ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIV, № 4, 1989 Математика

УДК 517.53

Б. Я. ЛЕВИН, И. О. ХАЧАТРЯН

О ЗАМЫКАНИИ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ПРИ ВЗВЕШЕННО-РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Для данного числа $\rho > 1$ обозначим через $\Delta(\rho)$ угловую область

$$\Delta(\rho) = \left\{z : |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho},\ 0 < |z| < +\infty\right\},$$

а через $\Delta^*(\rho)$ — дополнительную угловую область. Общую границу этих областей обозначим через L_ρ.

Пусть ω — произвольное число из интервала $(-1, 1)$ и пусть $\mu = \frac{1}{2\rho}(1 + \omega + \rho)$, так что $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$.

Пусть на L_ρ определена вещественная измеримая функция $\varphi(t)$ такая, что $\varphi(t) \geq 1$, $\lim\limits_{|t|\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$ и

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{|t|^{\rho(1-\mu)}}{\varphi(t)} = 0. \tag{1}$$

Обозначим через $C_\varphi(L_\rho)$ пространство непрерывных на L_ρ функций $f(t)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{|f(t)|}{\varphi(t)}.$$

Под нормой элемента f понимаем число

$$\|f\| = \sup_{t\in L_\rho} \frac{|f(t)|}{\varphi(t)}.$$

Функция $E_\rho(z; \mu)$ типа Миттаг-Леффлера определяется разложением

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(\mu + \frac{n}{\rho}\right)}.$$

Она—целая, порядка ρ и типа 1 при произвольном значении параметра μ. Из ее асимптотических свойств ([1], стр. 127) следует, что при $t \in L_\rho$, $|t| \to +\infty$

$$E_\rho(t; \mu) = \rho\, t^{\rho(1-\mu)} + O(1), \tag{2}$$

и следовательно условие (1) обеспечивает включение

$$E_\rho(ut; \mu) \in C_\varphi(L_\rho)$$

для произвольного неотрицательного значения $u \geq 0$.

В настоящей работе рассматривается задача: в каких пространствах $C_\varphi(L_\rho)$ система функций типа Миттаг—Леффлера

$$\{E_\rho(ut;\ \mu)\},\ 0 \leqslant u \leqslant a, \tag{3}$$

где a—данное положительное число, является замкнутой?

В случае $\rho=1$, $\mu=1$ множество L_ρ становится мнимой осью, а система (3) обращается в систему экспонент $\{e^{ut}\}$, $0 \leqslant u \leqslant a$. Описанию замыкания этой системы посвящены работы Э. Акутовица [2], Н. Левинсона и А. Мак—Кина [3], Ю. И. Любарского [4] и других.

Здесь мы подробно остановимся на одном результате Б. Я. Левина о замыкании системы $\{e^{iut}\}$, $-\sigma \leqslant u \leqslant \sigma$ в $C_\varphi(-\infty, +\infty)$.

Эта задача родственна известной проблеме С. Н. Бернштейна о весовом приближении непрерывных функций полиномами на вещественной оси. Решение этой проблемы дано в работах Н. И. Ахиезера и С. Н. Бернштейна [5, 6] и С. Н. Мергеляна [7 — 9]. Одним из существенных моментов метода С. Н. Мергеляна является следующее: множество P алгебраических полиномов $p(t)$ обладает свойством (Б), т. е. для произвольного $p \in P$ функция $q(t)=[p(t)-p(z)](t-z)^{-1}$ входит в P для любого комплексного z. Тригонометрические полиномы $s(t)=\sum c_k e^{i\alpha_k t}$ не обладают таким свойством. Эта трудность обойдена следующим образом. Рассматривается множество B_σ целых функций экспоненциального типа (ц. ф. э. т.) не выше σ, ограниченных на вещественной оси. Это множество уже обладает свойством (Б). Далее, с помощью хорошо известной теоремы Б. М. Левитана:

для любой функции $f \in B_\sigma$ и любых чисел $\varepsilon > 0$, $N > 0$ существует такой тригонометрический полином $s(t)=\sum\limits_{-\sigma<\lambda_k<\sigma} c_k e^{i\lambda_k t}$ степени σ, что

$$\sup_{|t|<N} |f(t)-s(t)| < \varepsilon, \quad \sup_{-\infty<t<+\infty} |s(t)| \leqslant \sup_{-\infty<t<+\infty} |f(t)|,$$

доказывается следующая

Лемма 1. *Множество тригонометрических полиномов степени не выше σ плотно в B_σ (в метрике пространства $C_\varphi(-\infty, +\infty)$).*

Такая замена аппроксимирующих тригонометрических полиномов степени не выше σ множеством B_σ дает возможность применить метод С. Н. Мергеляна.

Чтобы сформулировать соответствующий результат введем следующие обозначения.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество ц. ф. э. т. σ таких, что $f(t) \times (t-i)^{-1}$ ограничена на вещественной оси и $\|f(t)(t-i)^{-1}\| \leqslant 1$, а через $\psi(z)$:

$$\psi(z)=\sup_{f\in\mathfrak{M}} |f(z)|.$$

Тогда имеет место

---

* Изложена в спецкурсе, читанном в ХГУ в 1951 г.

Теорема** (Б. Я. Левин). *Для полноты множества B_σ в $C_\varphi(-\infty, +\infty)$ необходимо, чтобы $\psi(z) \equiv +\infty$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, и достаточно, чтобы $\psi(z) = +\infty$ хотя бы в одной точке комплексной плоскости.*

Другим эквивалентным критерием полноты в C_φ является расходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \psi(t)}{1+t^2}\, dt = +\infty.$$

Теперь вернемся к нашей задаче. Нам понадобится обобщение леммы 1 для целых функций порядка $\rho > 1$. Чтобы было ясно, именно на какие классы естественным образом обобщается эта лемма, мы приведем теорему Б. М. Левитана (следовательно и лемму 1) в другой, эквивалентной формулировке:

пусть $f(z)$ — ц. ф. э. т. σ, ограниченная в верхней полуплоскости. Тогда для любых $\varepsilon>0$, $N>0$ существует тригонометрический полином вида

$$s(t) = \sum_{0<\lambda_k<\sigma} c_k e^{i\lambda_k t}$$

такой, что

$$\sup_{|t|<N} |f(t) - s(t)| < \varepsilon, \quad \sup_{-\infty<t<+\infty} |s(t)| \leqslant \sup_{-\infty<t<+\infty} |f(t)|.$$

В соответствии с этим лемму 1 можно переформулировать так:

Лемма 1′. *Множество тригонометрических полиномов вида*

$$\sum_{0<\lambda_k<\sigma} c_k e^{i\lambda_k t}$$

плотно в множестве ц. ф. э. т. $<\sigma$, ограниченных в верхней полуплоскости.

Эта лемма допускает обобщение на класс $B_\sigma^*(L_\rho)$ целых функций порядка $\rho > 1$ и типа $\leqslant \sigma$, ограниченных в области $\Delta^*(\rho)$

Это обобщение опирается на установленное М. М. Джрбашяном параметрическое представление специальных классов целых функций.

Обозначим через $A_\sigma^{(\rho)}\left(\omega; \pm\dfrac{\pi}{2\rho}\right)$ класс целых функций порядка $\rho \geqslant 1$ и типа $\leqslant \sigma$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{+\infty} |f(te^{-i\vartheta})|^2\, t^\omega\, dt < +\infty, \quad \frac{\pi}{2\rho} \leqslant |\vartheta| \leqslant \pi,$$

где $\omega \in]-1, 1[$ — заданное число.

Теорема (М. М. Джрбашян, [1], стр. 376). *Класс $A_\sigma^{(\rho)}\left(\omega; \pm\dfrac{\pi}{2\rho}\right)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление*

** В указанном ранее спецкурсе была доказана более общая теорема о полноте множества B_σ в произвольных Ф-пространствах. Формулировку см. в [4].

$$f(z)=\int_0^{\sigma} E_\rho(z\tau^{1/\rho};\ \mu)\,\gamma(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau,$$

где $\mu=\frac{1}{2\rho}(1+\omega+\rho)$ *и* $\gamma(\tau)\in L_2(0,\ \sigma)$. *Функция* $\gamma(\tau)$ *единственна и почти всюду определяется формулой*

$$\frac{i}{2\pi\rho}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}\frac{d}{d\tau}\int_0^{+\infty} f\left(e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}v^{1/\rho}\right)\frac{e^{i\tau v}-1}{iv}v^{\mu-1}\,dv-\right.$$

$$\left.-e^{i\frac{\pi}{2}\mu}\frac{d}{d\tau}\int_0^{+\infty} f\left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}v^{1/\rho}\right)\frac{e^{-i\tau v}-1}{-iv}v^{\mu-1}\,dv\right\}=\begin{cases}\gamma(\tau), & \tau\in\,]0,\ \sigma[\\ 0, & \tau\in\,]\sigma,\ +\infty[\end{cases}$$

Обобщением леммы 1′ является

Лемма 2. *Множество линейных комбинаций вида*

$$\sum_{0<\lambda_k<\sigma} c_k\, E_\rho(\lambda_k^{1/\rho}\, t;\ \mu)$$

плотно (в метрике $C_\varphi(L_\rho)$*) в множестве* $\overset{*}{B}_\sigma(L_\rho)$.

Прежде, чем перейти к доказательству этой леммы, приведем одно замечание, которое сформулируем в виде леммы.

Лемма 3. *Для любой функции* $f(z)\in \overset{*}{B}_\sigma(L_\rho)$ *и для любого* $\varepsilon>0$ *существует число* $\delta_0>0$ *и функция* $F(z)\in \overset{*}{B}_{\sigma-\delta_0}(L_\rho)$ *такая, что*

$$\|f(t)-F(t)\|<\varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $f\in \overset{*}{B}_\sigma(L_\rho)$, $\varepsilon>0$—произвольное число и $M=\sup_{t\in L_\rho}|f(t)|$. Рассмотрим функцию

$$F(t)=f(at)\in \overset{*}{B}_{\sigma a^\rho}(L_\rho).$$

Выберем $N>0$ настолько большим, чтобы

$$\frac{2M}{\varphi(t)}<\frac{\varepsilon}{2}\quad \text{при } |t|\geqslant N. \tag{4}$$

Так как $\lim_{a\to 1} F(t)=\lim_{a\to 1} f(at)=f(t)$, причем равномерно в любом круге $|t|<R$, то существует число $\delta_1>0$ такое, что при $0<1-a<\delta_1$

$$|F(t)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

для всех $t\in L_\rho$, $|t|\leqslant N$.

Тогда из (4) и (5) будем иметь

$$\|F(t)-f(t)\|=\|f(at)-f(t)\|=\sup_{t\in L_\rho}\frac{|f(at)-f(t)|}{\varphi(t)}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{t\in L_\rho,\ |t|\leqslant N}|f(at)-f(t)|+\sup_{t\in L_\rho,\ |t|>N}\frac{|f(at)-f(t)|}{\varphi(t)}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{|t|>N} \frac{2M}{\varphi(t)} < \varepsilon, \quad 1 - \delta_1 < a < 1.$$

Лемма 3 доказана.

Перейдем теперь к доказательству леммы 2. Пусть $f(t)$ — произвольная функция из $\overset{*}{B_a}(L_\rho)$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Пусть, далее, $F(t)$ и $\delta_0 > 0$ имеют тот же смысл, что в лемме 3.

Для функции $E_\rho(z; \mu + 1)$ имеем ([1], стр. 438)

$$\int_0^{+\infty} |E_\rho(e^{i\alpha} x^{1/\rho}; \mu + 1)\, x^{\mu-1}|^2\, dx < C, \quad \frac{\pi}{2\rho} \leqslant |\alpha| < \pi$$

или, что то же самое

$$\int_0^{+\infty} |E_\rho(e^{i\alpha} x; \mu + 1)|^2\, x^{\omega}\, dx \leqslant C, \quad \frac{\pi}{2\rho} \leqslant |\alpha| \leqslant \pi \tag{6}$$

(C не зависит от α).

Далее, как следует из (2) при $|t| \to +\infty$, $t \in L_\rho$

$$E_\rho(t; \mu + 1)| = o(1).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$s_\delta(z) = E_\rho(\delta z; \mu + 1)\, \Gamma(\mu + 1).$$

Из асимптотических свойств функции типа Миттаг-Леффлера следует, что $s_\delta(z) \in \overset{*}{B_\delta}{}^\rho(L_\rho)$, а из (6) следует, что

$$s_\delta(z) \in A^{(\rho)}_{\delta\rho}\left(\omega; \pm\frac{\pi}{2\rho}\right). \tag{7}$$

Легко проверяется, что

$$\lim_{\delta\to 0} s_\delta(z) = 1, \tag{8}$$

причем равномерно в любом круге $|z| < R$.

Рассмотрим функцию

$$F_\delta(z) = F(z)\, s_\delta(z). \tag{9}$$

Имеем

$$F(z) - F_\delta(z) = F(z)\,[1 - s_\delta(z)]. \tag{10}$$

Из (8), (10) учитывая, что $F(z)$ и $s_\delta(z)$ ограничены на L_ρ:

$$|s_\delta(t)| \leqslant C_1, \quad |F(t)| \leqslant C_2, \quad t \in L_\rho,$$

причем C_1 не зависит от δ, получим

$$\lim_{\delta\to 0} \|F(t) - F_\delta(t)\| = 0.$$

Следовательно, можем написать, что

$$\|F(t) - F_\delta(t)\| < \varepsilon, \quad 0 < \delta < \delta_1. \tag{11}$$

Так как по лемме 3 $F \in B^{*}_{\sigma-\sigma_0}(L_\rho)$, то из (7) и (9) будем иметь

$$F_\delta(z) \in A^{(\rho)}_{\sigma-\sigma_0+\delta^\rho}\left(\omega;\ \pm\frac{\pi}{2\rho}\right).$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\delta^\rho \leqslant \delta_0$ и $\delta < \delta_1$, так что

$$F_\delta(z) \in A^{(\rho)}_{\sigma}\left(\omega;\ \pm\frac{\pi}{2\rho}\right)$$

и имеет место неравенство (11).

По теореме М. М. Джрбашяна $F_\delta(z)$ допускает представление

$$F_\delta(z) = \int\limits_0^\sigma E_\rho(z\tau^{1/\rho};\ \mu)\,\gamma_\delta(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau,$$

где

$$\gamma_\delta(\tau) \in L_2(0,\ \delta),\quad \mu = \frac{1}{2\rho}(1+\omega+\rho).$$

Пусть $N > 0$ — произвольное число. Подберем непрерывную функцию $\gamma_{\delta,N}(\tau)$ такую, чтобы при $|t| < N$, $t \in L_\rho$

$$\left|\int\limits_0^\sigma E_\rho(t\tau^{1/\rho};\ \mu)\,\gamma_\delta(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau - \int\limits_0^\sigma E_\rho(t\tau^{1/\rho};\ \mu)\,\gamma_{\delta,N}(\tau)\,d\tau\right| < \varepsilon \tag{12}$$

и чтобы

$$\int\limits_0^\sigma |\gamma_{\delta,N}(\tau)|\,d\tau \leqslant 2\int\limits_0^\sigma |\gamma_\delta(\tau)|\,\tau^{\mu-1}\,d\tau. \tag{12'}$$

Выберем точки τ_k таким образом, чтобы

$$\left|\int\limits_0^\sigma E_\rho(t\tau^{1/\rho};\ \mu)\,\gamma_{\delta,N}(\tau)\,d\tau - \sum \gamma_{\delta,N}(\tau_k)\,E_\rho(t\tau_k^{1/\rho};\ \mu)\right| < \varepsilon \tag{13}$$

при $|t| \leqslant N$, $t \in L_\rho$ и чтобы

$$\sum |\gamma_{\delta,N}(\tau_k)|\,\Delta\tau_k \leqslant 2\int\limits_0^\sigma |\gamma_{\delta,N}(\tau)|\,d\tau. \tag{14}$$

Участвующую в неравенстве (13) сумму обозначим так:

$$\sum \gamma_{\delta,N}(\tau_k)\,\Delta\tau_k\,E_\rho(t\tau_k^{1/\rho};\ \mu) = \sum c_{k,N}\,E_\rho(t\tau_k^{1/\rho};\ \mu)$$

и оценим норму

$$\|F_\delta(t) - \sum_{0<\tau_k<\sigma} c_{k,N}\,E_\rho(t\tau_k^{1/\rho};\ \mu)\|.$$

Из (12) и (13) имеем

$$|F_\delta(t) - \sum c_{k,N}\,E_\rho(t\tau_k^{1/\rho};\ \mu)| < 2\varepsilon,\quad t \in L_\rho,\ |t| \leqslant N.$$

Далее для $t \in L_\rho$, $|t| \geqslant N$ имеем

$$\frac{1}{\varphi(t)}\left|\sum c_{k,N} E_\rho(t\tau_k^{1/\rho};\ \mu)\right| = \frac{1}{\varphi(t)}\left|\sum \gamma_{\delta,N}(\tau_k)\,\Delta\tau_k\, E_\rho(t\tau_k^{1/\rho};\ \mu)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|t|>N,\ 0<\tau_k<\sigma} \frac{|E_\rho(t\tau_k^{1/\rho};\ \mu)|}{|t|^{\rho(1-\mu)}}\cdot \sup_{|t|>N} \frac{|t|^{\rho(1-\mu)}}{\varphi(t)}\cdot \sum |\gamma_{\delta,N}(\tau_k)|\,\Delta\tau_k \leqslant$$

$$\leqslant c_1\cdot o(1)\cdot 2\int_0^\sigma |\gamma_{\delta,N}(\tau)|\,d\tau \leqslant 4\,c_1\cdot o(1)\int_0^\sigma |\gamma_\delta(\tau)|\,\tau^{\mu-1}\,d\tau,$$

где $c_1 = \sup\limits_{t\in L_\rho,\ |t|>1} \dfrac{E_\rho(t;\ \mu)}{|t|^{\rho(1-\mu)}}$, а $o(1)$ означает величину, стремящуюся к нулю при $N\to+\infty$. Здесь нами использованы неравенства (14), (12′), условие (1) на весовую функцию $\varphi(t)$ и асимптотика (2).

Оценим теперь последний интеграл. Имеем

$$\int_0^\sigma |\gamma_\delta(\tau)|\,\tau^{\mu-1}\,d\tau \leqslant \left(\int_0^\sigma |\gamma_\delta(\tau)|^2\,d\tau\right)^{1/2}\cdot\left(\int_0^\sigma \tau^{2\mu-2}\,d\tau\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_0^\sigma |\gamma_\delta(\tau)|^2\,d\tau\right)^{1/2}\cdot\frac{\sigma^{\mu-1/2}}{\sqrt{2\mu-1}}.$$

Из общей теории интегральных преобразований с ядрами Миттаг-Леффлера ([1], стр. 238), имеем

$$\int_0^\sigma |\gamma_\delta(\tau)|^2\,d\tau \leqslant \frac{1}{\rho}\int_0^{+\infty}\left[\left|F_\delta\left(re^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\right)\right|^2 + \left|F_\delta\left(re^{i\frac{\pi}{2\rho}}\right)\right|^2\right] r^\omega\,dr =$$

$$= \frac{1}{\rho}\int_0^{+\infty}\left[\left|F\left(re^{i\frac{\pi}{2\rho}}\right)\right|^2\left|s_\delta\left(re^{i\frac{\pi}{2\rho}}\right)\right|^2 + \left|F\left(re^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\right)\right|^2\left|s_\delta\left(re^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\right)\right|^2\right] r^\omega\,dr \leqslant$$

$$< \frac{1}{\rho}\sup_{t\in L_\rho}|F(t)|^2\cdot\int_{L_\rho}|s_\delta(t)|^2\,|t|^\omega\,|dt|.$$

Таким ооразом, для $t\in L_\rho$ и $|t|>N$ имеем

$$\frac{1}{\varphi(t)}\left|\sum c_{k,N}\,E_\rho(t\tau_k^{1/\rho};\ \mu)\right| \leqslant o(1)\cdot 4c_1\cdot\frac{\sigma^{\mu-1/2}}{\sqrt{2\mu-1}}\cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}}\sup|F(t)|\cdot\left(\int_{L_\rho}|s_\delta(t)|^2\,|t|^\omega\,|dt|\right)^{1/2} = o(1)\cdot C(\delta). \tag{15}$$

Функция $F_\delta(t)$ ограничена на L_ρ. Пусть $|F_\delta(t)|\leqslant K$, $t\in L_\rho$, тогда

$$\sup_{|t|>N,\ t\in L_\rho}\frac{|F_\delta(t)|}{\varphi(t)} = o(1). \tag{16}$$

Если число $\delta>0$ зафиксировано так, что $\delta\leqslant\min(\delta_1,\ \delta_0^{1/\rho})$, то будет выполняться неравенство (11). Выберем $N>1$ настолько большим, чтобы величина $o(1)<\varepsilon$ и $o(1)\cdot c(\delta)<\varepsilon$. Тогда будем иметь

$$\|F_\delta(t) - \sum_{0<\tau_k<\sigma} c_{k,N} E_\rho(t\tau_k^{1/\rho};\ \mu)\| =$$

$$= \sup_{t\in L_\rho} \frac{1}{\varphi(t)} |F_\delta(t) - \sum c_{k,N} E_\rho(t\tau_k^{1/\rho};\ \mu)| \leqslant$$

$$< \sup_{t\in L_\rho,\ |t|<N} |F_\delta(t) - \sum c_{k,N} E_\rho(t\tau_k^{1/\rho};\ \mu)| + \sup_{|t|>N,\ t\in L_\rho} \frac{|F_\delta(t)|}{\varphi(t)} +$$

$$+ \sup_{t\in L_\rho,\ |t|<N} \frac{1}{\varphi(t)} |\sum c_{k,N} E_\rho(t\tau_k^{1/\rho};\ \mu)| < 2\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon. \qquad (17)$$

Из неравенств (17), (11) и леммы 3

$$\|f(t) - \sum c_{k,N} E_\rho(t\tau_k^{1/\rho};\ \mu)\| < 6\varepsilon.$$

Лемма 2 доказана.

Эта лемма сводит интересующий нас вопрос о полноте системы $\{E_\rho(ut;\ \mu)\}\ 0 \leqslant u \leqslant \sigma$ в $C_\varphi(L_\rho)$ к вопросу полноты множества $B_\sigma^\bullet(L_\rho)$ в $C_\varphi(L_\rho)$. Но это множество уже обладает свойством (*Б*). Поэтому, если обозначим через $\mathfrak{M}$ множество целых функций $f(t)$ порядка ρ и типа $\leqslant\sigma$ таких, что $f(t)(t-1)^{-1}$ ограничена в $\Delta^*(\rho)$ и $\|f(t)(t-1)^{-1}\| \leqslant 1$ и положим $\psi(z) = \sup_{f\in\mathfrak{M}} |f(z)|$, то будут справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Для того, чтобы замыкание множества $B_\sigma^\bullet(L_\rho)$ совпадало со всем пространством $C_\varphi(L_\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\psi(z) \equiv +\infty,\quad z \in L_\rho.$$

Теорема 2.

$$\overline{(B_\sigma^\bullet(L_\rho))} = C_\varphi(L_\rho) \Leftrightarrow \int_{L_\rho} \ln\psi(t)(1+|t|^{1+\rho})^{-1}|dt| = +\infty.$$

Отметим, что замыкание системы $E_\rho(ut;\ \mu)$, $u\in[0, +\infty[$ исследовано в работе [10], при равномерной метрике с весом $\varphi^{-1}(t)\,dt$ и в работе [11] при интегральной метрике с весом $d\sigma(t)$

Физико-технический институт
низких температур АН УССР,
Армянский педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 25. XII. 1987

Բ. ՅԱ. ԼԵՎԻՆ, Ի. Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների համակարգի փակույթի մասին կոմպլեքս տիրույթում կշռային հավասարաչափ մոտարկման դեպքում (*ամփոփում*)

Աշխատանքում դիտարկված է հետևյալ խնդիրը.
Ի՞նչ պայմանների առկայության դեպքում կոմպլեքս հարթության սկզբնակետից դուրս եկող երկու ճառագայթների սիստեմի՝ $L_\rho\left\{t: \arg t = \pm\frac{\pi}{2\rho},\ \rho>1\right\}$ վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիաների կշռային $C_\varphi(L_\rho)$ տարածության մեջ Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների $\{E_\rho(ut;\ \mu)\}$, $0 < u \leqslant a$ սիստեմը կլինի լրիվ։

B. YA. LEVIN, I. O. KHACHATRIAN. *On the closure of systems of Mittag—Leffler type functions by weighted uniform approximation in the complex domain* (summary)

The following problem is considered in this paper: under what conditions the system $\{E_\rho(ut;\mu)\}$, $0 < u \leqslant a$ of Mittag—Leffler type functions is full in the weighted space of functions, continuous on the pair of spays $L_p = \left\{t: \arg t = \pm\frac{\pi}{2\rho},\ p > 1\right\}$ star-ting from the origin.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.
2. *M. E. J. Akutowicz.* Sur l'approximation par certaines fonctions entieres, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 3. ser. 77, 1960, 281—301.
3. *N. Levinson, H. P. McKean.* Weighted trigonometrical approximation on R' with application to the germ lield of a stationary gaussian noise, Acta Math., 112l № 1—2, 1964, 99—143.
4. *Ю. И. Любарский.* Об аппроксимации целых функций экспоненциального типа тригонометрическими полиномами, Матем. физика и функц. анализ, 3, 1972, 56—67.
5. *Н. И. Ахиезер, С. Н. Бернштейн.* Обобщение теоремы о весовых функциях и применение к проблеме моментов, ДАН СССР, 92, № 6, 1953, 1109—1112.
6. *Н. И. Ахиезер.* О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси, УМН, XI, вып. 4 (70), 1956, 3—43.
7. *С. Н. Мергелян.* О весовых приближениях многочленами, ДАН СССР, 97, № 4, 1954, 597—600.
8. *С. Н. Мергелян.* Несколько замечаний по поводу аппроксимационной задачи С. Н. Бернштейна, ДАН АрмССР, 20, № 4, 1955, 113—119.
9. *С. Н. Мергелян.* Весовые приближения многочленами, УМН, XI, вып. 5 (71), 1956, 107—152.
10. *И. О. Хачатрян.* О замыкании семейств функций типа Миттаг-Леффлера при взвешенно равномерном приближении в комплексной области, Изв. АН АрмССР, Математика, X, № 4, 1975, 373—384.
11. *M. M. Djrbashian and N. V. Grigorian.* A new generalisation of the classica Theoreme of G. Szegö, Math, Nachr. 138, 1988, 239—254.