, рассмотрим случай, когда $t \in [0, 1/2^{m+1}]$ и оценим сумму $|f_{2^m+1}(t)| + |f_{2^m+2}(t)|$.

Учитывая, что функция $f_{2^{m+1}}(t)$ достигает своего наибольшего значения в точке $t=0$, а функция $f_{2^m+2}(t)$—в точке $t=\frac{3}{2^{m+1}}$, то подобным рассуждением, как и выше, получаем следующую оценку:

$$|f_{2^m+1}(t)|+|f_{2^m+2}(t)|>\beta_2\cdot 2^{m/2} \text{ при } t\in\left[0, \frac{1}{2^{m+1}}\right],$$

где $\beta_2=\frac{1}{168}$.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что для любого числа $\varepsilon>0$ существует интегрируемая функция f_ε, $\|f_\varepsilon\|_1=1$ такая, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(f_\varepsilon)\,\omega_k(t)$$

расходится на некотором множестве E_ε, $|E_\varepsilon|>1-\varepsilon$. Из этого предположения легко можно вывести, что существует функция $f\in L_{[0,1]}$ такая, что ряд (22) неограниченно расходится на отрезке $[0, 1]$. Действительно, отсюда с помощью стандартных рассуждений получаем, что существуют функции

$$P_k(t)=\sum_{j=n_k}^{m_k} a_j\,\omega_j(t),\ k=1,\ 2,\cdots,$$

где $n_k<m_k<n_{k+1}$, такие, что $\|P_k\|<\frac{1}{2^k}$ и

$$\max_{n_k<l<p<m_k}\left|\sum_{j=l}^{p} a_j\,\omega_j(t)\right|>k,\ t\in E_k,\ |E_k|>1-2^{-k}.$$

Откуда очевидно, что для функции

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty} P_k(t)$$

выполняется утверждение теоремы 3.

Если наше предположение не имело бы места, тогда из теоремы Сакса (см. [21], стр. 36) получили бы, что существует множество $T\subset[0, 1]$ такое, что для любой функции $\varphi\in L_{[0,1]}$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(\varphi)\,\omega_k(t)\right|<\infty \text{ п. в. на } T,$$

и для любой функции $\varphi\in M\subset L_{[0,1]}$, где M—множество второй категории в пространстве $L_{[0,1]}$

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(\varphi)\,\omega_k(t)\right|=+\infty \text{ п. в. на } T^c,$$

где $T^c=[0, 1]\setminus T$.

Если $|T|>0$, то отсюда, из неравенства (2) и теоремы В приходим к противоречию.

Теорема 3 доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР,
ВЦ НПО ММП Арм.ССР

Поступила 2. XII. 1987

Կ. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Ա. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ. Չիսելսկու սիստեմով Ֆուրյեի շարքերի համարյա ամենուրեք տարամիտությունը *(ամփոփում)*

Ֆրանկլինի սիստեմի ֆունկցիաների համար ստացվել են ներքից գնահատականներ։ Որանց օգնությամբ ապացուցվում է, որ որոշ հավասարաչափ սահմանափակ օրթոնորմավորված սիստեմների համար գոյություն ունեն համարյա ամենուրեք տարամետ Ֆուրյեի շարքեր։ Որպես հեղինակներից մեկի նախկինում ապացուցված թեորեմի հետևանք ստացվում է նաև, որ այդ սիստեմներից վերջավոր թվով ֆունկցիաներ հեռացնելուց հետո մնացած սիստեմը մուլտիպլիկատիվ եղանակով հնարավոր չէ $L^p_{[0,1]}$, $1<p<\infty$ *տարածություններում դարձնել բազիս։*

K. S. KAZARIAN, *A.* S. SARGISIAN. *Divergence of almost everywhere Fourier—Ciesielski system* (summary)

It this paper estimates from below for the Franklin functions are obtained. With the help of these estimates, it is proved, that for some uniformly bounded complete orthonormal spline systems (included the Ciesielski system), there exist Fourier series diverging almost everywhere. As a consequence of a theorem proved earlier by one of the authors, it follows, that after removing a finite number of functions from these systems it is impossible multiplicatively to complete the remaining system up to the basis in $L^p_{[0,1]}$, $1<p<\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Z. Ciesielski.* A bounded orthonormal system of polygonals, Studia Math., 1968. 31, 339—346.
2. *Г. Алексич.* Проблемы сходимости ортогональных рядов, М., 1959.
3. *Z. Ciesielski.* Properties of the orthonormal Franklin system, Studia Math., 1963, 23, 141—157.
4. *Z. Ciesielski.* Properties of the orthonormal Franklin system, Studia Math., 1966, 27, 289—323,
5. *R. P. Boas,. H. Pollard.* The multiplicative completion of sets functions, Bull. Amer. Math. Soc., 1948, 54, 518—522.
6. *J. J. Price, R. E. Zink.* On sets of functions that can be multiplicatively completed, Ann. of Math., 1965, 82, 139—145.
7. Ben—Ami Braun. On the multiplicative completion of certain basic sequences in L^p, $1<p<\infty$, Trans. Amer. Math. Soc.. 1975, 176.
8. *К. С. Казарян.* О мультипликативном дополнении некоторых неполных ортонормированных систем до базисов в L^p, $1 \leqslant p < \infty$, Analysis Math.. 1978, 4, 37—52.
9. *К. С. Казарян.* О мультипликативном дополнении некоторых систем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XIII, № 4, 1978, 315—351.
10. *K. S. Kazarian.* On bases and unconditional bases in the spaces $L^p(d\mu)$, $1<p<\infty$, Studia Math., 1982, 71, 227—249.
11. *К. С. Казарян.* Мультипликативное дополнение до базисов в L^p, $1<p<\infty$ равномерно ограниченных ортонормированных систем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVIII, № 5, 1983, 344—361.
12. *К. С. Казарян.* Логарифмический рост средних арифметических от сумм функций Лебега ограниченных биортогональных систем, ДАН Арм.ССР, 1979, 69, 140—145.
13. *S. Kwapien, S. J. Szarek.* Estimation of Lebesque functions of biorthogonal systems with application to non existence of certain bases, Studia Math,. 1979, 66, 185—200.
14. *А. С. Кранцберг.* О системах сходимости в С и базисах в L^p, Мат. заметки, 1979, 26, 183—200.

15. *Z. Ciesielski.* Equivalence, unconditionality and convergence a. e. of the spline bases in $L_p$spaces, App. Theory., Banach Center Publ., 1979, 4, 55—68.
119: 3, 278—294.
51—90.

17. *A. Kolmogoroff.* Une serie de Fourier—Lebesque divergente presque partout Fund, Math., 1923, 4, 324—328.

18. *E. M. Stein.* On limits of sequences of operators, Ann. Math., 1961, 74, 140—170.

19. *С. В. Бочкарев.* Расходящийся на множестве положительной меры ряд Фурье для произвольной ограниченной ортонормированной системы, Мат. сб., 1975, 98, 436—449.

20. *К. С. Казарян.* О некоторых вопросах теории ортогональных рядов, Мат. сб., 1982, 119; 3, 278—294.

21. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., 1958.

22. *Б. С. Кашин, А. А. Саакян.* Ортогональные ряды, М., Наука, 1984.