УДК 517.53:517.916

С. Ц. САРКИСЯН

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕРОМОРФНЫХ
РЕШЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ

1°. В аналитической теории дифференциальных уравнений при рассмотрении алгебраических дифференциальных уравнений

$$P(z, w, w', \dots, w^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

где P — многочлен относительно $w, w', \dots, w^{(n)}$ и относительно z — рациональная функция, изучаются следующие вопросы: о существовании мероморфных в конечной плоскости $\mathbb{C}$ решений, и изучение свойств мероморфных решений непосредственно по уравнению.

Оба поставленных вопроса для автономных уравнений первого порядка $P(w, w') = 0$ полностью решены еще в XIX веке. Необходимое и достаточное условие существования мероморфных решений дает критерий Фукса: всякое мероморфное решение уравнения $P(w, w') = 0$ есть либо эллиптическая функция, либо рациональная функция, либо функция вида $R(\exp cz)$, где R — рациональная функция относительно $\exp cz$, $c = \text{const}$. Первым результатом о мероморфных решениях уравнений $P(z, w, w') = 0$, является теорема Мальмквиста, [1] (1913 г.): если уравнение $w' = R(z, w)$, где R — рациональная функция двух переменных, допускает трансцендентное мероморфное решение, то это уравнение имеет вид $w' = a(z)w^2 + b(z)w + c(z)$, где $a(z), b(z)$ и $c(z)$ — рациональные функции от z , т. е. уравнение $w' = P(z, w)$ является уравнением Риккати. В 1920 г. Мальмквист доказал [2] более общую теорему: если уравнение $P(z, w, w') = 0$, где P — многочлен от последних двух переменных с алгебраическими коэффициентами, неприводимо и обладает трансцендентным мероморфным решением, то это уравнение удовлетворяет условиям Фукса.

В отличие от уравнений первого порядка, множество результатов о мероморфных решениях уравнений высших порядков, очень скудно. Изучены только некоторые специальные уравнения, общие решения которых мероморфны в $\mathbb{C}$ (первое уравнение Пенлеве, [3], уравнение Брио—Бука, [4], и т. д.). Так же обстоит дело в случае, когда вместо условия мероморфности решений во всей (открытой) плоскости $\mathbb{C}$ рассматриваются решения в каких-либо неограниченных областях (полуплоскость, угол и т. д.).

В настоящей работе рассматривается два вопроса: оценки порядков роста мероморфных в углу решений алгебраических дифферен-

циальных уравнений и выделение классов уравнений, допускающих такие решения. При этом описываются локальные свойства мероморфных решений алгебраических дифференциальных уравнений на некоторых неограниченных множествах, скажем, например, на оси X . Для достижения этой цели нам придется обобщить и найти некоторые аналоги так называемой теории максимального члена Вимана—Валирона, относящейся к целым функциям.

2°. Пусть $w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — целая трансцендентная функция; $M(r, w) = \max_{|z|=r} |w(z)|$;

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r, w)}{\ln r} \quad (2)$$

порядок $w(z)$. Так как при фиксированном r члены $|a_n| r^n \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, то среди этих членов имеется по крайней мере один наибольший, который обозначают через $m(r, w) = \max_n |a_n| \cdot r^n$ и называют максимальным членом $w(z)$ на окружности $|z| = r$. Наибольший номер, для которого $|a_n| \cdot r^n = m(r, w)$, называют центральным индексом функции $w(z)$ на $|z| = r$.

С помощью этих понятий Виман и Валирон построили так называемую теорию максимального члена Вимана—Валирона, [5], [6] (1923 г.). В этой теории основной является следующая

Теорема А. Для целой функции $w(z)$ при любом r , за возможным исключением r принадлежащих последовательности интервалов с конечной логарифмической мерой E_w , имеют место неравенства

$$\nu(r) < [\ln m(r, w)]^{1+\varepsilon}, \quad (3)$$

$$m(r, w) \leq M(r, w) \leq c(\varepsilon) \cdot m(r, w) [\ln m(r, w)]^{1/2+\varepsilon}, \quad (4)$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число, $c(\varepsilon)$ — некоторая постоянная.

Теорема В. Пусть $w(z)$ — целая функция и $|w(\xi)| = M(r, w)$, $|\xi| = r$, тогда при любом натуральном k

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\xi}{\nu(r)} \right)^k \cdot \frac{w^{(k)}(\xi)}{w(\xi)} = 1, \quad \xi \in E_w, \quad (5)$$

где E_w — множество колец с центрами в начале координат, пересечение которого с лучом $\arg z = 0$ есть множество интервалов с конечной логарифмической мерой.

Целая функция на множестве $G_w = \{\xi \in \mathbb{C} : |w(\xi)| = M(|\xi|, w)\}$, кроме этих свойств (теоремы А и В) на этом же множестве обладает следующими замечательными свойствами (1939 г., Макинтайр, [7]).

Теорема С. Пусть $w(z)$ — целая функция, $|w(\xi)| = M(r, w)$, $|\xi| = r$, тогда

$$|w'(\xi)| = M'(r, w), \quad |\xi| = r, \quad \xi \in G_w, \quad (6)$$

$$\frac{\xi w'(\xi)}{w(\xi)} = \frac{r M'(r, w)}{M(r, w)}, \quad |\xi| = r, \quad \xi \in G_w, \quad (7)$$

где $G_w = \{\xi \in \mathbb{C} : |\omega(\xi)| = M(r, w)\}$, а под $M'(r, w)$ понимаем правостороннюю производную $M(r, w)$ по r .

При $k=1$ из (5) следует

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu(r)} \cdot \frac{\xi w'(\xi)}{\omega(\xi)} = 1, \quad \xi \in G_w/E_w, \quad (8)$$

повтому на множестве G_w/E_w при $\xi \rightarrow \infty$

$$\nu(r) \sim \frac{\xi w'(\xi)}{\omega(\xi)}. \quad (9)$$

Из (2), имея в виду теоремы А, В, и С вытекает, что

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu(r)}{\ln r}, \quad (10)$$

т. е., если $\omega(z)$ — целая функция, то из (9) и (10) следует

$$\rho = \overline{\lim}_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\ln |S(\xi, w)|}{\ln |\xi|}, \quad \xi \in G_w/E_w \quad (11)$$

и

$$\omega(\xi)^{(k)} = \left(\frac{S(\xi, w)}{\xi} \right)^k \cdot \omega(\xi) (1 + \varepsilon_k(\xi)), \quad \xi \in G_w/E_w, \quad (12)$$

где

$$S(z, w) = \frac{z w'(z)}{\omega(z)},$$

которую назовем S -характеристикой целой функции $\omega(z)$.

С другой стороны, порядком мероморфной функции (в смысле Неванлинны) называется порядок ее характеристической функции $T(r)$, т. е.

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln T(r)}{\ln r}. \quad (13)$$

В дальнейшем без пояснений будем использовать стандартные обозначения неваналинновой теории распределения значений, [8], [9].

В частности, если $\omega(z)$ — целая функция, то

$$T(r, w) < \ln M(r, w) \leq \frac{R+r}{R-r} \cdot T(r, w), \quad 0 < r \leq R, \quad (14)$$

т. е. для целой трансцендентной функции иногда в качестве характеристики можно брать функцию $\ln M(r, w)$. В (2) и (13) они взаимозаменяемы, повтому в (13) можно заменить $T(r)$ на $S(z, w)$

$$\rho = \overline{\lim}_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\ln |S(\xi, w)|}{\ln |\xi|}, \quad \xi \in G_w/E_w.$$

Введем следующие обозначения и определения.

Пусть $\Gamma = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}, \varphi = \varphi(r)\}_r$, где $\varphi(r)$ — однозначная функция в $[a, \infty[$, $0 \leq a < \infty$, и на любом конечном отрезке кусочно-аналитична, и пусть еще $E = \Gamma \cap \Sigma$, где σ — некоторое множество колец с центрами в начале координат, пересечение которого с лучом

$\arg z = 0$ есть множество конечной меры. Замкнутое множество $\Gamma \setminus E$ назовем Σ -множеством.

Определение. Две кусочно-аналитические кривые $\Gamma_j: \varphi = \varphi_j(r)$, $z = re^{i\varphi}$, $r \in [a, \infty[$, $0 < a \leq \infty$, $j = 1, 2$, назовем L -асимптотически совпадающими, если

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|\ln |\varphi_1(r)| - \ln |\varphi_2(r)||}{\ln r} = 0.$$

Две мероморфные функции $w = f_j(z)$ ($j = 1, 2$) назовем L -асимптотически совпадающими на Σ -множестве G , если

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{|\ln |f_1(z)| - \ln |f_2(z)||}{\ln |z|} = 0, z \in G.$$

Замечание. Если $f_1(z) = f_2(z)(1 + \varepsilon(z))$, $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ при $z \in G$, $z \rightarrow \infty$ (т. е. $f_1(z)$ и $f_2(z)$ на G асимптотически совпадают), то они L -асимптотически совпадают на G .

Определение. Пусть $w(z)$ — мероморфная во всей плоскости функция и G — некоторое Σ -множество плоскости $\mathbb{C}$. $S(G)$ -порядком w назовем

$$\rho_S(G) = \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |S(z, w)|}{\ln |z|}, z \in G.$$

Из этого определения следует: $S(G)$ -порядок мероморфной функции $w = w(z)$ обращается в бесконечность, если например*:

1) Σ -множество G содержит бесконечное множество нулей и полюсов $S(z, w)$,

2) Σ -множество G содержит бесконечное множество нулей и полюсов мероморфной функции $f(z)$, которая на G L -асимптотически совпадает с $S(z, w)$,

3) Σ -множество G L -асимптотически совпадают с множеством $|S(z, w)| = |f(z)|$, где $f(z)$ — аналитическая функция, причем

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(z)|}{\ln |z|} = \infty, z \in G,$$

4) Σ -множество G L -асимптотически совпадает с множеством корней уравнения $S(z, w) = f(r)$, $|z| = r$, где $f: R_+ \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая функция, причем

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(|z|)|}{\ln |z|} = \infty, z \in G,$$

Σ -множества этих видов (т. е. множества видов, из структур которых следует, что $\rho_S(G) = \infty$) назовем особыми множествами функции w и обозначим через σ_w .

Выбор G можно сделать двумя способами:

* О существовании неограниченного (непрерывного) множества корней уравнения $\varphi(z) = f(|z|)$, где $\varphi(z)$ мероморфна, а $f(r): R_+ \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывная функция (см. [10], [11]).

1) множество $G \subset C$ выбираем в зависимости от ω (как это делается в случае целых функций),

2) множество $G \subset C$ — любое Σ -множество.

Итак, начнем с первого случая.

Определение. Будем говорить, что мероморфная (трансцендентная) во всей плоскости функция $\omega(z)$ принадлежит классу $S_n(X)$, если существует Σ -множество X_ω такое, что при любом натуральном $1 \leq k \leq n < \infty$ существует

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left\{ \left(S(\xi, \omega) \right)^k \cdot \frac{\omega^{(k)}(\xi)}{\omega(\xi)} \right\} = c_k, \quad c_k = \text{const}, \quad \xi \in X_\omega. \quad (15)$$

Множество X_ω назовем характеристическим множеством.

1) Любая мероморфная функция принадлежит классу $S_1(X)$, где X_ω — любое Σ -множество плоскости C .

2) Любая целая функция принадлежит классу $S_\infty(X)$, где $X_\omega = G_\omega \setminus E_\omega$, $G_\omega = \{\xi \in C : |\xi| = r, |\omega(\xi)| = M(r, \omega)\}$, а E_ω — последовательность интервалов с конечной логарифмической мерой.

3) Классу $S_\infty(X)$ также принадлежат мероморфные функции $\omega = 1/f(z) - a$ и $\omega = f(z) - a$, где $f(z)$ — мероморфная функция с пикаровским исключительным значением a .

Легко убедиться, что для приведенных в п. п. 2) и 3) классов функций S -порядок по приведенным в них множествам X_ω совпадает с обычным порядком этих функций. Это же заключение верно (см. [12]) для следующих более общих классов функций: мероморфных функций порядка $\rho < \infty$ с дефектным значением $a \neq \infty$ ($a = \infty$), если в качестве X_ω взять множество $G_\omega \setminus E_0$, где $G_\omega = \{\xi : |\omega(\xi) - a| = \min_{|\xi|=r} |\omega(z) - a|\}$ ($G_\omega = \{\xi : |\omega(\xi)| = \max_{|\xi|=r} |\omega(z)|\}$), а E_0 — некоторое множество колец с конечной суммой для радиусов.

3°. Здесь наша цель оценить S -порядок решений из класса $S_1(X)$ уравнения

$$P\left(z, \omega, \frac{d\omega}{dz}\right) = 0 \quad (16)$$

на произвольных Σ -множествах.

Класс $S_1(X)$ совпадает с классом всех мероморфных функций и любое Σ -множество z -плоскости является характеристическим множеством мероморфных решений уравнения (16).

Введем следующие определения и обозначения.

Определение. Скажем, что мероморфное решение уравнения (16) есть функция конечного роста на G , если при $z \rightarrow \infty$ и $z \in G$

$$\omega = c|z|^n z^p S^q (1 + \varepsilon(z)), \quad z \in G, \quad (17)$$

где $c = \text{const}$, n — действительное, p и q — некоторые целые числа, $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ при $z \in G$ и $z \rightarrow \infty$, а G — некоторое Σ -множество плоскости C . В противном случае скажем, что $\omega(z)$ — функция бесконечного роста на G .

Определение. Скажем, что решение $w(z)$ уравнения (16) из класса $S_1(X)$ является особым решением уравнения (16), если существуют целые p и q такие, что предел выражения $z^p S^q w$ при $z \in X_w$ и $z \rightarrow \infty$ не существует и $z^p S^q$ — мероморфная функция бесконечного роста на X_w .

Пользуясь очевидным тождеством $w' = w'/w \cdot w$ уравнение (16) приведем к виду

$$O_p(z, w, S) \equiv P(z, w, z^{-1} S w) = 0. \quad (18)$$

Ясно, что $O_p(z, w, S)$ — многочлен относительно S и w . Уравнение (18) назовем определяющим уравнением, а $O_p(z, w, S)$ — определяющим многочленом уравнения (16).

В зависимости от поведения мероморфных решений уравнения (16) при $z \in X_w$ и $z \rightarrow \infty$, где X_w — любое Σ -множество z -плоскости, имеется несколько случаев.

1. Скажем, что мероморфное решение уравнения (16) из класса $S_1(X)$ принадлежит классу $S_1^0(X)$, если для этого решения имеет место

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^p S^q}{w^l} = 0, \quad z \in X_w, \quad (19)$$

где $p, q, l > 0$ любые целые числа.

Всякое мероморфное решение с бесконечным дефектным значением (в частности целые функции) принадлежит классу $S_1^0(X)$, где $X_w = G_w \setminus E_w$, $G_w = \{z \in C : |w(z)| = \max_{|\xi|=|z|} |w(\xi)|\}$, а E_w — множество колец с конечной суммой ширины.

Пусть $O_p(z, w, S)$ — определяющий многочлен уравнения (16) степени m относительно w

$$O_p(z, S, w) \equiv \sum_{l=0}^m P_l(z, S) w^{m-l} = 0, \quad z \in X_w, \quad (20)$$

где P_l — многочлены относительно S , и пусть еще

$$P_0(z, S) \equiv \sum_l Q_l(z) S^l, \quad z \in X_w, \quad (21)$$

где Q_l — рациональные функции от z .

После деления левой и правой частей (20) на w^m при $z \rightarrow \infty$ получим уравнения

$$\sum_{j=0}^q a_j z^{m_j} S^j (1 + \delta_j(z)) = 0, \quad z \in X_w, \quad (22)$$

где q — степень многочлена P_0 относительно S , m_j — целые числа, а $\delta_j(z) \rightarrow 0$ при $z \in X_w$ и $z \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$.

Пусть $a_q \neq 0$, и так как $\delta_j(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ и корни алгебраического уравнения (22) непрерывно зависят от его коэффициентов, то решения уравнения (22) на множестве X_w асимптотически равны решениям уравнения, получающегося при обращении в нуль всех $\delta_j(z)$

$$R_p^*(z, S) \equiv \sum_{l=0}^q a_l z^{m_l} S^l = 0, \quad z \in X_w, \quad (23)$$

где $a_i = \text{const}$. Уравнение (23) назовем первым характеристическим уравнением, а многочлен R_p^{∞} — характеристическим многочленом уравнения (16) в классе $S_1^{\infty}(X)$. В дальнейшем предположим, что многочлен R_p^{∞} неприводим. Скажем, еще, что уравнение (16) есть уравнение, порождающее многочлен R_p^{∞} в классе $S_1^{\infty}(X)$.

Определение. Скажем, что многочлен степени q относительно S

$$R(z, S) \equiv \sum_{l=0}^q a_l |z|^{\lambda_l} z^{m_l} S^l, \quad (24)$$

где $a_l = \text{const}$, λ_l — действительные, m_l — целые числа,

- 1) вырождается, если он одночлен и в (24) $a_q \neq 0$,
- 2) не вырождается, если он отличен от одночлена и в (24) $a_q \neq 0$.
- 3) Если в (24) $a_q = 0$, то скажем, что уравнение, порождающее этот многочлен, является особым.

Лемма 1. 1) Пусть характеристический многочлен R_p^{∞} дифференциального уравнения (16) вырождается. Тогда уравнение (16) мероморфных решений из класса $S_1^{\infty}(X)$ не имеет.

2) Пусть характеристический многочлен R_p^{∞} уравнения (16) неприводим и не вырождается. Тогда $S(X)$ -порядок мероморфного решения w уравнения (16) из класса $S_1^{\infty}(X)$ не конечен тогда и только тогда, когда характеристическое множество X_w — особое множество решений w .

Доказательство. 1) Пусть характеристический многочлен R_p^{∞} уравнения (16) вырождается. Сперва запишем уравнения (16) в виде

$$P(z, w, w') \equiv \sum_{j_0, j_1} a_{j_0, j_1}(z) \cdot z^{-j_1} w^{j_0 + j_1} S^{j_1} = 0. \quad (25)$$

Предполагая, что уравнение (25) имеет мероморфное трансцендентное решение из класса $S_1^{\infty}(X)$, при $z \in X_w$, получим, что характеристическое уравнение имеет вид

$$R_p^{\infty}(z, S) \equiv \sum_{j_0, j_1=m} a_{j_0, j_1} \cdot z^{m j_0 j_1} S^{j_1} = 0, \quad z \in X_w, \quad (26)$$

где m — степень определяющего многочлена O_p относительно w , m_{j_0, j_1} — целые числа, a_{j_0, j_1} — постоянные.

В силу вырождаемости характеристического многочлена получаем

$$R_p^{\infty}(z, S) \equiv S^j \sum_{j_0, j_1=m} a_{j_0, j_1} z^{m j_0 j_1} = 0, \quad (27)$$

где $j = \max j_1$, $j_0 + j_1 = m$. Так как в (27) второй множитель, в силу вырождаемости характеристического многочлена, $\neq 0$, то получаем $S(z, w) \equiv 0$. Это противоречие и доказывает наше предположение.

2) Пусть характеристический многочлен R_p^{∞} уравнения (16) не вырождается. Во-первых, если в (24) показатели $m_i - m_1 < 0$ ($i = 0, \dots, q-1$), то все решения уравнения (24) ограничены, следовательно

но соответствующее решение уравнения (16) из класса $S_1^\infty(X)$ имеет нулевой $S(X)$ -порядок. Поэтому в дальнейшем предположим, что один из показателей $m_l - m_q$ в (24) — положительное число.

Предположим, что уравнение (16) имеет мероморфное решение w из класса $S_1^\infty(X)$ и X_w — не особое множество решений w ; в противном случае $S(X)$ -порядок равен бесконечности.

Если уравнение (24) не превращается в одночлен, то уравнение (24) имеет конечное число решений вида

$$S(z, w) = c_j z^l (1 + \varepsilon_j(z)), \quad j = 1, 2, \dots, l < q. \quad (28)$$

Из леммы 2.2.3 ([12]) вытекает, что в таком случае существует $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \ln |S(\xi, w|/|\ln \xi| \in X_w$, равный одному из положительных чисел ρ_j .

Отсюда следует, что $S(X)$ -порядок мероморфного решения уравнения (16) из класса $S_1^\infty(X)$ — конечное число.

В частности получаем: всякое мероморфное решение с бесконечным дефектным значением (в частности целые решения) уравнения (16) имеет конечный порядок в смысле Неванлинны (см. еще [16]).

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что в классе $S_1^\infty(X)$ особых уравнений не существует.

2. Скажем, что мероморфное решение уравнения (16) принадлежит классу $S_1^0(X)$, если для этого решения имеет место

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^p S^q w^l = 0, \quad z \in X_w. \quad (29)$$

где $p, q, l > 0$ — любые целые числа.

Всякое мероморфное решение с нулевым дефектным значением (в частности решение вида $w = 1/f(z)$, где $f(z)$ — целая функция) принадлежит классу $S_1^0(X)$, где $X_w = G_w \setminus E_w$, $G_w = \{\xi \in \mathbb{C} : |w(\xi)| = \min_{|z|=|\xi|} |w(z)|\}$, а E_w — множество колец с конечной суммой ширины.

Имея в виду, что все члены левой части (16), содержащие w или w' , имеют вид $z^p S^q w^l$ ($l > 0$), (16) и (29) получаем: чтобы уравнение (16) имело решение из класса $S_1^0(X)$, необходимо условие: $P(z, 0, 0) \equiv 0$, $z \in X_w$. В самом деле

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P(z, w, w') = \lim_{z \rightarrow \infty} P(z, 0, 0) = 0; \quad z \in X_w.$$

Но функция $P(z, 0, 0)$ — полином относительно z , поэтому это равенство возможно в том случае, когда $P(z, 0, 0) \equiv 0$, а это и есть необходимое условие.

В уравнении (16) заменим $w = 1/\omega$. При такой замене алгебраическое дифференциальное уравнение переходит в алгебраическое дифференциальное уравнение. Имея в виду, что $S(z, w) = -S(z, \omega)$, заключаем, что $S(X)$ -порядок мероморфного решения уравнения (16) при такой замене тоже не меняется. Пусть после замены $w = 1/\omega$ уравнение (16) переходит в уравнение

$$\omega^k P\left(z, \frac{1}{\omega}, -\frac{\omega'}{\omega^2}\right) \equiv Q(z, \omega, \omega' = 0), \quad (30)$$

где Q — многочлен от своих переменных) а k — некоторое целое число. Уравнение (30) назовем инверсионным уравнением уравнения (16), а $X_Q \equiv X_P^0$ назовем вторым характеристическим многочленом уравнения (16). При $\omega \in S_1^-(X)$ имеем $\omega \in S_1^0(X)$, откуда следует

Лемма 2. 1) Если характеристический многочлен R_P^0 дифференциального уравнения (16) вырождается, то уравнение (16) мероморфных решений из класса S_1^0 не имеет.

2) Пусть характеристический многочлен R_P^0 уравнения (16) неприводим и $P(z, 0, 0) \equiv 0$. Тогда $S(X)$ -порядок мероморфного решения w уравнения (16) из класса $S_1^0(X)$ не конечен тогда и только тогда, когда характеристическое множество X_ω — особое множество мероморфного решения w .

В частности следует: всякое мероморфное решение с нулевым дефектным значением (в частности решения вида $w = 1/f(z)$, где $f(z)$ — целая функция) уравнения (16) имеет конечный (в смысле Неванлинны) порядок.

Замечание. Не трудно видеть, что в классе $S_1^0(X)$ особых уравнений не существует.

3) Пусть w — мероморфное решение уравнения (16) и пусть существует $p, q, l \neq 0$ целые числа такие, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^p S^q}{w^l} = c_1, \quad c_1 = \text{const} \neq 0, \quad z \in X_\omega. \quad (31)$$

Без потери общности можно считать $l = 1$. Если мероморфное решение уравнения (16) удовлетворяет условию (31) с $l = 1$, то $w = w^l$ является решением некоторого алгебраического дифференциального уравнения с $S(z, w) = l S(z, w)$. Из (31) следует

$$w = c z^p S^q (1 + \varepsilon(z)), \quad c = \text{const} \neq 0, \quad z \in X_\omega, \quad (32)$$

где $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ при $z \in X_\omega$ и $z \rightarrow \infty$.

Скажем, что мероморфное решение уравнения (16) из класса $S_1(X)$ принадлежит классу $S_1^c(X)$, если для этого решения имеет место (32) и там $q > 0$.

Всякое мероморфное решение с конечным дефектным значением принадлежит классу $S_1^c(X)$.

Из (19), имея в виду (32), получаем

$$P(z, w, c z^{p-1} S^{q+1} (1 + \varepsilon(z))) = 0, \quad z \in X_\omega, \quad (33)$$

где p и $q > 0$ — целые числа.

Из (33), имея в виду, что P — многочлен от своих переменных, получаем

$$\sum_{i=0}^q a_i(c) z^{m_i} S^i (1 + \delta_i(z)) = 0, \quad z \in X_\omega, \quad (34)$$

где $a_i(c)$ — ограниченные функции от c , m_i — целые числа, а $\delta_i(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$ и $z \in X_\omega$.

Так как $\delta_i(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in X_\omega$ и корни алгебраического уравнения (34) непрерывно зависят от его коэффициентов, то решения уравнения (34) на множестве X_ω асимптотически равны решениям уравнения, получающегося при обращении в нуль всех $\delta_i(z)$

$$R_p^c(z, S) = \sum_{i=0}^q a_i(c) z^{m_i} S^i = 0, z \in X_\omega. \quad (35)$$

Уравнение (35) назовем третьим характеристическим уравнением, а многочлен R_p^c — третьим характеристическим многочленом уравнения (16) в классе $S_1^c(X)$. Итак: пусть характеристический многочлен R_p^c дифференциального уравнения (16) неприводим.

Лемма 3. 1) Если характеристический многочлен R_p^c дифференциального уравнения (16) вырождается, то уравнение (16) мероморфных решений из класса S_p^c не имеет;

2) Если характеристический многочлен R_p^c уравнения (16) не вырождается, то $S(X)$ -порядок всякого мероморфного решения уравнения (16) из класса S_1^c не конечен тогда и только тогда, когда характеристическое множество X_ω — особое множество мероморфного решения ω .

В частности получаем: всякое мероморфное решение с конечным $a \neq 0$ дефектным значением уравнения (16) имеет конечный порядок (в смысле Неванлинны).¹

Замечание 1. В отличие от пунктов 1. и 2. здесь старший коэффициент a_q в характеристическом многочлене может равняться нулю, т. е. уравнение (16) в классе $S_1^c(X)$ является особым уравнением.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что заключение 3. остается в силе, если в (42) $q < 0$.

4. Пусть ω — мероморфное решение уравнения (16), и пусть существуют целые числа p, q такие, что предел выражения $z^p S_\omega^q$ при $z \in X_\omega$ и $z \rightarrow \infty$ не существует.

Скажем, что мероморфное решение уравнения (16) из класса $S_1(X)$ принадлежит классу $\bar{S}_1(X)$, если для этого решения предел выражения $z^p S_\omega^q$ при $z \in X_\omega$ и $z \rightarrow \infty$ не существует и $z^p S_\omega^q$ — мероморфная функция конечного роста на X_ω .

Аналогично 1°—3° показываем, что $S(X)$ -порядок мероморфных решений уравнения (16) из класса $\bar{S}_1(X)$ тесно связан с решением алгебраического уравнения

$$\bar{R}_p(z, S) = \sum_{i=0}^l a_i(c) |z|^{\lambda_i} z^{m_i} S^i = 0, z \in X_\omega, \quad (36)$$

где $a_i = \text{const}$, λ_i — действительные, а m_i — целые числа.

Уравнение (36) назовем основным характеристическим уравнением, а многочлен $\bar{R}_p$ — основным характеристическим многочленом уравнения (16).

Из свойств уравнения (36) следует

Лемма 4.1) Пусть характеристический многочлен $\bar{R}_P$ уравнения (16) вырождается, тогда уравнение (16) мероморфных решений из класса $\bar{S}_1(X)$ не имеет;

2) пусть характеристический многочлен $\bar{R}_P$ уравнения (16) неприводим и не вырождается, тогда $S(X)$ -порядок всякого мероморфного решения уравнения (16) из класса $\bar{S}_1(X)$ не конечен тогда и только тогда, когда характеристическое множество X_w есть особое множество мероморфного решения w .

Замечание 1 из п. 3 здесь остается в силе.

5. Скажем, что мероморфное решение уравнения (16) из класса $S_1(X)$ принадлежит классу $\hat{S}_1(X)$, если для этого решения предел выражения $z^p S^q w$ при $z \in X_w$ и $z \rightarrow \infty$ не существует и $z^p S^q w$ — мероморфная функция бесконечного роста.

S -характеристика мероморфного решения уравнения (16) из класса $\hat{S}_1(X)$ при $z \in X_w$, получим, что асимптотически равна решению алгебраического относительно S уравнения вида

$$\hat{R}_P(z, S) \equiv \sum_{j=0}^l a_j(c) R^{l_j} z^{m_j} S^j = 0, \quad z \in X_w, \quad (37)$$

где $a_j = a_j(c) = \text{const}$, $R = R(|z|)$ бесконечного роста на X_w функция, l_j — действительные, а m_j — целые числа. Решения уравнения (16) из класса $\hat{S}_1(X)$ назовем особыми решениями этого уравнения.

Лемма 5.1. Пусть характеристический многочлен $\hat{R}_P$ уравнения (16) вырождается. Тогда уравнение (16) мероморфных решений из класса $\hat{S}_1(X)$ не имеет;

2) Пусть характеристический многочлен $\hat{R}_P$ уравнения (16) неприводим и не вырождается. Тогда $S(X)$ -порядок всякого мероморфного решения w уравнения (16) из класса $\hat{S}_1(X)$ (особого решения) равен бесконечности.

Из лемм 1—5 следует

Теорема 1. $S(X)$ -порядок мероморфного решения $w(z)$ уравнения (16) равен бесконечности при следующих условиях: 1) характеристическое множество X_w является особым; 2) уравнение (16) является особым; 3) решение $w(z)$ является особым.

Замечание 1. Здесь рассматривали решения уравнения (16), мероморфные во всей плоскости C . Ясно, что доказанная теорема верна для решений уравнения (16), мероморфных в любой неограниченной области плоскости C (полуплоскость, угол и т. д.).

Замечание 2. Методами, примененными выше, легко доказать аналогичные теоремы для дифференциальных уравнений $F(z, w, w') = 0$, где F — многочлен относительно w и w' и рациональная функция относительно z .

Этими же методами легко доказать теорему 1 для дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{m, n} F_{m, n}(z) w^m w_n^n = 0,$$

где F_{mn} — мероморфные трансцендентные функции в некоторой неограниченной области, и в этой области $|F_{mn}(z)| < c|z|^\rho$, $c = \text{const}$, $\rho < \infty$ — постоянные величины.

Сейчас сказанное выше проиллюстрируем на уравнении Риккати, [13].

Теорема 2. Уравнение Риккати $w' = P(z)w^2 + Q(z)w + R(z)$, где $P(z)$, $Q(z)$ и $R(z)$ — многочлен от z ,

1) мероморфных решений (в том числе целых) из класса $S_1^\infty(X)$ не имеет;

2) мероморфных решений из класса $S_1^1(X)$ не имеет, если $R(z) \neq 0$, а если $R(z) \equiv 0$, то $S(X)$ -порядок всякого мероморфного решения w из класса $S_1^1(X)$ имеет конечный $S(X)$ -порядок при условии, что характеристическое множество X_w не является особым множеством решений w ;

3) $S(X)$ -порядок всякого мероморфного решения w уравнения Риккати из класса $\bar{S}_1(X)$ — конечное число, если множество X_w не является особым множеством w ;

4) $S(X)$ -порядок всякого мероморфного решения уравнения Риккати из класса $\bar{S}_1(X)$ не конечен.

4°. Аналогично 3° получена оценка $S(X)$ -порядка мероморфных решений w из класса $S_\infty(X)$ уравнения

$$P\left(z, w, \left(\frac{dw}{dz}, \dots, \frac{d^n w}{dz^n}\right)\right) = 0, \quad (38)$$

где $n > 2$ — натуральное число, P — многочлен от своих переменных, а X_w — характеристическое множество мероморфного решения w .

Сперва заметим: тождество $w' = \frac{S}{\xi} w$ здесь заменяются соотношением

$$w^{(k)}(\xi) = c_k \cdot \left(\frac{S(\xi, w)}{\xi}\right)^k \cdot w(\xi) (1 + \varepsilon_k(\xi)), \quad \xi \in X_w, \quad (39)$$

где $k > 1$ — натуральное число, $c_k = \text{const} \neq 0$, а $\varepsilon_k(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ и $\xi \in X_w$.

Леммы 1—5 и теорема 1 остаются в силе при замене уравнения (16) уравнением (38) и доказываются аналогичным образом.

Замечание. Условие, что в характеристических многочленах старшие коэффициенты не равны нулю существенно (в случае уравнения первого порядка старшие коэффициенты в характеристических многочленах R_P^- и R_P^0 , исходя из вида уравнения, не обращаются в нуль). Если в характеристических многочленах старшие коэффициенты равны нулю ($a_q = 0$), то следующие примеры показывают, что

уравнение (38) может иметь мероморфные решения бесконечного $S(X)$ -порядка. В характеристическом многочлене $R_P^* \equiv O \cdot \left(\frac{S}{\xi}\right)^4 + \left(\frac{S}{\xi}\right)^2 - 1$ уравнения $(w''w)^2 - 2w''w'^2w + w'^4 + (w'w)^2 - w^4 = 0$

старший коэффициент равен нулю, и оно имеет целое решение $w = \exp(\sin z)$ бесконечного $S(X)$ -порядка. В первом характеристическом многочлене уравнения $w w'' - w w' - w'^2 = 0$ также старший коэффициент равен нулю, и оно имеет целое решение $w = \exp(\exp z)$ бесконечного $S(X)$ -порядка. Инверсионное уравнение $\omega w'' - \omega'^2 - \omega' \omega = 0$ имеет тот же самый вид, что и данное уравнение, следовательно старший коэффициент R_P^0 равен нулю и оно допускает решение вида $\omega = \exp(-\exp z)$ бесконечного $S(X)$ -порядка.

Сказанное в 4° проиллюстрируем на первом уравнении Пенлеве [13], [14],

$$P(z, w, w', w'') \equiv w'' - \{w'' - [6w^2 + z]\} = 0. \quad (40)$$

Как известно первое уравнение Пенлеве имеет только мероморфные решения и все конечного порядка (в смысле Неваалинны, [14], [15]).

Определяющее уравнения (40) имеет вид

$$O_P(z, w, S) \equiv c_2 z^{-2} S^3 w - [6w^2 + z] = 0, \quad z \in X_w. \quad (41)$$

I. Из (41) получаем $R_P^*(z, S) \equiv -6$, $z \in X_w$, откуда имея в виду, что характеристический многочлен R_P^* вырождается, получаем: уравнение (40) мероморфных решений (в том числе целых решений) из класса $S_w^*(X)$ не имеет.

II. Уравнение (40) мероморфных решений (в том числе решений вида $w = 1/f(z)$, где $f(z)$ — целая функция) из класса $S_w^0(X)$ тоже не имеет, так как не имеет места необходимое условие $P(z, 0, 0, 0) \equiv -z \neq 0$.

III. Если $X_w \bar{\in} \{z: \arg z = 0\}$ и не является особым, то порядок мероморфного решения w из класса $\bar{S}_w(X)$ конечен.

IV. В предположении, что уравнение (40) имеет решение из класса $\hat{S}_w(X)$ получаем: всякое такое решение имеет бесконечный $S(X)$ -порядок.

Аналогично уравнению (40) рассматривается второе уравнение Пенлеве

$$P(z, w, w', w'') \equiv w'' - \{2w^3 + zw + a\} = 0.$$

Заключения I—IV в таком же виде верны для второго уравнения Пенлеве, если только $a \neq 0$.

5°. Пусть $w = w(z)$ — трансцендентная, однозначная, мероморфная в некотором углу g функция. Рассмотрим алгебраическое дифференциальное уравнение вида (38) при $z \in g$, $n \geq 2$ — натуральное число, а P — рациональная функция относительно z и многочлен относительно других переменных.

Для мероморфного в g решения $w(z)$ определим аналогичным образом понятия $S(G)$ порядка $\nu_S(G)$, где $G \subset g$ — некоторое Σ -множество.

Пусть $w = w(z)$ однозначное мероморфное в g решение (38). Будем говорить, что $w(z)$ принадлежит классу $V_n(G)$, если при любом натуральном $j \leq n$

$$H_j(z, w) = k_j |z|^{\alpha_j} (1 + \varepsilon_j(z)), \quad 2 \leq j \leq n, \quad z \in G, \quad (42)$$

где

$$H_j(z, w) = \left(\frac{z}{S(z, w)} \right)^j \cdot \frac{w^{(j)}(z)}{w(z)}, \quad z \in g, \quad (43)$$

$k_j = \text{const} = 0$, $\alpha_j \geq 0$ — действительные числа, $\varepsilon_j(z) \rightarrow 0$ при $z \in G$ и $z \rightarrow \infty$. Т. е. $A_j(z, w)$ — мероморфная в g конечного роста на G функция.

Пусть уравнение (38) имеет решение из класса $V_j(G)$. В уравнении (38) имея в виду (43) и сделав замену

$$w^{(k)}(z) = H_k \left(\frac{S}{z} \right)^k w, \quad k = 2, \dots, n,$$

получим

$$P(z, w, H_1 \left(\frac{S}{z} \right) w, H_2 \left(\frac{S}{z} \right)^2 w, \dots, H_n \left(\frac{S}{z} \right)^n w) = 0, \quad (44)$$

где $H_1 = 1$.

Из (44) в силу (42) вытекает

$$P(z, w, k_1 |z|^{\alpha_1} z^{-1} S w (1 + \varepsilon_1), k_2 |z|^{\alpha_2} z^{-2} S^2 w (1 + \varepsilon_2), \dots, \quad (45)$$

$$k_n |z|^{\alpha_n} z^{-n} S^n w (1 + \varepsilon_n)) = 0, \quad z \in G,$$

где $k_1 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\varepsilon_1 = 0$, а при $j > 2$, $k_j = \text{const} \neq 0$; $\alpha_j \geq 0$ — действительные числа $\varepsilon_j(z) \rightarrow 0$ при $z \in G$ и $z \rightarrow \infty$.

Алгебраическое относительно S и w уравнение (45) асимптотически совпадает с

$$O_p(z, S, w) = P(z, w, k_1 |z|^{\alpha_1} z^{-1} S w, k_2 |z|^{\alpha_2} z^{-2} S^2 w, \quad (46)$$

$$\dots, k_n |z|^{\alpha_n} z^{-n} S^n w) = 0, \quad z \in G.$$

Уравнение (46) назовем определяющим уравнением, а $O_p(z, S, w)$ — определяющим многочленом уравнения (38) на множестве G в классе $V_n(G)$. Ясно, что $O_p(z, S, w)$ — многочлен относительно S и w .

В зависимости от поведения решений уравнения (38) из класса $V_n(G)$ рассматривается несколько случаев (пять случаев), аналогичных приведенным в пунктах 3° и 4°.

Рассмотрим один из них. Скажем, что решение уравнения (38) из класса $V_n(G)$ принадлежит классу $V_n^-(G)$, если для этого решения имеет место

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^p S^q}{w^l} = 0, \quad z \in G, \quad (47)$$

где $p, q, l > 0$ — любые целые числа.

Пусть $O_p(z, S, w)$ — многочлен степени m относительно w

$$O_p(z, S, w) \equiv \sum_{i=1}^m F_i(k_1, \dots, k_n, z, |z|, S) w^{m-i} = 0, \quad z \in G, \quad (48)$$

где $F_i (i=0, \dots, m)$ — многочлены относительно S , и пусть еще

$$F_0(k_1, \dots, k_n, z, |z|, S) = \sum R_l(k_1, \dots, k_n, z) |z|^{\beta_l} S^l = 0, \quad z \in G, \quad (49)$$

где R_l — рациональные функции от z , а $\beta_l \geq 0$ — действительные числа. После деления левой и правой частей (48) на w^m при $z \in G$ и $z \rightarrow \infty$ получим

$$X_p^{\infty}(z, S) \equiv \sum_{j=0}^q a_j(k_1, \dots, k_n) z^{m_j} |z|^{\beta_j} S^j = 0, \quad z \in G, \quad (50)$$

где q — степень многочлена F_0 относительно S , a_j — ограниченные функции от своих переменных. m_j — целые, $\beta_j \geq 0$ — действительные числа.

Уравнение (50) назовем первым характеристическим уравнением, а многочлен X_p^{∞} — первым характеристическим многочленом уравнения (38) на множестве G в классе $V_n^{\infty}(G)$.

Теорема 3. Пусть задано алгебраическое дифференциальное уравнение (38), а $G \subset g$ некоторое Σ -множество, и пусть характеристический многочлен X_p^{∞} уравнения (3) неприводим, тогда:

1) уравнение (38) мероморфных решений из класса $V_n^{\infty}(G)$ не имеет, если характеристический многочлен X_p^{∞} вырождается.

2) $S(G)$ -порядок всякого мероморфного решения w уравнения (38) из класса $V_n^{\infty}(G)$ — конечное число, если характеристический многочлен X_p^{∞} уравнения (38) не вырождается и G — не свободное множество решения w .

Доказательство пункта 1). Сперва запишем уравнение (38) в виде

$$P(z, w, w_z, \dots, w_{z^n}) \equiv \sum_{j_0, \dots, j_n} a_{j_0, \dots, j_n}^{(z)} w^{j_0} w_z^{j_1} \dots w_{z^n}^{j_n} = 0. \quad (51)$$

При $z \in G$ производные $w_z, \dots, w_{z^n}$ в (51) по формулам

$$w^{(j)}(z) = k_j |z|^{\alpha_j} \left(\frac{S}{z}\right)^j w (1 + \varepsilon_j(z)), \quad z \in G \quad (52)$$

выразим через $w(z)$ и $S(z, w)$.

Предполагая, что уравнение (51) имеет мероморфное решение из класса $V_n^{\infty}(G)$, после замены получим определяющее уравнение

$$O_p(z, S, w) \equiv \sum_{j_0, \dots, j_n} a_{j_0, \dots, j_n}(z) k_1^{j_1} \dots k_n^{j_n} |z|^{j_1 \alpha_1 + \dots + j_n \alpha_n} \cdot \left(\frac{S}{z}\right)^{j_1 + \dots + j_n} w^{j_0 + \dots + j_n} = 0, \quad z \in G. \quad (53)$$

В предположении, что многочлен O_p степени m относительно w , из (53) получим, что характеристический многочлен X_p^{∞} имеет вид

$$X_P^-(z, S) \equiv \sum_{j_1, \dots, j_n} a_{j_1, \dots, j_n}(k_1, \dots, k_n) \cdot z^{m_{j_1, \dots, j_n}} |z|^{\beta_{j_1, \dots, j_n}} S_{j_1 + \dots + j_n} = 0, \quad z \in G, \quad (54)$$

где $m_{j_1, \dots, j_n}$ — целые, а $\beta_{j_1, \dots, j_n}$ — действительные числа.

В силу вырождаемости характеристического многочлена X_P^- получаем

$$X_D^-(z, S) \equiv S^\chi \sum_{j_1, \dots, j_n} a_{j_1, \dots, j_n} z^{m_{j_1, \dots, j_n}} |z|^{\beta_{j_1, \dots, j_n}} = 0, \quad z \in G, \quad (55)$$

где $\chi = \max(j_1 + \dots + nj_n)$, $j_0 + \dots + j_n = m$. Так как в (55) второй множитель, в силу вырождаемости характеристического многочлена $X_P^- \neq 0$, то получаем $S(z, w) \equiv 0$. Это противоречие и доказывает наше предложение, т. е. (51) мероморфных решений из класса $V_n^-(G)$ не имеет.

Доказательство пункта 2). Предположим, что G не является особым множеством этого решения w .

В (50) положим $m_j + \beta_j = \gamma_j$, $\gamma = \max(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Если $\gamma \leq 0$, то все решения уравнения (50) ограничены при $z \rightarrow \infty$, следовательно соответствующие решения уравнения (38) из класса $V_n^-(G)$ имеют нулевой $S(G)$ -порядок.

Повторю в дальнейшем предположим $\gamma > 0$. В этих предположениях при $|z| > R_0$ с достаточно большим R_0 существует конечное число решений уравнения (50) вида

$$S(z, w) = B_p(\beta, z) \cdot |z|^\rho, \quad \beta = (k_1, \dots, k_n), \quad (56)$$

$$p = 1, 2, \dots, \mu < \infty, \quad z \in G,$$

где функции $B_p(\beta, z)$ удовлетворяют соотношениям

$$0 < B' < B_p(\beta, z) \leq B'' < \infty, \quad B', B'' = \text{const.}$$

Из (56) следует, что $S(G)$ -порядок всякого мероморфного в G решения уравнения (38) из класса $V_n^-(G)$ — конечное число.

Замечание. Условие, что в (50) $a_q \neq 0$, в теореме 3 существенно. Если в (50) $a_q = 0$, то существуют примеры, которые показывают, что уравнение (38) может иметь решения как конечного, так и бесконечного $S(G)$ -порядка из класса $V_n^-(G)$, причем с условием, что G — не особое множество этих решений.

Следствие 1. Всякое решение w из класса $V_n^-(G)$ линейного однородного дифференциального уравнения

$$w^{(m)} + a_{m-1}(z) w^{(m-1)} + \dots + a_1(z) w' + a_0(z) w = 0, \quad (57)$$

где $a_i(z)$ ($i = 0, \dots, m-1$) — многочлены и один из них $\neq 0$, G — некоторое Σ -множество, имеет конечный $S(G)$ -порядок, если только G не особое множество решения w .

Для доказательства следствия нужно заметить, что характеристический многочлен X_P^- уравнения (57) не вырожден, и в (50) $a_q \neq 0$.

Следствие 2. Если дифференциальное уравнение (51) содержит один член с максимальной степенью $m = j_0 + j_1 + \dots + j_n$, либо содержит $l \geq 2$ членов с максимальной степенью m , но среди них один член, для которого $j_1 + \dots + j_n$, достигает максимума, то уравнение (51) мероморфных решений из класса $V_n^-(G)$ не имеет.

В обоих случаях характеристический многочлен X_D превращается в одночлен, т. е. вырождается, откуда и следует утверждение следствия.

6°. Для различных классов функций, являющихся решениями алгебраических дифференциальных уравнений первого порядка, можно установить аналоги теорем типа Мальмквиста. Рассмотрим, например, мероморфные в g решение уравнения

$$w' = R(z, w), \quad (58)$$

где $R(z, w)$ — многочлен относительно w степени n с рациональными коэффициентами. Скажем, что однозначная мероморфная в g функция $w = w(z)$ принадлежит классу $S_R(G)$, если w — мероморфное в g решение уравнения (58) и существуют целые числа p и q такие, что

$$w = c|z|^a z^p S^q (1 + \varepsilon(z)), \quad c = \text{const} \neq 0, \quad z \in G, \quad (59)$$

где $G \subset g$ — некоторое Σ -множество, a — действительные числа, а $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ и $z \in G$.

Теорема 4. Если дифференциальное уравнение (58) допускает однозначное мероморфное в g решение из класса $S_R(G)$, то уравнение (58) является уравнением Риккати.

Доказательство. Определяющее уравнение (58) будет

$$O_R(z, S, w) \equiv z^{-1} w S - R(z, w) = 0, \quad (60)$$

где $R(z, w) = R_n(z) w^n + \dots + R_0(z)$, $R_i(z)$ ($i = 0, \dots, n$) — рациональные функции от z .

Из (60) в силу (50) при предположении, что уравнение (58) допускает мероморфное решение из класса $S_R(z)$, получаем, что при $z \rightarrow \infty$ и $z \in G$ имеет место асимптотическое соотношение

$$cz^{p-1} S^{q+1} = c^n a_n z^{pn+p} \cdot S^{nq} + \dots + a_0 z^{p_0}, \quad (61)$$

где $p_0, \dots, p_n$ — целые числа.

Соотношение (61) возможно лишь при $q+1 = nq$, т. е. при $q = 1/n - 1$, откуда $n = 0$ либо $n = 2$, так как q — целое. Получаем, что уравнение (58) должно иметь вид $w' = a(z)w^2 + b(z)w + c(z)$ либо $w' = c(z)$, где $a(z)$, $b(z)$ и $c(z)$ — рациональные от z функции.

Теорема доказана.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 23. VII, 1986 и 20. III, 1989

Ս. Մ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ. Հանրահայտական դիֆերենցիալ հավասարումների մեծամասնի լուծումների ասիմպտոտիկ հատկությունները (ամփոփում)

Հոդվածում ստացված է այսպես կոչված Վիման-Վալիրոնի մաթեմատիկական անդամի տեսության մեկ ընդհանրացում. ներմուծված է մեծամասնի ֆունկցիաների S-կարգ, որը ընդհան-

րացնում է ամբողջ ֆունկցիաների կարգի հասկացութիւնը: Այնուհետև այդ ընդհանրացումները կիրառվում են հանրահաշվական դիֆերենցիալ հավասարումների մերոմորֆ լուծումների S -կարգի գնահատման համար:

S. TC. SARKISIAN. *Asymptotic properties of meromorphic solutions of algebraic differential equations (summary)*

In this paper the generalization of the theory of maximal number of *Wiemann—Valiron* is obtained. A new notion of S -order of meromorphic functions, generalizing the notion of order growth of entire functions is introduced. This generalizations are used for estimations of S -order of meromorphic solutions of algebraic differential equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Malmquist*. Sur les fonctions à un nombre fini de branches satisfaisant à une equation différentielle du premier order, *Acta, math.*, 1913, 36, 297—343.
2. *J. Malmquist*. Sur les fonctions à un nombre fini de brauches satisfaisant à une equation différentielle du premier order., *Acta. math.*, 1920, 42, 59—79.
3. Э. Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков: ДНТБУ, 1939.
4. *E. Picard*. Sur une propriete des fonctions d'une viriable et sur une classe différentielles, *Comptes Redus*, 1880, 91, 1058—1060.
5. *G. Valtron*. Sur un theorems de Hadamard, *Bull. scien. math.*, 47 (58), 1, 1953, 177—192.
6. *G. Valtron*. Lectures on the integral functions, Tonlose, 1923.
7. *A. J. Macintyre* On Bloch's theorem, *Math. Z.*, 44, 1939, 536—540.
8. *Р. Неванлинна*. Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.
9. *У. К. Хейман*. Мероморфные функции, М., 1966.
10. С. Ц. Саркисян. О разрашении решений некоторых систем уравнений с частными производными, *ДАН Арм.ССР*, 24, № 5, 1963.
11. *А. А. Гольдберг, Л. С. Кочинян, С. Ц. Саркисян*. О некоторых теоремах типа Пикара, *Изв. АН Арм.ССР, сер. матем.*, 13, 1, № 1, 1978.
12. *Ш. И. Стрелиц*. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений, *Изв. «Миктис», Вильнюс*, 1972.
13. *В. В. Голубев*. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
14. *P. Boutroux*. Recherches sur les .brauscedentes de M. Painleve et l'ctude asymptotique des equations différentielles du second order, *Ann. Ecole Norm. Super.*, 1913, 30:3, 255—375, 1914, 31, 99—159.
15. *P. Boutroux*. Sur quelques propriets des fonctions entieres, *Acta, math.*, 29, 1904 97—204.