ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 4, 1989 Математика

УДК 519.63

Н. В. ОГАНЕСЯН

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРОЕКЦИОННО-СЕТОЧНЫМ МЕТОДОМ

Рассматривается краевая задача для модельного полуэллиптического уравнения в области $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ вида

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f, \tag{1}$$

$$u_{|\partial\Omega} = 0, \; u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0, \tag{2}$$

где $f \in L_2(\Omega)$, $\partial\Omega$ — граница области Ω. Указывается способ построения проекционно-сеточной схемы, обладающей предельной точностью и имеющей обусловленность порядка $O(h^{-4})$.

Известно, что эллиптические операторы составляют подкласс полуэллиптических операторов. В [1], [2] решения элиптических уравнений 2-го порядка из пространства W_2^2 Соболева аппроксимируются, например, кусочно линейными или полилинейными функциями. В [2] для решений бигармонического уравнения из W_2^4 в качестве аппроксимирующих рассматриваются кусочно эрмитовы кубические функции.

Для задачи (1), (2) решением будем считать функцию из анизотропного пространства $W_2^{(2,4)}$ Соболева, удовлетворяющую уравнеиию (1) и краевым условиям (2). Функции из $W_2^{(2,4)}$ имеют различные дифференциальные свойства по разным переменным. Поэтому решение задачи (1), (2) аппроксимируется с помощью кусочно линейных по x и кусочно кубических по y функций (или кусочно линейно-эрмитовых функций).

1°. **Вспомогательные предложения.** Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство действительных векторов, Ω — некоторая ограниченная область в R^n, Z_+^n — множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, где α_i $(i = 1, \cdots, n)$ — целые неотрицательные числа.

Определим классы $W_p^l(\Omega)$ Соболева (см. [3], [4]), где $l = (l_1, \cdots, l_n)$, $l_i > 0$ — целые числа, $1 \leqslant p < \infty$. Положим $D^{l_i} u = \frac{\partial^{l_i} u}{\partial x_i^{l_i}}$ $(i = 1, \cdots, n)$. Обозначим через $W_p^l(\Omega)$ множество функций $u \in L_p(\Omega)$, которые имеют несмешанные обобщенные производные $D^{l_i} u$ $(i = 1, \cdots, n)$, принадлежащие $L_p(\Omega)$. Для них определим норму

$$\|u\|_{l\Omega}=\left\{\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=0}^{n}|D^{l_i}u|^p+|u|^p\right)d\Omega\right\}^{1/p}. \tag{3}$$

Пространство $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$ определим как замыкание множества функций $u\in C_0^\infty(\Omega)$ по норме (3). В $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$ введем норму

$$\|u\|_{0l\Omega}=\left\{\int\limits_{\Omega}\sum_{i=0}^{n}|D^{l_i}u|^p\,d\Omega\right\}^{1/p}, \tag{4}$$

которая эквивалентна норме (3)(см. [3], [4]).

Имеет место

Теорема 1. *Пусть Ω — n-мерный куб в R^n. Если линейные ограниченные в $W_p^l(\Omega)$ функционалы $r_k(u)(k=1,\cdots,M)$ таковы, что не обращаются в нуль одновременно ни на одном отличном от тождественного нуля полиноме степени не выше l_i-1 по каждой переменной $x_i(i=1,\cdots,n)$, то норма в $W_p^l(\Omega)$ вида*

$$\|u\|=\left\{\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}|D^{l_i}u|^p\,d\Omega+\sum_{k=1}^{M}|r_k(u)|^p\right\}^{1/p}$$

эквивалентна норме (3).

Доказательство теоремы можно получить, используя метод доказательства соответствующего предложения в изотропном случае (см. [5]) с некоторой модификацией, отвечающей анизотропному случаю.

Пусть теперь Ω — прямоугольник на плоскости (x, y) со сторонами, параллельными осям координат. Обозначим через $(x_i, y_i)(i=1,\cdots,4)$ его вершины.

Следствие. *В пространстве $W_2^{(2,4)}(\Omega)$ норма, задаваемая формулой.*

$$\|u\|_1=\left\{\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^4u}{\partial y^4}\right)^2\right]d\Omega+\sum_{i=1}^{4}\left(|u(x_i, y_i)|^2+|u_y(x_i, y_i)|^2\right)\right\}^{1/2}$$

эквивалентна норме (3). (5)

Доказательство. Пусть $u\in W_2^{(2,4)}(\Omega)$. По теоремам вложения для анизотропных пространств $W_p^l(\Omega)$ (см. [3], [4]) функции u и u_y эквивалентны непрерывным в $\overline{\Omega}$ функциям, так что если определить функционалы $r_k(u)(k=1,\cdots,8)$ по формулам: $r_k(u)=u(x_k, y_k)$ при $k=1,\cdots,4$ и $r_k(u)=u_y(x_{k-4}, y_{k-4})$ при $k=5,\cdots,8$, то $r_k(u)$ $(k=1,\cdots,8)$ являются линейными ограниченными функционалами в $W_2^{(2,4)}(\Omega)$. Норма (5) эквивалентна норме (3), так как функционалы $r_k(u)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. В самом деле, пусть $P(x, y)$ — полином не выше первой степени по x и не выше третьей — по y. Тогда легко проверить, что из условий $P(x_i, y_i)=\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_i, y_i)=0$ следует, что $P(x, y)\equiv 0$.

Следствие доказано.

Пусть α, $\beta \in Z^n_+$ и $l = (l_1, \cdots, l_n)$ — фиксированный вектор с натуральными компонентами. Положим $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, где $D_k = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = 1, \cdots, n)$. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор с вещественными коэффициентами $a_{\alpha\beta}$ дивергентного вида;

$$\mathrm{P}(D) = \sum_{\substack{(\lambda,\,\alpha)\leq 1\\ (\lambda,\,\beta)\leq 1}} (-1)^{|\beta|} D^\beta [a_{\alpha\beta} D^\alpha],$$

где $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $\lambda = 1 : l = \left(\frac{1}{l_1}, \cdots, \frac{1}{l_n}\right)$, $(\lambda, \alpha) = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n$.

Для функций u, $v \in C_0^\infty(\Omega)$ положим

$$\mathrm{P}(u, v) = \sum_{\substack{(\lambda,\,\alpha)=1\\ (\lambda,\,\beta)=1}} a_{\alpha\beta} D^\alpha u \cdot D^\beta v \, d\Omega.$$

$\mathrm{P}(u, v)$ называется билинейной формой, соответствующей оператору $\mathrm{P}(D)$.

Определение 1. Оператор $\mathrm{P}(D)$ называется полуэллиптическим, если соответствующая форма $\mathrm{P}(u, v)$ полуэллиптична, т. е. существует постоянная $\varkappa > 0$ такая, что имеет место неравенство

$$\mathrm{P}(u, u) \geq \varkappa \|u\|^2_{0l\Omega} \; \forall\, u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{6}$$

Пусть форма $\mathrm{P}(u, v)$ полуэллиптична и симметрична, т. е. $\mathrm{P}(u, v) = \mathrm{P}(v, u)$ $\forall u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда в $C_0^\infty(\Omega)$ можно ввести скалярное произведение

$$(u, v)_\mathrm{P} = \mathrm{P}(u, v),$$

которое порождает норму

$$\|u\|_\mathrm{P} = (u, u)_\mathrm{P}^{1/2}. \tag{7}$$

Из неравенства (6) следует эквивалентность норм (7) и (4). Следовательно, пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ можно определить как замыкание множества функций $u \in C_0^\infty(\Omega)$ по норме (7), порожденной оператором $\mathrm{P}(D)$. Тогда неравенство (6) будет верно и для всех $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$.

2°. Постановка задачи. В квадрате $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ рассматривается краевая задача (1), (2).

Умножив уравнение (1) скалярно в $L_2(\Omega)$ на $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и выполнив интегрирование по частям, получим интегральное тождество

$$\mathrm{L}(u, \varphi) = (f, \varphi) \;\; \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{8}$$

где через $\mathrm{L}(u, \varphi)$ обозначена билинейная форма

$$\mathrm{L}(u, \varphi) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) d\Omega.$$

Очевидно, что если тождество (8) имеет место для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, то оно верно и для всех $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1,2)}(\Omega)$.

Определение 2. Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Функцию u из $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1,2)}(\Omega)$ назовем обобщенным решением задачи (1), (2), если она удовлетворяет соотношению (8) для всех $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1,2)}(\Omega)$.

Очевидно, что решение краевой задачи (1), (2) из $W_2^{(2,4)}(\Omega) \cap \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{(1,2)}(\Omega)$ является и обобщенным решением этой задачи. Можно доказать, что справедливо и обратное: если обобщенное решение задачи (1), (2) принадлежит $W_2^{(2,4)}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{(1,2)}(\Omega)$, то оно является и решением этой аадачи. Известно, что решение краевой задачи (1) (2) существует и принадлежит $W_2^{(2,4)}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{(1,2)}(\Omega)$, причем имеет место неравенство

$$\|u\|_{(2,4),\,2} < C\|f\|_{L_2(\Omega)}^{*}. \tag{9}$$

Из неравенства (9) следует единственность обобщенного решения задачи (1), (2).

3°. Линейно-эрмитова интерполяция. Покроем $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ сеткой, образованной прямыми $x = ih_x$, $y = jh_y$, $h_x = 1/N_x$, $h_y = 1/N_y$, $i = 0, 1, \cdots, N_x$, $j = 0, 1, \cdots, N_y$ (h_x, h_y — шаги сетки, N_x, N_y — целые положительные числа). Положим $\Pi_{ij} = \{(x, y) |\, ih_x \le x \le (i+1) h_x,\ jh_y \le y \leqslant (j+1) h_y\}$. Назовем Π_{ij} ячейками сетки. Обозначим через Q_h — множество узлов, принадлежащих Ω (внутренних узлов), через r_h — множество узлов, принадлежащих $\partial\Omega$ (граничных узлов) Положим $\overline{Q}_h = Q_h \cup r_h$.

Для описания линейно-эрмитовой интерполяции, рассмотрим две функции

$$\Phi^{(1)}(s, t) = \begin{cases} (1-|s|)(1+2|t|)(1-|t|)^2, & \text{при } |s| \leqslant 1,\ |t| \leqslant 1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\Phi^{(2)}(s, t) = \begin{cases} (1-|s|)(1-|t|)^2\, t, & \text{при } |s| \leqslant 1,\ |t| \leqslant 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Каждому узлу $(x_i, y_j) \in \overline{Q}_h$ пставим в соответствие по две функции $\psi_{ij}^{(1)}(x, y)$ и $\psi_{ij}^{(2)}(x, y)$, определенные следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_{ij}^{(1)}(x, y) &= \Phi^{(1)}\left(\frac{x}{h_x} - i,\ \frac{y}{h_y} - j\right), \\ \psi_{ij}^{(2)}(x, y) &= \Phi^{(2)}\left(\frac{x}{h_x} - i,\ \frac{y}{h_y} - j\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Легко проверить, что функции $\psi_{ij}^{(k)}(x, y)$ $(k = 1, 2)$ принадлежат $W_2^{(1,2)}$.

Пусть теперь в области Ω задана функция $u \in W_2^{(2,4)}(\Omega)$. По теоремам вложения для анизотропных пространств Соболева функции u

* Здесь и далее буквой C с индексами или без них будем обозначать положительные постоянные в неравенствах, причем одной и той же буквой часто будут обозначаться различные постоянные.

и u_y эквивалентны непрерывным в $\overline{\Omega}$ функциям. Исходя из этого, в каждом узле $(x_i, y_j) \in \overline{Q}_h$ положим $p_{ij} = u(x_i, y_j)$, $q_{ij} = h_y u_y(x_i, y_j)$.

Определение 4. Функцию $\tilde{u}(x, y)$ вида

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_{(x_i, y_j) \in Q_h} (p_{ij} \psi_{ij}^{(1)}(x, y) + q_{ij} \psi_{ij}^{(2)}(x, y))$$

назовем линейно-эрмитовым интерполянтом функции u в Ω.

Из определения функций $\Phi^{(k)}(s, t) (k = 1, 2)$ следует, что

$$\tilde{u}(x_i, y_j) = u(x_i, y_j), \quad \tilde{u}_y(x_i, y_j) = u_y(x_i, y_j)$$

в каждом узле $(x_i, y_j) \in \overline{Q}_h$.

Множество функций $\tilde{w}(x, y)$, представимых в виде

$$\tilde{w}(x, y) = \sum_{(x_i, y_j) \in Q_h} (\alpha_{ij} \psi_{ij}^{(1)}(x, y) + \beta_{ij} \psi_{ij}^{(2)}(x, y)),$$

где α_{ij}, β_{ij} — произвольные вещественные числа, образует в $W_2^{(1,2)}(\Omega)$ конечномерное подпространство. Обозначим его через H_h. Функции $\psi_{ij}^{(k)}(x, y)$ образуют в H_h базис. Назовем их базисными функциями линейно-эрмитовой интерполяции. Обозначим через $\mathring{H}_h$ множество линейно-эрмитовых функций, обращающихся в нуль вместе со своими производными по y в граничных узлах сетки. Ясно, что базис $\mathring{H}_h$ составляют лишь те $\psi_{ij}^{(k)}(x, y)$, которые соответствуют внутренним узлам сетки.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть* $u \in W_2^{(2,4)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(1,2)}(\Omega)$. *Тогда*

$$\|u - \tilde{u}\|_{0(1,2)\Omega} \leqslant C\{(h_x^4 + h_y^8)(h_x^{-2} + h_y^{-4})\}^{1/2} \cdot \|u\|_{(2,4)\Omega}, \tag{11}$$

где $\tilde{u}$ — *линейно-эрмитов интерполянт функции* u *в* Ω.

Доказательство. Обозначим $g = u - \tilde{u}$. Функция g удовлетворяет условиям

$$g(x_i, y_j) = 0 \ \forall (x_i, y_j) \in \overline{Q}_h. \tag{12}$$

Так как $\tilde{u}(x, y)$ в каждой ячейке Π_{ij} является полиномом не выше первой степени по x и не выше третьей—по y, то в каждой ячейке Π_{ij} имеем: 1. Функция $g \in W_2^{(2,4)}(\Pi_{ij})$ и 2. $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^4 g}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$.

В интеграле

$$\iint_{\Pi_{ij}} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)^2\right] d\Pi_{ij}$$

сделаем замену переменных $x = sh_x + x_i$, $y = th_y + y_j$. Тогда

$$\iint\limits_{\Pi_{ij}} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)^2 \right] d\Pi_{ij} = h_x h_y \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left[\left(\frac{\partial g}{\partial s}\cdot h_x^{-1}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\cdot h_y^{-2}\right)^2 \right] ds dt \leqslant$$

$$\leqslant h_x h_y (h_x^{-2} + h_y^{-4}) \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left[\left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right)^2 \right] ds dt.$$

Функция $g(s, t)$ в квадрате $S = \{0 < s,\ t < 1\}$ принадлежит $W_2^{(2,4)}(S)$, так что $\|g\|_{(1,2)S} \leqslant C\|g\|_{(2,4)S}$. Согласно теореме 1 и следствию из нее норму в $W_2^{(2,4)}(S)$ можно определить по формуле (5). Тогда, учитывая условия (12), получим

$$\iint\limits_{\Pi_{ij}} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)^2 \right] d\Pi_{ij} \leqslant C h_x h_y (h_x^{-2} + h_y^{-4}) \|g\|_{(2,4)S} \leqslant$$

$$\leqslant C h_x h_y (h_x^{-2} + h_y^{-4}) \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^4 g}{\partial t^4}\right)^2 \right] ds\, dt =$$

$$= C h_x h_y (h_x^{-2} + h_y^{-4}) \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)^2 \right] ds dt.$$

Вернемся к старым переменным (x, y). Так как $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = h_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = h_y^4 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$, то получим

$$\iint\limits_{\Pi_{ij}} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)^2 \right] d\Pi_{ij} \leqslant$$

$$\leqslant C (h_x^{-2} + h_y^{-4})(h_x^4 + h_y^8) \iint\limits_{\Pi_{ij}} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)^2 \right] d\Pi_{ij}. \qquad (13)$$

Это неравенство имеет место для любой ячейки Π_{ij} с одной и той же постоянной $C > 0$. Суммируя неравенства (13) по всем Π_{ij}, образующих $\overline{\Omega}$, получим неравенство (11).

Теорема доказана.

4°. Построение проекционно-сеточно схемы. В качестве проекционно-сеточного алгоритма приближенного решения задачи (1), (2) выберем метод Галеркина.

Пусть для Ω определена сетка. Будем считать, что внутренние узлы сетки перенумерованы в каком-то порядке. Обозначим через (x_k, y_k) k-тый узел, а через $\psi_k^{(i)}(x, y)$, $i = 1, 2$, функции вида (10), соответствующие узлу (x_k, y_k).

В качестве координатных функций метода рассмотрим базисные функции линейно-эрмитовой интерполяции. Положим $\varphi_k(x, y) = \psi_k^{(1)}(x, y)$ при $k = 1, \cdots, M$ и $\varphi_k(x, y) = \psi_{k-M}^{(2)}(x, y)$ при $k = M + 1, \cdots, 2M$, где M — число внутренних узлов.

Определение 5. Функцию $\tilde{v}(x, y) \in \mathring{H}_h$ вида

$$\tilde{v}(x, y) = \sum_{k=1}^{2M} v_k \varphi_k(x, y)$$

назовем приближенным решением задачи (1), (2), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\mathrm{L}(\tilde{v}, \tilde{\Phi}) = (f, \tilde{\Phi}) \tag{14}$$

для произвольной функции $\tilde{\Phi} \in \mathring{H}_h$.

Систему сеточных уравнений для нахождения параметров v_k, определяющих функцию $\tilde{v}(x, y)$, запишем в виде

$$\mathrm{L}(\tilde{v}, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \; i = 1, \cdots, 2M$$

или в матричной форме

$$A\bar{v} = \bar{f}, \tag{15}$$

здесь $\bar{v} = (v_1, \cdots, v_{2M})$, $\bar{f} = (f_1, \cdots, f_{2M})$, $f_i = (f, \varphi_i)$, $A = (l_{ki})$, $l_{ki} = \mathrm{L}(\varphi_k, \varphi_i) = l_{ik}$, $i, k = 1, \cdots, 2M$. При некоторой нумерации узлов сетки матрица системы (15) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_2 & K_3 \end{pmatrix},$$

где K_1, K_2, K_3 — теплицевы, блочно-трехдиагональные матрицы размерности $M \times M$ (причем каждый блок этих матриц, в свою очередь, есть трехдиагональная матрица размерности $(N_x - 1) \times (N_x - 1)$). Для решения этой системы можно предложить модифицированный метод последовательной верхней релаксации (см., например, [6]). Из неравенства (6) следует положительная определенность матрицы A, а значит, и однозначная разрешимость системы (15).

Из полуэллиптичности формы $\mathrm{L}(u, \varphi)(\varkappa = 1)$ и из неравенства Коши—Буняковского для приближенного решения $\tilde{v}(x, y) \in \mathring{H}_h \subset \mathring{W}_2^{(1,2)}(\Omega)$ имеем

$$\|\tilde{v}\|^2_{0(1,2)\Omega} \leqslant \mathrm{L}(\tilde{v}, \tilde{v}) = (f, \tilde{v}) \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\tilde{v}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\tilde{v}\|_{0(1,2)\Omega}.$$

Отсюда

$$\|\tilde{v}\|_{0(1,2)\Omega} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

В силу последней оценки имеет место непрерывная зависимость от f и краевых данных (в нашем случае, нулевых).

5°. Оценка скорости сходимости. Как было отмечено, решение задачи (1), (2) существует и принадлежит $W_2^{(2,4)}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{(1,2)}(\Omega)$.

Из интегрального тождества (8) для обобщенного решения и тождества (14) для приближенного решения следует, что

$$\mathrm{L}(u-\tilde{v},\ \varphi)=(u-\tilde{v},\ \varphi-\tilde{\Phi})\ \forall\varphi\in\overset{\circ}{W}{}_2^{(1,2)}(\Omega),\ \forall\tilde{\Phi}\in\overset{\circ}{H}.$$

Полагая $\varphi=u-\tilde{v}$, $\Phi=\tilde{u}-\tilde{v}$, где $\tilde{u}$ — линейно-эрмитов интерполянт функции u в Ω, получим

$$\mathrm{L}(u-\tilde{v},\ u-\tilde{v})=\mathrm{L}(u-\tilde{v},\ u-\tilde{u}).$$

Тех как форма $\mathrm{L}(u,\ \varphi)$ полуэллиптична, то из (6) и из неравенства Коши—Буняковского следует, что

$$\|u-\tilde{v}\|^2_{0(1,2)\Omega}\leqslant\mathrm{L}(u-\tilde{v},\ u-\tilde{v})=\mathrm{L}(u-\tilde{v},\ u-\tilde{u})\leqslant$$

$$\leqslant\|u-\tilde{v}\|_{0(1,2)\Omega}\leqslant\|u-\tilde{u}\|_{0(1,2)\Omega}.$$

Отсюда имеем

$$\|u-\tilde{v}\|_{0(1,2)\Omega}\leqslant\|u-\tilde{u}\|_{0(1,2)\Omega}.$$

Пусть $h>0$. Выберем шаги h_x и h_y так, чтобы $h_x\sim h^2$, $h_y\sim h$, тогда из теоремы 2 получим

$$\|u-\tilde{u}\|_{0(1,2)\Omega}\leqslant Ch^2\|u\|_{(2,4)\Omega},$$

откуда следует искомая оценка точности

$$\|u-\tilde{v}\|_{0(1,2)\Omega}\leqslant Ch^2\|u\|_{(2,4)\Omega}. \tag{16}$$

Пользуясь схемой получения оценки $\mathcal{N}$-поперечника из [2], можно показать, что оценка скорости сходимости (16) неулучшаема по порядку.

6. Обусловленность матрицы проекционно-сеточной схемы. Оценим спектральное число обусловленности $P(A)$ матрицы A системы (15), которое определяется следующим образом:

$$P(A)=\lambda_{\max}/\lambda_{\min},$$

где $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ — наибольшее и наименьшее собственные числа матрицы A.

$\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ определяются с помощью отношений Рэлея:

$$\lambda_{\max}=\max_{\substack{\bar{v}\neq 0\\ \bar{v}\in R^{2M}}}\frac{(A\bar{v},\ \bar{v})}{(\bar{v},\ \bar{v})},\quad \lambda_{\min}=\min_{\substack{\bar{v}\neq 0\\ \bar{v}\in R^{2M}}}\frac{(A\bar{v},\ \bar{v})}{(\bar{v},\ \bar{v})},$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в R^{2M}.

Прежде чем приступить к оценке $P(A)$, получим некоторые неравенства для линейно-эрмитовой интерполяции.

Пусть $w\in W_2^{(2,4)}(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^{(1,2)}(\Omega)$, $\tilde{w}$ — линейно-эрмитов интерполянт функции w в Ω. Обозначим через $\bar{w}$ вектор, координатами которого служат параметры $\alpha_{ij}^{(1)}$, $\alpha_{ij}^{(2)}$, где

$$\alpha_{ij}^{(1)} = w(x_i, y_j), \ \alpha_{ij}^{(2)} = w_y(x_i, y_j) \ ((x_i, y_j) \in Q_h).$$

Лемма. *Для линейно-эрмитовой интерполяции имеют место неравенства*

$$\|\tilde{w}\|_{0(1,2)2} \leqslant C_1 (h_x^{-1} h_y + h_x h_y^{-3})^{1/2} \cdot (\overline{w}, \overline{w})^{1/2}, \tag{17}$$

$$\|\tilde{w}\|_{0(1,2)2} \geqslant C_2 (h_x h_y)^{1/2} \cdot (\overline{w}, \overline{w})^{1/2}. \tag{18}$$

Доказательство леммы аналогично доказательству соответствующих неравенств для эрмитова восполнения (см. [2]).

Теперь имеем $L(\tilde{v}, \tilde{v}) = (A\,\overline{v}, \overline{v})$. Из неравенств (17), (18) следует, что

$$(A\,\overline{v}, \overline{v}) \geqslant C\, h_x h_y (\overline{v}, \overline{v}).$$

$$(A\,\overline{v}, \overline{v}) \leqslant C\, h_x^{-1} h_y + h_x h_y^{-3}) (\overline{v}, \overline{v}).$$

Так как $h_x \sim h^2$, $h_y \sim h$, то получим

$$\lambda_{\min} \geqslant C_1 h^3, \ \lambda_{\max} \leqslant C_2 h^{-1}.$$

Отсюда следует искомая оценка числа обусловленности

$$P(A) = O(h^{-4}).$$

Ереванский государственный
университет

Поступила 12.VII. 1986

Ն. Վ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Մոդելային կիսաէլիպտիկ հավասարման համար առաջին եզրային խնդրի լուծումը պրոեկցիոն-ցանցային մեթոդով *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ եզրային խնդիր մոդելային կիսաէլիպտիկ հավասարման համար $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ *տիրույթում*

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f,$$

$$u_{|\partial\Omega} = 0, \ u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0,$$

որտեղ $f \in L_2(\Omega)$: *Այդ խնդրի մոտավոր լուծման համար կառուցվում է պրոեկցիոն-ցանցային սխեմա գծային-էրմիտյան ինտերպոլյացիայի հիման վրա։ Ցույց է տրվում, որ այդ սխեման ունի սահմանային ճշգրտություն և* $O(h^{-4})$ *կարգի պայմանավորվածություն։*

N. V. HOVHANNESIAN. *Solution of the first boundary value problem for model semielliptic equation by the project Grid method* (summary)

The paper considers the boundary value problem for model semielliptic equation:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f,$$

$$u_{|\partial\Omega} = 0, \ u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0,$$

where $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $f \in L_2(\Omega)$. To approximate solve of this problem, the project grid scheme based on linear Hermite interpolation is constructed. This scheme has optimal accuracy and condition of order $O(h^{-4})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. И. Марчук, В. И. Агошков.* Введение в проекционно-сеточные методы, М., Наука, 1981.
2. *Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, Ереван, Изд-во АН Арм.ССР, 1979.
3. *О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский.* Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., Наука, 1975.
4. *С. В. Успенский, Г. В. Демиденко, В. Г. Перепелкин.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям, Новосибирск, Наука, 1984.
5. *В. И. Смирнов.* Курс высшей математики, т. 5, М., Физматгиз, 1959.
6. *В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов.* Матрицы и вычисления, М., Наука, 1984.
7. *A. Kolmogoroff.* Uber die beste Annaherung von Funktionen einer gegebenen Funktionen-klasse, Math. Ann., 1936, 37.