ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIV, № 4, 1989 Математика

УДК 517.52

Ан. А. ТАЛАЛЯН

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ КАРЛЕМАНА И О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО КЛАССОВ l_p

Определение 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная на $[0, 1]$ система (ОН система на $[0, 1]$). Измеримое множество $A\subset[0, 1]$, $0<\mu(A)<1$, называется множеством единственности системы $\{\varphi_n(x)\}$ относительно классов l_p, $p<2$, если не существует отличной от нуля интегрируемой с квадратом функции $f(x)$, коэффициенты Фурье которой

$$c_n(f)=\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx,\ n=1, 2\cdots \tag{1}$$

по этой системе удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^p<\infty \tag{2}$$

для некоторого $p<2$ и $f(x)=0$ при $x\in[0, 1]\setminus A$.

Определение 2. Говорят, что ОН на $[0, 1]$ система $\{\varphi_n(x)\}$ обладает особенностью Карлемана, если существует непрерывная на $[0, 1]$ функция $f(x)$, последовательность коэффициентов Фурье $\{c_n(f)\}$ которой по этой системе не принадлежит ни одному из классов l_p, $p<2$, т. е. $\sum|c_n(f)|^p=\infty$ для всех $p<2$.

Л. Голзани [1], [2] и Г. Геворкяном [3] была установлена следующая

Теорема 1. (*Л. Голзани, Г. Геворкян*). *Если $\{\varphi_n(x)\}$ — полная в $L_2[0, 1]$ ОН система на $[0, 1]$, то для любого $\varepsilon>0$ существует множество $A\subset[0, 1]$, $\mu(A)>1-\varepsilon$, являющееся множеством единственности этой системы относительно классов l_p, $p<2$.*

В работе [4] А. М. Олевского установлены следующие теоремы

Теорема 2. (*А. М. Олевский*). *Любая полная ОН система на $[0, 1]$ обладает особенностью Карлемана.*

Теорема 3. (*А. М. Олевский*). *Если $\{\varphi_n(x)\}$ — полная в $L_2[0, 1]$ ОН система на $[0, 1]$, то для любой последовательности $0<w(n)$, $n=1, 2,\cdots$, $w(n)\uparrow+\infty$ при $n\to\infty$, существует непрерывная на $[0, 1]$ функция $f(x)$, коэффициенты Фурье которой $c_n(f)$ по этой системе удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^2 w(n)=\infty. \tag{3}$$

В настоящей работе сформулированные выше теоремы 1—3 распространяются (с надлежащими формулировками) на более широкий класс ортонормированных систем, а именно на ОН системы $\{\varphi_n(x)\}$, обладающие следующим, более слабым свойством полноты: для некоторого множества $E\subset[0, 1]$, $\mu(E)>0$, какова бы ни была $f(x)\in L_2(E)$, существует ряд $\sum a_n\varphi_n(x)$, $\sum a_n^2<\infty$, который сходится к $f(x)$ в метрике $L_2(E)$.

В частности оказывается, что теорема 1 верна для любой ОН системы $\{\varphi_n(x)\}$, обладающей указанным свойством полноты на множествах E, мера которых может быть сколь угодно близкой к 1 (см. определения 1.1 и 2.1, теоремы 2.1, 2.2 и теоремы 2.3—2.6).

При доказательстве теорем настоящей работы мы пользуемся методами доказательств, приведенных в работах [2], [3], [4] и леммой 2 работы [5] А. А. Талаляна.

§ 1. Доказательства основных лемм

Сначала введем некоторые определения. Если функция $f(x)$ интегрируема с квадратом на отрезке [0, 1], обозначим

$$\|f\|=\left(\int_0^1 f^2(x)\,dx\right)^{1/2}. \tag{1.1}$$

В случае, когда $f(x)$ интегрируема с квадратом на измеримом множестве $E\subset[0, 1]$, $\mu(E)>0$, обозначим

$$\|f\|_E=\left(\int_E f^2(x)\,dx\right)^{1/2}. \tag{1.2}$$

Определение 1.1. Ортонормированная на отрезке [0, 1] система $\{\varphi_n(x)\}$ называется полной по рядам из l_2 на множестве $E\subset[0, 1]$, $\mu(E)>0$, если для любой определенной на E и принадлежащей $L_2(E)$ функции $f(x)$ существует ряд

$$\sum a_n\varphi_n(x),\ \sum a_n^2<\infty \tag{1.3}$$

такой, что

$$\lim_{N\to\infty}\int_E\left|\sum_{n=1}^{N}a_n\varphi_n(x)-f(x)\right|^2dx=0. \tag{1.4}$$

Мы будем пользоваться следующей леммой, установленной в [5] (см. [5], лемма 2).

Лемма 1.1. *Пусть ортонормированная на* [0, 1] *система* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *полна по рядам из* l_2 *на множестве* E, $\mu(E)>0$. *Тогда для любого измеримого множества* $A\subset E$, $\mu(A)>0$, *для любого натурального числа* N *и положительного числа* $\eta>0$ *существуют функция* $\psi(x)$ *и линейная комбинация*

$$H(x)=\sum_{k=N+1}^{m}a_k\varphi_k(x),\ m>N, \tag{1.5}$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$\psi(x)=1, x\in A', \ \psi(x)=-1, \ x\in A'', \ \psi(x)=0, \ x\in E\setminus(A'\cup A''), \quad (1.6)$$

где

$$A'\cup A''\subset A, \ A'\cap A''=\varnothing, \mu(A')=\mu(A'')=\frac{1}{4}\ \mu(A), \quad (1.7)$$

$$\left\| \psi(x)-\sum_{k=N+1}^{m} a_k\varphi_k(x)\right\|_E<\eta, \quad (1.8)$$

$$\left\|\sum_{k=N+1}^{m} a_k\varphi_k(x)\right\|<\beta\left\|\psi(x)\right\|_E, \ N+1\leqslant n\leqslant m, \quad (1.9)$$

где β — постоянная, зависящая только от множества E и от системы $\{\varphi_n(x)\}$.

Следующая лемма легко доказывается при помощи леммы 1.1.

Лемма 1.2. *Пусть ортонормированная на* $[0, 1]$ *система* $\{\varphi_n(x)\}$ *полна по рядам из* l_2 *на множестве* $E\subset[0, 1]$, $\mu(E)>0$. *Тогда для любого множества* $B\subset E$, $\mu(B)>0$, *для любого натурального числа* N *и для положительных чисел* $\delta>0$, $\eta>0$, *существуют функция* $\psi(x)$ *и линейная комбинация* (1.5), *удовлетворяющие условиям*

$$\psi(x)=1, \ x\in B', \ \psi(x)=-1, \ x\in B'', \ \psi(x)=0, \ x\in E\setminus(B'\cup B''), \quad (1.10)$$

где

$$B'\cup B''\subset B, \ B'\cap B''=\varnothing, \ \mu(B')=\mu(B'')=\frac{1}{4}\mu(B), \quad (1.11)$$

$$\left\|\psi(x)-\sum_{k=N+1}^{m} a_k\varphi_k(x)\right\|_E<\eta, \quad (1.12)$$

$$\left\|\sum_{k=N+1}^{m} a_k\varphi_k(x)\right\|\leqslant\beta\left\|\psi(x)\right\|_E, \quad (1.13)$$

$$|a_k|<\delta, \ N+1\leqslant k\leqslant m, \quad (1.14)$$

где β — *постоянная из условия* (1.9) *леммы* 1.1.

Доказательство. Представим множество B в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся множеств $A_1,\cdots, A_n$ таких, что

$$\mu(A_i)>0 \text{ и } 2\beta\,(\mu(A_i))^{1/2}<\delta. \quad (1.15)$$

Применяя лемму 1.1 к каждому из множеств A_i, т. е. полагая в ее формулировке $A=A_i$, $1\leqslant i\leqslant n$ последовательно мы можем определить полиномы

$$H_i(x)=\sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k\varphi_k(x), \ N_i>N_{i-1}, \ N_0=N \quad (1.16)$$

и функции $\psi_i(x)$ такие что

$$\psi_i(x)=1, \ x\in A_i', \ \psi_i(x)=-1, \ x\in A_i'', \ \psi_i(x)=0, \quad x\in E\setminus(A_i'\cup A_i''), \quad (1.17)$$

где

$$A_l^{'} \cup A_l^{''} \subset A_l, \quad A_l^{'} \cap A_l^{''} = \varnothing, \quad \mu(A_l^{'}) = \mu(A_l^{''}) = \frac{1}{4}\mu(A_l), \tag{1.17}$$

$$\left\| \psi_l(x) - \sum_{k=N_{l-1}+1}^{N_l} a_k \varphi_k(x) \right\|_E < \frac{\eta}{2^l}, \tag{1.18}$$

$$\left\| \sum_{k=N_{l-1}+1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right\| \leqslant \beta \left\| \psi_l(x) \right\|_E, \quad N_{l-1} < n \leqslant N_l. \tag{1.20}$$

Положим

$$B' = \bigcup_{l=1}^{n} A_l^{'}, \quad B'' = \bigcup_{l=1}^{n} A_l^{''}, \tag{1.21}$$

$$\psi(x) = \sum_{l=1}^{n} \psi_l(x), \tag{1.22}$$

$$H(x) = \sum_{k=N+1}^{m} a_k \varphi_k(x) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=N_{l-1}+1}^{N_l} a_k \varphi_k(x), \quad N_n = m, \quad N_0 = N \tag{1.23}$$

и покажем, что множества B', B'', определенные равенствами (1.21) функция $\psi(x)$, определенная равенством (1.22) и полином $H(x)$, определенный равенством (1.23) удовлетворяют условиям (1.10)—(1.14) леммы 1.2. Поскольку $B = \cup A_l$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, из (1.17), (1.18) и из (1.19) (1.22) и (1.23) следует, что условия (1.10) и (1.11) выполнены. Из (1.19), (1.22), (1.23) следует

$$\left\| \psi(x) - \sum_{k=N+1}^{m} a_k \varphi_k(x) \right\|_E \leqslant \sum_{l=1}^{n} \left\| \psi_l(x) - \sum_{k=N_{l-1}+1}^{N_l} a_k \varphi_k(x) \right\| < \sum_{l=1}^{n} \frac{\eta}{2^l} < \eta \tag{1.24}$$

и таким образом, условие (1.12) тоже выполнено.

Так как

$$\psi^2(x) = \sum_{l=1}^{n} \psi_l^2(x) \tag{1.25}$$

и согласно (1.20) имеем

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=N_{l-1}+1}^{N_l} a_k \varphi_k(x) \right)^2 dx = \sum_{k=N_{l-1}+1}^{N_l} a_k^2 \leqslant \beta^2 \int_E \psi_l^2(x)\, dx, \tag{1.26}$$

то из (1.23) получаем

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m} a_k \varphi_k(x) \right\|^2 = \sum_{k=N+1}^{m} a_k^2 = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=N_{l-1}+1}^{N_l} a_k^2 < \beta^2 \sum_{l=1}^{n} \int_E \psi_l^2(x)\, dx \leqslant \beta^2 \|\psi\|_E^2. \tag{1.27}$$

Неравенство (1.27) показывает, что условие (1.13) выполнено. Легко видеть, что для коэффициентов a_n, $N+1 \leqslant n \leqslant m$ линейной комбинации (1.23) выполняются также условия (1.14). В самом деле, пусть $N_{l-1} < n \leqslant N_l$. Тогда из (1.20) будем иметь

$$|a_n| = \|a_n \varphi_n(x)\| \leqslant \left\| \sum_{k=N_{l-1}+1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right\| + \left\| \sum_{k=N_{l-1}+1}^{n-1} a_k \varphi_k(x) \right\| < 2\beta \|\psi_l\|_E. \tag{1.28}$$

Так как, согласно (1.17), имеем $\|\psi_i x\|_E = \sqrt{\mu(A_i)}$, то из (1.15) и (1.28) следует, что $|a_n| \leqslant \delta$, $N+1 \leqslant n \leqslant m$. Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. *Пусть ортонормированная на отрезке* [0,1] *система* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *полна по рядам из* l_2 *на множестве* $E \subset [0,1]$, $\mu(E) > 0$. *Тогда для любого множества* $A \subset E$, $\mu(A) > 0$, *для любого натурального числа* N *и для положительных чисел* $\delta > 0$, $\eta > 0$ *существуют функция* $\psi(x)$ *и линейная комбинация* (1.5), *обладающие свойствами*

$$\psi(x) = 1,\ x \in A_1, \psi(x) = -1,\ x \in A_2,\ \psi(x) = 0,\ x \in E \setminus A, \tag{1.29}$$

$$A_1 \cup A_2 = A,\ A_1 \cap A_2 = \varnothing,\ \mu(A_1) = \mu(A_2) = \frac{1}{2}\mu(A), \tag{1.30}$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m} a_k \varphi_k(x) - \psi(x) \right\|_E < \eta, \tag{1.31}$$

$$|a_k| < \delta,\ N+1 \leqslant k \leqslant m, \tag{1.32}$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m} a_k \varphi_k(x) \right\| \leqslant \beta \left\| \psi(x) \right\|_E, \tag{1.33}$$

где β — *постоянная, зависящая только от множества* E *и от системы* $\{\varphi_n(x)\}$.

Доказательство. Применим лемму 1.2, мы можем определить функцию $\psi_1(x)$ и комбинацию

$$\sum_{k=N+1}^{m_1} a_k \varphi_k(x), \tag{1.34}$$

обладающие свойствами

$$\psi_1(x) = 1\ x \in A_1^{(1)},\ \psi_1(x) = -1,\ x \in A_2^{(1)},\ \psi_1(x) = 0,\ x \in E \setminus (A_1^{(1)} \cup A_2^{(1)}), \tag{1.35}$$

$$A_1^{(1)} \cup A_2^{(1)} \subset A,\ A_1^{(1)} \cap A_2^{(1)} = \varnothing,\ \mu(A_1^{(1)}) = \mu(A_2^{(1)}) = \frac{1}{4}\mu(A), \tag{1.36}$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m_1} a_k \varphi_k(x) - \psi(x) \right\|_E < \frac{\eta}{2^2}, \tag{1.37}$$

$$|a_k| < \delta,\ N+1 \leqslant k \leqslant m_1, \tag{1.38}$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m_1} a_k \varphi_k(x) \right\| \leqslant \beta \left\| \psi_1(x) \right\|_E. \tag{1.39}$$

Если уже определены полиномы

$$\sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} a_k \varphi_k(x),\ 1 \leqslant j \leqslant p-1,\ N = m_0 < m_1 < \cdots < m_{p-1} \tag{1.40}$$

и функции $\psi_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant p-1$,

$$\psi_j(x) = 1,\ x \in A_1^{(j)},\ \psi_j(x) = -1,\ x \in A_2^{(j)},\ \psi_j(x) = 0,$$
$$x \in E \setminus (A_1^{(j)} \cup A_2^{(j)}). \tag{1.41}$$

Применяем лемму 1.2, полагая в ее формулировке $N=m_{p-1}$ и взяв в качестве B множество

$$B_{p-1}=A\setminus\bigcup_{j=1}^{p-1}(A_1^{(j)}\cup A_2^{(j)}). \tag{1.42}$$

Тогда для чисел $\delta>0$, $\dfrac{\eta}{2^{p+1}}$ мы можем определить функцию $\psi_p(x)$ и полином

$$\sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k\varphi_k(x), \tag{1.43}$$

которые удовлетворяют условиям

$$\psi_p(x)=1,\ x\in A_1^{(p)},\ \psi_p(x)=-1,\ x\in A_2^{(p)},\ \psi_p(x)=0,$$
$$x\in E\setminus(A_1^{(p)}\cup A_2^{(p)}), \tag{1.44}$$

$$A_1^{(p)}\cup A_2^{(p)}\subset B_{p-1},\ A_1^{(p)}\cap A_2^{(p)}=\varnothing,\ \mu(A_1^{(p)})=\mu(A_2^{(p)})=\frac{1}{4}\mu(B_{p-1}), \tag{1.45}$$

$$\left\|\psi_p(x)-\sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k\varphi_k(x)\right\|_E<\frac{\eta}{2^{p+1}}, \tag{1.46}$$

$$|a_k|<\delta,\ m_{p-1}<k\leqslant m_p, \tag{1.47}$$

$$\left\|\sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k\varphi_k(x)\right\|<\beta\left\|\psi_p(x)\right\|_E. \tag{1.48}$$

Таким образом, по индукции определяются последовательности функций $\{\psi_p(x)\}_{p=1}^{\infty}$ и полиномы (1.43), которые для всех $p\geqslant 1$ удовлетворяют условиям (1.42), (1.44)—(1.48) и при этом $N=m_0<m_1<$ $<\cdots<m_p\cdots$.

Обозначив

$$A_1=\bigcup_{p=1}^{\infty}A_1^{(p)},\ A_2=\bigcup_{p=1}^{\infty}A_2^{(p)}, \tag{1.49}$$

согласно (1.42) и (1.45), будем иметь

$$A_1\cap A_2=\varnothing,\ A_1\cup A_2=A,\ \mu(A_1)=\mu(A_2)=\frac{1}{2}\mu(A). \tag{1.50}$$

Определим функцию $\psi(x)$ на множестве E равенством

$$\psi(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\psi_p(x). \tag{1.51}$$

Мы видим, что она удовлетворяет условиям (1.29) и (1.30) леммы 1.3. Так как ряд (1.51) сходится в метрике $L_2(E)$ к $\psi(x)$, можем взять натуральное число ν настолько большим, что

$$\left\|\sum_{p=1}^{\nu}\psi_p(x)-\psi(x)\right\|_E<\frac{\eta}{2}. \tag{1.52}$$

Взяв $m = m_\nu$, покажем, что полином

$$\sum_{k=N+1}^{m} a_k \varphi_k(x) = \sum_{p=1}^{\nu} \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x) \tag{1.53}$$

удовлетворяет условиям леммы 1.3. В самом деле, так как согласно (1.46)

$$\left\| \sum_{p=1}^{\nu} \psi_p(x) - \sum_{p=1}^{\nu} \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x) \right\|_E \leqslant \sum_{p=1}^{\nu} \left\| \psi_p(x) - \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x) \right\| < \frac{\eta}{2}, \tag{1.54}$$

то из (1.52), (1.53) и (1.54) получаем

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m} a_k \varphi_k(x) - \psi(x) \right\|_E < \eta \tag{1.55}$$

и условие (1 31) выполнено. Выполнение условия (1.32) следует из (1.53) и (1.47). Остается проверить выполнение условия (1.33). Из (1.48) и (1.44) следует

$$\left\| \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x) \right\|^2 < \beta^2 \left\| \psi_p(x) \right\|_E^2 = \beta^2 \int\limits_{A_1^{(p)} \cup A_2^{(p)}} \psi_p^2(x)\, dx \tag{1.56}$$

и так как согласно (1.41), (1.42) и (1.51)

$$\beta^2 \int\limits_E \left(\sum_{p=1}^{\nu} \psi_p(x) \right)^2 dx = \beta^2 \int\limits_E \sum_{p=1}^{\nu} \psi_p^2(x)\, dx =$$

$$= \beta^2 \sum_{p=1}^{\nu} \int\limits_{A_1^{(p)} \cup A_2^{(p)}} \psi_p^2(x)\, dx \leqslant \int\limits_E \psi^2(x)\, dx. \tag{1.57}$$

Из (1.56) и (1.57) получаем

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m} a_k \varphi_k(x) \right\|^2 = \sum_{p=1}^{\nu} \left\| \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x) \right\|^2 \leqslant \beta^2 \int\limits_E \psi^2(x)\, dx = \beta^2 \left\| \psi(x) \right\|_E^2. \tag{1.58}$$

Таким образом, условие (1.33) тоже выполнено и лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. *Пусть ортонормированная на* $[0,1]$ *система* $\{\varphi_n(x)\}$ *полна по рядам из* l_2 *на множестве* $E \subset [0,1]$, $\mu(E) > 0$, *и пусть* $B \subset E$, $\mu(B) > 0$, $\chi_B(x)$ — *характеристическая функция множества* B. *Тогда для любого натурального* N *и положительных чисел* $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $\delta > 0$ *можно определить линейную комбинацию* (1.5) *и множество* e, *обладающие следующими свойствами:*

$$e \subset B, \ \mu(e) < \varepsilon\mu(B), \tag{1.59}$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m} a_k \varphi_k(x) - \chi_B(x) \right\|_{E \setminus e} < \eta, \tag{1.60}$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m} a_k \varphi_k(x) \right\| < \frac{4\beta}{\varepsilon} \left\| \chi_B(x) \right\|_E, \tag{1.61}$$

$$|a_k| < \delta, \ N+1 \leqslant k \leqslant m, \tag{1.62}$$

где β — постоянная, зависящая только от системы $\{\varphi_n(x)\}$ и от множества E.

Доказательство. Применяя лемму 1.3, на первом шагу определим линейную комбинацию

$$\sum_{k=N+1}^{m_1} a_k \varphi_k(x) \ m_1 > N \tag{1.63}$$

и функцию $\psi_1(x)$, обладающие свойствами

$$\psi_1(x) = 1, \ x \in B_1^{(1)}, \ \psi_1(x) = -1, \ x \in B_2^{(1)}, \ \psi_1(x) = 0, \ x \in E \setminus B \tag{1.64}$$

$$B_1^{(1)} \cup B_2^{(1)} = B, \ B_1^{(1)} \cap B_2^{(1)} = \varnothing, \ \mu(B_1^{(1)}) = \mu(B_2^{(1)}) = \frac{1}{2}\mu(B), \tag{1.65}$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m_1} a_k \varphi_k(x) - \psi_1(x) \right\|_E < \frac{\eta}{2}, \tag{1.66}$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m_1} a_k \varphi_k(x) \right\| < \beta \left\| \psi_1(x) \right\|_E, \tag{1.67}$$

$$|a_k| < \delta, \ N+1 \leqslant k \leqslant m_1. \tag{1.68}$$

Предположим теперь, что определены линейные комбинации

$$\sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} a_k \varphi_k(x), \ N = m_0 < m_1 < \cdots < m_p, \ 1 \leqslant i \leqslant p \tag{1.69}$$

и функции $\psi_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant p$ такие, что

$$\psi_i(x) = 2^{i-1}, \ x \in B_1^{(i)}, \ \psi_i(x) = -2^{i-1}, \ x \in B_2^{(i)},$$
$$\psi_i(x) = 0, \ x \in E \setminus (B_1^{(i)} \cup B_2^{(i)}), \tag{1.70}$$

$$B_1^{(i)} \cup B_2^{(i)} = B_2^{(i-1)}, \ B_1^{(i)} \cap B_2^{(i)} = \varnothing, \ \mu(B_1^{(i)}) = \mu(B_2^{(i)}) = \frac{1}{2}\mu(B_2^{(i-1)}), \tag{1.71}$$

где $B_2^0 = B$.

Как легко видеть

$$\Phi_p(x) = \sum_{i=1}^{p} \psi_p(x) = \begin{cases} 1, \ x \in B \setminus B_2^{(p)}, \\ -2^p + 1, \ x \in B_2^{(p)}, \\ 0, \qquad x \in E \setminus B. \end{cases} \tag{1.72}$$

Применим лемму 1.3 для $A = B_2^{(p)}$, $N = m_p$, взяв вместо δ число $\delta 2^{-p}$ и вместо η — число $\eta 2^{-p-1}$. Тогда определяются линейная комбинация

$$\sum_{k=m_p+1}^{m_{p+1}} c_k \varphi_k(x), \ m_{p+1} > m_p \tag{1.73}$$

и функция $f_p(x)$, обладающие свойствами

$$f_p(x) = 1, \ x \in B_1^{(p+1)}, \ f_p(x) = -1, \ x \in B^{2(p+1)},$$
$$f_p(x) = 0, \ x \in E \setminus (B_1^{(p+1)} \cup B_2^{(p+1)}), \tag{1.74}$$

$$B_1^{(p+1)} \cup B_2^{(p+1)} = B_2^{(p)},\ B_1^{(p+1)} \cap B_2^{(p+1)} = \varnothing,\ \mu(B_1^{(p+1)}) =$$

$$= \mu(B_2^{(p+1)}) = \mu(B_2^{(p+1)}) = \frac{1}{2}\mu(B_2^{(p)}), \tag{1.75}$$

$$\left\| \sum_{k=m_p+1}^{m_{p+1}} c_k \varphi_k(x) - f_p(x) \right\|_E < \frac{\eta}{2^{2p+1}}, \tag{1.76}$$

$$\left\| \sum_{k=m_p+1}^{m_{p+1}} c_k \varphi_k(x) \right\| \leqslant \beta \left\| f_p(x) \right\|_E, \tag{1.77}$$

$$|c_k| < \frac{\delta}{2^p}, \tag{1.78}$$

Полагая $\psi_{p+1}(x) = 2^p f_p(x)$, $x \in E$, $a_k = 2^p c_k$, $m_p < k \leqslant \frac{\delta}{2^p}$ и $\Phi_{p+1}(x) = \Phi_p(x) + \psi_{p+1}(x)$, $x \in E$, мы видим, что (см. (1.76)—(1.78))

$$\left\| \sum_{k=m_p+1}^{m_{p+1}} a_k \varphi_k(x) - \psi_{p+1}(x) \right\| \leqslant \frac{\eta}{2^{2p+1}} \cdot 2^p = \frac{\eta}{2^{p+1}}, \tag{1.79}$$

$$\left\| \sum_{k=m_p+1}^{m_{p+1}} a_k \varphi_k(x) \right\| \leqslant \beta\, 2^p \left\| f_p(x) \right\|_E = \beta \left\| \psi_{p+1}(x) \right\|_E, \tag{1.80}$$

$$|a_k| = 2^p |c_k| < \frac{\delta}{2^p} \cdot 2^p = \delta,\ m_p < k \leqslant m_{p+1} \tag{1.81}$$

и что, кроме того, выполняются также (1.70) и (1.71) при $i = p+1$ и (1.72) при замене числа p на $p+1$. Таким образом, мы можем определить последовательности линейных комбинаций

$$\sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x),\ p = 1, 2, \cdots, \tag{1.82}$$

и функций $\{\psi_p(x)\}_{p=1}^{\infty}$, которые удовлетворяют условиям (1.72), (1.79)—(1.82) для всех $p \geqslant 0$, и выполнены также условия (1.70), (1.71) для всех $i = 1, 2, \cdots$. Пусть ε — число из условия (1.59) леммы 1.4 и q выбрано так, что $2^{-q} < \varepsilon \leqslant 2^{-q+1}$. Обозначим

$$\sum_{k=N+1}^{m} a_k \varphi_k(x) = \sum_{p=1}^{q} \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x),\ N = m_0 < m_1 < \cdots < m_q = m \tag{1.83}$$

и положим

$$e = B_2^{(q)}. \tag{1.84}$$

Покажем, что линейная комбинация (1.83) и множество e удовлетворяют требованиям леммы 1.4.

Из (1.71) следует

$$e \subset B,\ \mu(e) = \mu(B_2^{(q)}) = \mu(B)\, 2^{-q} < \varepsilon\mu(B). \tag{1.85}$$

С другой стороны, из (1.72), где вместо p взято q, и из (1.79) получаем

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m} a_k \varphi_k(x) - \chi_B(x) \right\|_{E\setminus e} \leqslant \left\| \sum_{k=N+1}^{m} a_k \varphi_k(x) - \Phi_q(x) \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=1}^{q} \left\| \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x) - \psi_p(x) \right\|_E \leqslant \sum_{p=1}^{q} \frac{\eta}{2^p} < \eta. \tag{1.86}$$

Из (1.85) и (1.86) следует, что условия (1.59) и (1.60) леммы 1.4 выполнены. Выполнение условия (1.62) следует из неравенств (1.81), которые выполнены для всех p, $1 \leqslant p \leqslant q$, и для всех k, $m_{p-1} \leqslant k \leqslant m_p$. Остается проверить выполнение условия (1.61). Так как согласно (1.70) и (1.71)

$$\|\psi_p(x)\|_E \leqslant 2^{p-1} \|\chi_B(x)\|_E, \ 1 \leqslant p \leqslant q, \tag{1.87}$$

из (1.80) получаем

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m} a_k \varphi_k(x) \right\| \leqslant \sum_{p=1}^{q} \left\| \sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} a_k \varphi_k(x) \right\| \leqslant \sum_{p=1}^{q} \beta 2^{p-1} \left\| \chi_B(x) \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \beta 2^{q+1} \left\| \chi_B(x) \right\|_E < \frac{4\beta}{\varepsilon} \left\| \chi_B(x) \right\|_E. \tag{1.88}$$

Лемма доказана.

§ 2. Доказательство теорем

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть ортонормированная на* $[0,1]$ *система* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *полна по рядам из* l_2 *на множество* E, $E \subset [0,1]$, $\mu(E) > 0$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует множестве* $e \subset E$, $\mu(e) < \varepsilon$, *такое, что если* $f(x) \in L_2[0,1]$ *и* $f(x) = 0$ *при* $x \in e \cup ([0,1] \setminus E)$, *то условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^p < \infty, \ 0 < p < 2, \ c_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) \, dx \tag{2.1}$$

выполняется только тогда, когда $f(x) = 0$ *почти всюду на* $[0,1]$.

Для формулировки следующей теоремы введем

Определение 2.1. Ортонормированную на $[0,1]$ систему $\{\varphi_n(x)\}$ назовем почти полной по рядам из l_2 на множестве $A \subset [0,1]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E \subset A$, $\mu(E) > \mu(A) - \varepsilon$, такое, что система $\{\varphi_n(x)\}$ полна по рядам из l_2 на множестве E.

Из теоремы 2.1 немедленно получается следующее обобщение результата Г. Г. Геворкяна и Л. Голзани (см. теорему 1 во введении).

Теорема 2.2. *Пусть ортонормированная на* $[0,1]$ *система* $\{\varphi_n(x)\}$ *почти полна по рядам из* l_2 *на отрезке* $[0,1]$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует множество* $Q \subset [0,1]$, $\mu(Q) > 1 - \varepsilon$, *которое является множеством единственности для системы* $\{\varphi_n(x)\}$ *относительно классов* l_p, $p < 2$.

Доказательство теоремы 2.1. Рассмотрим последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $0<\xi_k<1$, в которой каждое рациональное число $0<r\leqslant 1$ встречается бесконечное число раз, т. е. для любого r существует зависящая от r последовательность натуральных чисел $K(1, r)<K(2, r)<\cdots<K(i, r)<\cdots$ такая, что $\xi_{K(i,r)}=r$ для всех $i\geqslant 1$.

Обозначим

$$B_k=[0, \xi_k]\cap E, \quad k\geqslant 1, \tag{2.2}$$

и возьмем две последовательности положительных чисел η_k, ε_k, $k\geqslant 1$, где

$$\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k<+\infty, \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k<\varepsilon. \tag{2.4}$$

Пусть

$$1<p_1<p_2<\cdots p_k<\cdots, \ \lim_{k\to\infty}p_k=2, \tag{2.5}$$

$$q_k=\frac{p_k}{p_k-1}, \quad k\geqslant 1. \tag{2.6}$$

Так как $q_k>2$, $k\geqslant 2$, можно выбрать $\delta_k>0$, $k\geqslant 1$ такие, что

$$\left(\frac{16\beta^2}{\varepsilon_k^2}\right)^{1/q_k}\cdot\left(\delta^{q_k-2}\right)^{1/q_k}<\eta_k, \quad k\geqslant 1. \tag{2.7}$$

Из формулировки леммы 1.4 видно, что путем ее последовательного применения, где каждый раз полагается $B=B_k$, $\varepsilon=\varepsilon_k$, $\eta=\eta_k$, $\delta=\delta_k$, можно определить последовательность множеств e_k, $k\geqslant 1$ и последовательность линейных комбинаций

$$H_k(x)=\sum_{j=N_k}^{m_k}a_j\varphi_j(x), \quad k\geqslant 1, \tag{2.8}$$

обладающих свойствами

$$N_1<m_1, \ m_k<N_{k+1}<m_{k+1}, \ k\geqslant 1, \tag{2.9}$$

$$e_k\subset B_k, \ \mu(e_k)<\varepsilon_k\,\mu(B_k), \tag{2.10}$$

$$\|H_k(x)-\chi_{B_k}(x)\|_{E\setminus e_k}<\eta_k, \tag{2.11}$$

$$\|H_k(x)\|=\left(\sum_{j=N_k}^{m_k}a_j^2\right)^{1/2}\leqslant\frac{4\beta}{\varepsilon_k}\|\chi_{B_k}(x)\|_E, \tag{2.12}$$

$$|a_j|<\delta_k, \ N_k\leqslant j\leqslant m_k. \tag{2.13}$$

Когда B_k пусто, считаем $\chi_{B_k}(x)=0$, при $x\in E$, $H_k(x)=0$, (т. е. $a_j=0$, $N_k\leqslant j\leqslant m_k$).

Покажем, что множество

$$e=\bigcup_{k=1}^{\infty}e_k \tag{2.14}$$

удовлетворяет требованиям теоремы 2.1.

Из (2.2), (2.4) и (2.10) следует, что $e \subset E$, $\mu(e) < \varepsilon$. Пусть $f(x) \in L_2[0,1]$ и $f(x) = 0$ при $x \in e \cup ([0,1] \setminus E)$. Без ограничения общности можно считать $\|f\| = 1$. Тогда ее коэффициенты Фурье c_j по системе $\{\varphi_j(x)\}$ будут по абсолютной величине не больше единицы, и поэтому из выполнения условия (2.1) для некоторого p, $1 < p < 2$ следует $\sum |c_k|^{p_k} \leqslant \sum |c_k|^p$ при $p_k > p$ и, следовательно, существуют k_0 и положительная постоянная M такие, что

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^{p_k}\right)^{1/p_k} \leqslant M, \quad k > k_0. \tag{2.15}$$

Из (2.2), (2.10) и (2.14) следует

$$\int_0^{\xi_k} f(x)\,dx \int_{B_k \setminus e_k} f(x)\,dx = \int_{E \setminus e_k} f(x)\,\chi_{B_k}(x)\,dx, \quad k \geqslant 1, \tag{2.16}$$

$$\int_0^1 f(x)\,H_k(x)\,dx = \int_{E \setminus e_k} f(x)\,H_k(x)\,dx \quad k \geqslant 1, \tag{2.17}$$

и поэтому, согласно (2.11), получаем

$$\left|\int_0^{\xi_k} f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,H_k(x)\,dx\right| < \eta_k, \quad k \geqslant 1. \tag{2.18}$$

С другой стороны, согласно (2.6), (2.8), (2.13) и 2.15)

$$\left|\int_0^1 f(x)\,H_k(x)\,dx\right| = \left|\sum_{j=N_k}^{m_k} c_j a_j\right| \leqslant \left(\sum_{j=N_k}^{m_k} |c_j|^{p_k}\right)^{1/p_k} \left(\sum_{j=N_k}^{m_k} |a_j|^{q_k}\right)^{1/q_k} \leqslant$$

$$\leqslant M\left(|\varepsilon_k|^{q_k-2}\right)^{1/q_k} \left(\sum_{j=N_k}^{m_k} |a_j|^2\right)^{1/q_k}, \quad \forall k\ k > k_0. \tag{2.19}$$

Из (2.12)

$$\sum_{j=N_k}^{m_k} |a_j|^2 \leqslant \frac{16\beta^2}{\varepsilon_k^2}, \tag{2.20}$$

с учетом (2.7) и (2.19), получаем

$$\left|\int_0^1 f(x)\,H_k(x)\,dx\right| \leqslant M\eta_k, \quad k \geqslant k_0. \tag{2.21}$$

Сравнивая (2.18) (2.21), имеем

$$\left|\int_0^{\xi_k} f(x)\,dx\right| < (M+1)\,\eta_k, \quad k \geqslant k_0. \tag{2.22}$$

Тогда, если r, $0 < r \leqslant 1$ — рациональное число и $\xi_{K(i,r)} = r$ для всех $i \geqslant 1$, где $K(1, r) < K(2, r) < \cdots K(i, r) < \cdots$, то из (2.22), где вместо k берется $K(i, r)$, следует, что

$$\int_0^r f(x)\,dx = 0. \tag{2.23}$$

Так как (2.23) выполнено для всех рациональных r, $0 < r \leqslant 1$, то $f(x) = 0$ почти всюду на $[0,1]$, и теорема 2.1 доказана.

Следующие теоремы устанавливают существование множества единственности для классов функций из $L_2[0,1]$, коэффициенты Фурье которых по данной системе $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 w(n) < +\infty, \tag{2.24}$$

где $w(n)$ — неотрицательная функция и $w(n) \uparrow +\infty$ при $n \to \infty$.

Теорема 2.3. *Пусть ортонормированная на* $[0,1]$ *система* $\{\varphi_n(x)_{n=1}^{\infty}\}$ *по рядам из* l_2 *на множестве* $E \subset [0,1]$, $\mu(E) > 0$, *и пусть* $w(n)$ — *положительная неубывающая функция, стремящаяся* $k + \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $e \subset E$, $\mu(e) < \varepsilon$ *такое, что если* $f(x) = 0$ *при* $x \in e \cup ([0,1] \diagup E)$, *то условие* (2.24) *на коэффициенты Фурье*

$$c_n = \int_0^1 f(x)\,\varphi_n(x)\,dx \tag{2.25}$$

может выполняться только тогда, когда $f(x) = 0$ *почти всюду на* $[0,1]$.

Из теоремы 2.3 немедленно следует

Теорема 2.4. *Пусть ортонормированная на* $[0,1]$ *система* $\{\varphi_n(x)\}$ *почти полна на* $[0,1]$ *и* $v(n) \uparrow +\infty$ *при* $n \to \infty$, $v(n) > 0$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует множество* $e \subset [0,1]$, $\mu(e) < \varepsilon$, *такое, что если* $f(x) = 0$ *при* $x \in e$, *то условие* (2.24) *на коэффициенты Фурье* (2.25) *выполняется только тогда, когда* $f(x) = 0$ *почти всюду на* $[0,1]$.

Доказательство теоремы 2.3. Из формулировки леммы 1.4 видно, что можно выбрать линейные комбинации (2.8), которые удовлетворяют условиям (2.9)—(2.12) и, кроме того, числа N_k удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{\sqrt{v(N_k)}} < \eta_k \frac{\varepsilon_k}{4\beta}, \ \forall\, k \geqslant 1. \tag{2.26}$$

Покажем, что множество e, определенное равенством (2.14), в котором множества e_k удовлетворяют условиям (2.10) и (2.11) при указанном выборе чисел N_k, удовлетворяет требованиям теоремы 2.3.

Пусть $f(x) = 0$ при $x \in e \cup ([0,1] \setminus E)$. Тогда, как было показано выше, имеют место (2.16), (2.17) и (2.18). из выполнения условия (2.24) вытекает

$$\left| \int_0^1 f(x) H_k(x)\,dx \right| = \left| \sum_{j=N_k}^{m_k} c_j a_j \right| \leqslant \sqrt{\sum_{j=N_k}^{m_k} c_j^2\, v(j)} \times$$

$$\times \sqrt{\sum_{j=N_k}^{m_k} a_j^2 \frac{1}{v(j)}} \leqslant M \frac{1}{\sqrt{v(N_k)}} \sqrt{\sum_{j=N_k}^{m_k} a_j^2}. \tag{2.27}$$

Из (2.27), (2.26) и (2.12) следует

$$\left| \int_0^1 f(x) H_k(x)\, dx \right| \leqslant M \eta_k \ \forall k,\ k \geqslant 1, \tag{2.28}$$

откуда, согласно (2.18), получаем

$$\left| \int_0^{\xi_k} f(x)\, dx \right| < \eta_k (M+1) \ \forall k,\ k \geqslant 1. \tag{2.29}$$

Как было показано выше, из (2.29) и (2.23) и из выбора последовательности $\{\xi_k\}$ следует, что $f(x) = 0$ почти всюду на $[0,1]$. Теорема 2.3 доказана.

Из теорем 2.1 и 2.3 легко получаются следующие теоремы, представляющие обобщения соответствующих теорем А. М. Олевского [4] о полных в $L_2[0,1]$ ОН системах.

Теорема 2.5. *Если ортонормированная на* $[0,1]$ *система* $\{\varphi_n(x)\}$ *полна по рядам из* l_2 *на некотором множестве* $E \subset [0,1]$, $\mu(E) > 0$, *то существует непрерывная на* $[0,1]$ *функция* $f(x)$ *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p = \infty \tag{2.30}$$

для всех $p < 2$, *где*

$$c_n = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x)\, dx. \tag{2.31}$$

Теорема 2.6. *Если ортонормированная на* $[0,1]$ *система* $\{\varphi_n(x)\}$ *полна по рядам из* l_2 *на некотором множестве* $E \subset [0,1]$, $\mu(E) > 0$, *то для любой функции* $w(n) > 0$, $w(n) \uparrow +\infty$ *при* $n \to \infty$ *существует непрерывная на* $[0,1]$ *функция* $f(x)$, *коэффициенты Фурье* (2.31) *которой по этой системе удовлетворяют условию*

$$\sum c_n^2 w(n) = +\infty. \tag{2.32}$$

Справедливость теоремы 2.5 немедленно следует из теоремы 2.1 и из следующей теоремы Л. Голзани ([1], стр. 1142, теорема 10).

Теорема (*Л. Голзани*). *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *полная ортонормированная система в* $L_2[0,1]$. *Если существует множество* $E \subset [0,1]$, $0 < \mu(E) < 1$, *которое является множеством единственности системы* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *относительно классов* l_p, $p < 2$, *то существует непрерывная на* $[0,1]$ *функция* $f(x)$, *коэффициенты Фурье* (2.31) *которой по этой системе удовлетворяют условию* (2.30) *для всех* $p < 2$.

Для получения теоремы 2.6 из теоремы 2.3 нужно установить некоторый аналог вышеуказанной теоремы Л. Голзани. Сначала введем

Определение 2. Пусть $w(n)>0$, $w(n)\uparrow+\infty$ при $n\to\infty$. Будем говорить, что множество $A\subset[0,1]$, $0<\mu(A)<1$ является $U_{w(n)}$-множеством единственности ортонормивованной на $[0,1]$ системы $\{\varphi_n(x)\}$, если не существует отличной от нуля функции $f(x)$, равной нулю на $[0,1]\setminus A$, коэффициенты Фурье которой по этой системе удовлетворяли бы условию

$$\sum c_n^2 w(n)<+\infty. \tag{2.33}$$

Теорема 2.6 немедленно следует из теоремы 2.3 и из следующего утверждения.

Теорема 2.7. *Если ортонормированная на* $[0,1]$ *система* $\{\varphi_n(x)\}$ *обладает некоторым* $U_{w(n)}$-*множеством единственности, то существует непрерывная на* $[0,1]$ *функция* $f(x)$, *коэффициенты Фурье* (2.31) *которой по этой системе удовлетворяют условию* (2.32).

При доказательстве этой теоремы применяются аналогичные приведенным в [4] рассуждения. Обозначим через $l_2(w(n))$ банахово пространство последовательностей $(a_1, a_2,\cdots, a_n,\cdots)$, где $\sum a_n^2 w(n)<\infty$ с нормой $(\sum a_n^2 w(n))^{1/2}$. Если множество A, $0<\mu(A)<1$, является $U_{w(n)}$-множеством единственности для системы $\{\varphi_n(x)\}$ и если $\chi_A(x)$— характеристическая функция этого множества, то коэффициенты

$$c_n(\chi_A(x))=\int\varphi_n(x)\chi_A(x)\,dx,\ n=1,2\cdots \tag{2.34}$$

будут удовлетворять условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(\chi_A(x)|^2 w(n)=+\infty. \tag{2.35}$$

Рассмотрим последовательность линейных операторов

$$T_N(f)=(c_1(f),\ c_2(f),\cdots c_N(f),\ 0,\cdots,0),\ N=1,2,\cdots, \tag{2.36}$$

где

$$c_n(f)=\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx, \tag{2.37}$$

отображающих пространство $C[0,1]$ непрерывных на $[0,1]$ функций в пространство $l_2(w(n))$.

Так как

$$\|T_N\|=\sup_{\|f\|_C<1}\left(\sum_{n=1}^{N}|c_n(f)|^2 w(n)\right)^{1/2}\geqslant\left(\sum_{n=1}^{N}|c_n(\chi_A(x))|^2 w(n)\right)^{1/2}, \tag{2.38}$$

то из условия (2.35) следует, что $\|T_N\|\to+\infty$ при $N\to\infty$. Отсюда и из теоремы Банаха—Штейнгауза следует существование непрерывной функции $f(x)$, для которой

$$\sum|c_n(f)|^2 w(n)=+\infty.$$

Автор выражает благодарность Г. Г. Геворкяну за постановку вопросов и внимание при выполнении настоящей работы.

Республиканский ВЦ
Госагропрома Арм.ССР

Поступила 10.II.1987

ԱՆ. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ. Կառլեմանի եզակիությունների և օրթոնորմալ սիստեմների ըստ l_p դասերի միակության բազմությունների մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ապացուցված են ըստ l_p դասերի միակության բազմությունների գոյության մասին թեորեմներ և նրանցից ստացված է Կառլեմանի եզակիությունների գոյությունը ոչ լրիվ օրթոնորմալ սիստեմների որոշ դասերի համար։

An. A. TALALIAN. *On Carleman's pecularities and uniqueness sets of orthonormal systems with respect to l_p classes* (summary)

The paper establishes theorems on existence of uniqueness sets with respect to l_p classes and as a corollary the existence of Carleman's pecularities for some classes of noncomplete orthonormal system.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Golzani.* Sets of uniqueness of l_p for general orthonormal complete systems Boll. Unione Math. Soc., 1964, 70. 722—723.
2. *L. Golzani.* Existence of sets of uniqueness of l_p for orthonormal systems, Proc Amer. Math. Soc., 1981, 83, № 3, 569—671.
3. *Г. Г. Геворкян.* О множествах единственности для полных ортонормированных систем, Матем. заметки, 32, № 5, 1982, 651—656.
4. *А. М. Олевский.* О расходимости ортогональных рядов и о коэффициентах Фурье непрерывных функций по полным системам, Сиб. мат. журнал, 4, № 3, 1963, 647—656.
5. *А. А. Талалян.* О локальном характере некоторых свойств полных ортонормированных систем, Труды МИ АН СССР им. В. А. Стеклова, 164, 1983, 155—168.