ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 4, 1989 Математика

УДК 517.984.54

Т. Н. АРУТЮНЯН

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ ВЕЙЛЯ-ТИТЧМАРША И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА

§ 1. Введение и формулировка результатов

Рассмотрим каноническую систему дифференциальных уравнений Дирака на полуоси

$$ly = \left\{\alpha_1 \frac{1}{i} \frac{d}{dr} + \alpha_2 p(r) + \alpha_3 q(r)\right\} y = \lambda y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

известны под названием матриц Паули, а p и q — действительные, локально абсолютно интегрируемые функции на полуоси. Известно [1], что при этих условиях операторы, порожденные в гильбертовом пространстве вектор-функций $L^2(0, \infty; \mathbf{C}^2)$ краевыми задачами

$$ly = \lambda y, \quad y_1(0) \cos\alpha + y_2(0) \sin\alpha = 0, \tag{1.2}$$

существенно самосопряжены при любом действительном α. Известно также [1], что существует единственное, с точностью до умножения на постоянную $c(\lambda)$, решение $u(r, \lambda)$ системы (1.1), принадлежащее $L^2(0; \infty; \mathbf{C}^2)$ при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$.

Обозначим через $m(\lambda)$ функцию

$$m(\lambda) = \frac{u_1(0, \lambda)\cos\alpha + u_2(0, \lambda)\sin\alpha}{u_1(0, \lambda)\cos\beta + u_2(0, \lambda)\sin\beta} = \frac{m_0(\lambda)\cos\alpha + \sin\alpha}{m_0(\lambda)\cos\beta + \sin\beta}, \tag{1.3}$$

где

$$m_0(\lambda) = \frac{u_1(0, \lambda)}{u_2(0, \lambda)}.$$

Поскольку $u(r, \lambda)$ единственно с точностью до умножения на постоянную, то формулой (1.3) $m(\lambda)$ определяется однозначно.

Утверждение о существовании решения из L^2 при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ обычно называют теоремой Г. Вейля, так как впервые оно появилось в классической работе Г. Вейля [2] (посвященной уравнению Штурма—Лиувилля), где также впервые была введена функция $m(\lambda)$. Для системы Дирака функция $m(\lambda)$ была определена впервые в работе Титчмарша [3]. Изучение аналитических и асимптотических свойств функции $m(\lambda)$, которую обычно называют функцией Вейля—Титчмарша, играет важную роль в спектральном анализе соответсвующих операторов (см. [4]—[12]).

Асимптотика функции $m_0(\lambda)$ ($\lim\limits_{\mu\to\infty} m_0(i\mu) = i$) получена ранее автором в [4] при довольно сильных ограничениях на коэффициенты p и q и потом в работе [5] для неотрицательных, монотонно растущих p и q. Ниже, в § 2 доказана

Теорема 1. *Пусть действительные коэффициенты p и $q \in L^1_{loc}[0, \infty)$. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\lim_{\mu\to\pm\infty} m_0(\nu + i\mu) = \pm i \tag{1.4}$$

равномерно относительно всех действительных ν, и, как следствие из определения (1.3)

$$\lim_{\mu\to\pm\infty} m(\nu + i\mu) = e^{\pm i(\beta-\alpha)}. \tag{1.5}$$

Отметим, что асимптотика (1.4) при тех же условиях получена в работе W. N. Everitt и др. [6], но проводимое нами доказательство полностью отличается от метода авторов [6] и, по нашему мнению, проще.

Допустим далее, что коэффициенты p и q кроме условия локальной интегрируемости удовлетворяют условиям, обеспечивающим чистую дискретность спектра краевой задачи (1.2), и будем в дальнейшем называть это условием (D). Например, условие (см. [13])

$$\lim_{r\to\infty} \left[p^2(r) + q^2(r) - \sqrt{[p'(r)]^2 + [q'(r)]^2}\right] = \infty, \quad ' = \frac{d}{dr}, \tag{1.6}$$

обеспечивает чистую дискретность спектра. В предыдущей работе автора [5] была решена обратная задача о восстановлении „потенциала" $Q(r) = \sigma_2 p(r) + \sigma_3 q(r) = \begin{pmatrix} p(r) & q(r) \\ q(r) & -p(r) \end{pmatrix}$ системы (1.1) по двум дискретным спектрам в классе неотрицательных монотонно растущих коэффициентов p и q, удовлетворяющих условию (D). В настоящей работе мы решаем обратную задачу по двум спектрам в классе локально интегрируемых потенциалов (опять таки при неявном условии (D)). Указываются два частных случая: $p(x) \equiv 0$ и $q(x) \equiv 0$, которые можно свести один к другому, когда потенциал можно восстановить по одному спектру.

Обозначим через $\Lambda(\alpha) = \{\lambda_n(\alpha)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ множество собственных значений (спектр) задачи (1.2). Собственные значения пронумерованы в порядке возрастания, т. е. $\lambda_n(\alpha) > \lambda_k(\alpha)$ при $n > k$, причем $\lambda_n(\alpha) > 0$ при $n > 0$ и $\lambda_n(\alpha) < 0$ при $n < 0$. Через $\varphi(r, \lambda)$ обозначим решение системы (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_1(0, \lambda) = \sin\alpha, \quad \varphi_2(0, \lambda) = -\cos\alpha. \tag{1.7}$$

Очевидно, что $\varphi(r, \lambda_n(\alpha))$, $n \in Z$ есть собственные функции задачи (1.2). Квадраты L^2-норм этих собственных функций, $a_n(\alpha) = \|\varphi(\cdot, \lambda_n(\alpha))\|^2$, обычно называют нормировочными постоянными. Непрерывную слева, монотонно возрастающую функцию скачков

$$\rho_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{0<\lambda_n(\alpha)<\lambda} a_n^{-1}(\alpha), & \lambda > 0, \\ -\sum\limits_{\lambda<\lambda_n(\alpha)<0} a_n^{-1}(\alpha), & \lambda < 0, \end{cases}$$

называют спектральной функцией задачи (1.2).

Обратная задача по двум спектрам состоит в определении потенциала $Q(r)$ по спектру $\Lambda(\alpha)$ задачи (1.2) и по спектру $\Lambda(\beta) = \{\lambda_n(\beta)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ задачи $ly=\lambda y$, $y_1(0)\cos\beta + y_2(0)\sin\beta = 0$, отличающейся от (1.2) только краевым условием. В работе [14] доказано, что по спектральной функции $\rho_0(\lambda)$ можно однозначно и конструктивно восстановить потенциал $Q(r)$. Из [14] (см. также [5], теорема 3) следует также, что $Q(r)$ можно восстановить и по $\rho_\alpha(\lambda)$ (при $\alpha \neq 0$), если параметр α из краевого условия заранее известен. Поэтому обратную задачу по двум спектрам обычно рассматривают как задачу определения нормировочных постоянных $a_n(\alpha)$ по спектрам $\Lambda(\alpha)$ и $\Lambda(\beta)$. В § 3 доказана следующая

Теорема 2. *Пусть* $p, q \in L^1_{loc}[0, \infty)$ *и удовлетворяют условию* (*D*). *Тогда нормировочные постоянные* $a_n(\alpha)$ *определяются при* $\sin(\beta-\alpha) \neq 0$ *формулами*:

$$a_n(\alpha) = c\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\lambda_n(\alpha)-\lambda_n(\beta)}\cdot\frac{\lambda_0(\alpha)-\lambda_n(\alpha)}{\lambda_0(\beta)-\lambda_n(\alpha)}\cdot\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_n(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}p_k{}^*,\quad n\neq 0, \tag{1.8}$$

где

$$p_k = \frac{\lambda_k(\alpha)-\lambda_n(\alpha)}{\lambda_k(\beta)-\lambda_n(\alpha)} \text{ при } k\neq n \text{ и } p_n = 1;$$

$$a_0(\alpha) = c\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\lambda_0(\alpha)-\lambda_0(\beta)}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}\,\frac{\lambda_k(\alpha)-\lambda_0(\alpha)}{\lambda_k(\beta)-\lambda_0(\alpha)}, \tag{1.8'}$$

а положительная постоянная c *определяется из соотношения*

$$c\cdot\lim_{\mu\to\infty}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}\cdot\left|\frac{\lambda_k(\alpha)-i\mu}{\lambda_k(\beta)-i\mu}\right| = 1, \tag{1.9}$$

т. е. $\rho_\alpha(\lambda)$, *а следовательно и потенциал* $Q(r)$, *определяются однозначно по двум спектрам.*

В работе [15] автором построен пример (т. е. выписан явно потенциал) канонического оператора Дирака, спектр которого совпадает со спектром наперед заданного канонического оператора Дирака, но нормировочные постоянные отличаются в конечном числе. Из этого примера, в частности, следует, что оператор Дирака не определяется однозначно (вообще говоря) одним спектром. Однако, если коэффициент $p(r)\equiv 0$, то оказывается, что $\lambda_n(-\alpha) = -\lambda_{-n}(\alpha)$, т. е. зная спектр $\Lambda(\alpha)$, мы автоматически знаем и второй спектр $-\Lambda(-\alpha)$, и взяв в формулах (1.8) и (1.9) $\beta = -\alpha$, мы можем определить норми-

* Штрих при бесконечном произведении означает, что пропускается множитель с номером $k=0$. Бесконечные произведения в этой статье понимаются в смысле главного значения, т. е. $\prod\limits_{-\infty}^{\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=-n}^{n} a_k$.

ровочные постоянные по одному спектру. Аналогично доказывается, что при $q(r)\equiv 0$ $\lambda_n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\lambda_{-n}(\alpha)$ и, взяв $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, мы опять решаем обратную задачу по одному спектру. Таким образом, в § 3 доказывается

Теорема 3. 1. *Пусть $p(r)\equiv 0$, а $q\in L^1_{loc}[0,\infty]$ и удовлетворяет условию (D). Тогда нормировочные постоянные определяются по формулам* $(2\alpha\neq\pi k)$:

$$a_n(\alpha)=c\,\frac{\sin 2\alpha}{a_n(\alpha)+\lambda_n(\alpha)}\cdot\frac{\lambda_0(\alpha)-\lambda_n(\alpha)}{\lambda_0(\alpha)+\lambda_n(\alpha)}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\,\frac{-\lambda_{-k}(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)}\,p_k,\quad n\neq 0,$$

где

$$p_k=\frac{\lambda_n(\alpha)-\lambda_k(\alpha)}{\lambda_n(\alpha)+\lambda_{-k}(\alpha)}\quad \textit{при}\ k\neq n,\ p_n=1;$$

$$a_0(\alpha)=-c\,\frac{\sin 2\alpha}{2\lambda_0(\alpha)}\prod_{-\infty}^{\infty}{}'\,\frac{\lambda_{-k}(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)}\cdot\frac{\lambda_k(\alpha)-\lambda_0(\alpha)}{\lambda_{-k}(\alpha)+\lambda_0(\alpha)},$$

а положительная постоянная c определяется из соотношения

$$c\cdot\lim_{\mu\to\infty}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\,\frac{-\lambda_{-k}(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)}\left|\frac{\lambda_k(\alpha)-i\mu}{\lambda_{-k}(\alpha)+i\mu}\right|=1.$$

2. *Пусть $q(r)\equiv 0$, а $p\in L^1_{loc}[0,\infty)$ и удовлетворяет (D). Тогда* $\left(2\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$,

$$a_n(\alpha)=c\,\frac{\cos 2\alpha}{\lambda_n(\alpha)+\lambda_{-n}(\alpha)}\cdot\frac{\lambda_n(\alpha)-\lambda_0(\alpha)}{\lambda_n(\alpha)+\lambda_0(\alpha)}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\,\frac{-\lambda_{-k}(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)}\,p_k,\quad n=0,$$

где

$$p_k=\frac{\lambda_n(\alpha)-\lambda_k(\alpha)}{\lambda_n(\alpha)+\lambda_{-k}(\alpha)}\quad \textit{при}\ k\neq n,\ p_n=1;$$

$$a_0(\alpha)=c\,\frac{\cos 2\alpha}{2\lambda_0(\alpha)}\prod_{-\infty}^{\infty}{}'\,\frac{\lambda_{-k}(\alpha)}{\lambda_k(\alpha)}\,\frac{\lambda_k(\alpha)-\lambda_0(\alpha)}{\lambda_{-k}(\alpha)+\lambda_0(\alpha)},$$

а c та же, что и в первой части теоремы.

Формулы (1.8) и (1.9), и соответствующие формулы в теореме 3, значительно упрощаются, если в (1.9) оказывается возможным перейти к пределу под знаком бесконечного произведения. Достаточные условия равномерной сходимости бесконечного произведения $\prod\limits_{-\infty}^{\infty}{}'\left|\frac{\lambda_k(\alpha)-i\mu}{\lambda_k(\beta)-i\mu}\right|$ и сходимости $\prod\limits_{-\infty}^{\infty}{}'\,\frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}$, а, тем самым и возможности предельного перехода в (1.9), приведены в [5]. Эти условия таковы: $Q(r)$ непрерывна в нуле и удовлетворяет в нуле условию Дини

$$\int_0^{\delta}\frac{|Q(s)-Q(0)|}{s}\,ds<\infty,\ \delta>0. \tag{1.10}$$

и

$$\lambda_{-n}(\alpha) = \lambda_n(\alpha)[1 + o(1)], \quad n \to \infty. \tag{1.11}$$

Условие (1.10) позволяет применять (см. [5]) асимптотику спектральной функции $\rho(\lambda)$, полученную в [16] (см. также [17], стр. 117). Таким образом, мы получаем другой вариант теоремы 2.

Теорема 4. *При условиях теоремы 2 и дополнительных условиях* (1.10) *и* (1.11) *имеет место формула*:

$$a_n(\alpha) = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\beta)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda_n(\alpha)}{\lambda_k(\beta) - \lambda_n(\alpha)}, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{1.12}$$

Возможность предельного перехода в (1.9) позволяет также упростить формулы в теореме 3. При этом оказывается, что условие (1.11) всегда выполняется при $p(r) \equiv 0$ или $q(r) \equiv 0$. Поэтому модификация теоремы 3 имеет следующий вид:

Теорема 5. 1. *Пусть* $p(r) \equiv 0$, $q \in L^1_{loc}[0, \infty)$, q *удовлетворяет условиям* (D) *и* (1.10). *Тогда*

$$a_n(\alpha) = -\frac{\sin 2\alpha}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_{-n}(\alpha)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_n(\alpha) - \lambda_k(\alpha)}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_{-k}(\alpha)}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

2. *Пусть* $q(r) \equiv 0$, $p \in L^1_{loc}(0, \infty)$, p *удовлетворяет условиям* (D) *и* (1.10). *Тогда*

$$a_n(\alpha) = \frac{\cos 2\alpha}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_{-n}(\alpha)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_n(\lambda) - \lambda_k(\alpha)}{\lambda_n(\alpha) + \lambda_{-k}(\alpha)}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

§ 2. Асимптотика функции Вейля—Титчмарша

Пусть $\lambda = \nu + i\mu$ и пусть $u(r, \lambda)$ — решение системы (1.1), принадлежащее $L^2(0, \infty; \mathbf{C}^2)$ при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Запишем систему (1.1) покоординатно:

$$u_2' + p(r)u_1 + q(r)u_2 = \nu u_1 + i\mu u_1, \tag{2.1}$$

$$-u_1' + q(r)u_1 - p(r)u_2 = \nu u_2 + i\mu u_2, \tag{2.2}$$

и запишем также сопряженные тождества:

$$\bar{u}_2' + p(r)\bar{u}_1 + q(r)\bar{u}_2 = \nu\bar{u}_1 - i\mu\bar{u}_1, \tag{2.3}$$

$$-\bar{u}_1' + q(r)\bar{u}_1 - p(r)\bar{u}_2 = \nu\bar{u}_2 - i\mu\bar{u}_2. \tag{2.4}$$

Умножая (2.1) на $\bar{u}_2$, (2.2) — на $-\bar{u}_1$, (2.3) — на u_2, (2.4) — на $-u_1$ и складывая все четыре равенства, получим:

$$-\frac{d}{dr}|u|^2 = 4p(r)\operatorname{Re}(u_1 \cdot \bar{u}_2) + 2q(r)(|u_2|^2 - |u_1|^2) + 4\mu \operatorname{Im}(u_1\bar{u}_2), \tag{2.5}$$

откуда, учитывая неравенства

$$|2\operatorname{Re}(u_1 \cdot \bar{u}_2)| \leqslant |u|^2, \quad |2\operatorname{Im}(u_1\bar{u}_2)| \leqslant |u|^2, \quad ||u_2|^2 - |u_1|^2| \leqslant |u|^2,$$

имеем

$$-\frac{\frac{d}{dr}|u|^2}{|u|^2} = -\frac{d}{dr}\ln|u|^2 < 2\,(|p(r)| + |q(r)| + |\mu|).$$

Интегрируя последнее неравенство от нуля до r и потенцируя, получаем

$$\frac{|u(r,\lambda)|^2}{|u(0,\lambda)|^2} \geqslant e^{-2\int\limits_0^r (|p(s)| + |q(s)| + |\mu|)\,ds}. \tag{2.6}$$

Введем функцию $N(\lambda) = \dfrac{\int\limits_0^\infty |u(r,\lambda)|^2\,dr}{|u(0,\lambda)|^2}$. Интегрируя неравенство (2.6) от 0 до ∞, имеем

$$N(\lambda) \geqslant \int\limits_0^\infty \exp\left\{-2\int\limits_0^r (|p(s)| + |q(s)| + |\mu|)\,ds\right\} dr >$$

$$> \int\limits_0^{|\mu|^{-\frac{1}{2}}} \exp\left\{-2\int\limits_0^r (|p(s)| + |q(s)|)\,ds \cdot \exp\{-2|\mu|r\}\right\} dr \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_0^{|\mu|^{-\frac{1}{2}}} \exp\left\{-2\int\limits_0^{|\mu|^{-\frac{1}{2}}} (|p(s)| + |q(s)|)\,ds\right\} \exp\{-2|\mu|r\}\,dr =$$

$$= \exp\left\{-2\int\limits_0^{|\mu|^{-\frac{1}{2}}} (|p(s)| + |q(s)|)\,ds\right\} \cdot \frac{1 - e^{-2|\mu|}}{2|\mu|}.$$

В силу локальной абсолютной интегрируемости p и q, из последнего неравества следует предельное соотношение:

$$\lim_{|\mu|\to\infty} |\mu| \cdot N(\nu + i\mu) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

С другой стороны, в работе [5] получено тождество

$$m_0(\lambda) = (1 + |m_0(\lambda)|^2)\left\{\int\limits_0^\infty p(r)\frac{|u(r,\lambda)|^2}{|u(0,\lambda)|^2}\,dr + \right.$$

$$\left. + \nu\int\limits_0^\infty \frac{|u_2|^2 - |u_1|^2}{|u(0,\lambda)|^2}\,dr + i\mu\int\limits_0^\infty \frac{|u(r,\lambda)|^2}{|u(0,\lambda)|^2}\,dr\right\}.$$

Переписав это тождество в виде

$$m_0(\lambda) = (1 + |m_0(\lambda)|^2)\,\{c(\lambda) + \nu b(\lambda) + i\mu N(\lambda)\}, \tag{2.8}$$

где через $c(\lambda)$ и $b(\lambda)$ обозначены соответствующие интегралы, которые, очевидно, действительны, и переходя к модулям, получаем неравенства

$$\frac{1}{2} \geqslant \frac{|m_0(\lambda)|}{1+|m_0(\lambda)|^2} = \{|c(\lambda)+\nu b(\lambda)|^2 + \mu^2 N^2(\lambda)\}^{1/2} \geqslant |\mu|\cdot N(\lambda).$$

Переходя к пределу при $|\mu \to \infty$, получаем, учитывая (2.7),

$$\frac{1}{2} \geqslant \lim_{|\mu|\to\infty} \frac{|m_0(\lambda)|}{1+|m_0(\lambda)|^2} \geqslant \frac{1}{2},$$

что возможно только при

$$\lim_{|\mu|\to\infty} |m_0(\nu+i\mu)| = 1. \tag{2.9}$$

С другой стороны, из (2.8) следует тождество

$$\operatorname{Im} m_0(\lambda) = (1+|m_0(\lambda)|^2\cdot\mu N(\lambda), \tag{2.10}$$

из которого, с учетом (2.7) и (2.9), вытекает

$$1 \geqslant \lim_{|\mu|\to\infty} |\operatorname{Im} m_0(\lambda)| = \lim_{|\mu|\to\infty} (1+|m_0(\lambda)|^2)\cdot|\mu|\cdot N(\lambda) \geqslant 1,$$

т. е.

$$\lim_{|\mu|\to\infty} |\operatorname{Im} m_0(v+i\mu) = 1.$$

Последнее вместе с (2.9) дает равенство $\lim\limits_{|\mu|\to\infty} \operatorname{Re} m_0(\nu+i\mu) = 0$. Таким образом, $\lim\limits_{|\mu|\to\infty} m_0(\nu+i\mu) = \pm i$ и знак в правой части определяется из тождества (2.10), т. е. окончательно имеем

$$\lim_{\mu\to\pm\infty} m_0(\nu+i\mu) = \pm i$$

и теорема 1 доказана.

§ 3. Формулы для нормировочных постоянных

Из определения (1.3) функции $m(\lambda)$ видно, что $m(\lambda)$ — мероморфная функция, причем нули ее образуют спектр $\Lambda(\alpha)$ задачи (1.2), а полюса — спектр $\Lambda(\beta)$. Из (1.3) нетрудно также получить равенство (см. [5], § 4)

$$\operatorname{Im} m(\lambda) = \operatorname{Im}\lambda\cdot\frac{\int\limits_0^\infty |u(r,\lambda)|^2 dr}{|u_1(0,\lambda)\cos\beta + u_2(0,\lambda)\sin\beta|^2}\sin(\beta-\alpha),$$

из которого следует, что $m(\lambda)$ есть „вещественная" мероморфная функция (т. е. $\operatorname{Im} m(\lambda)=0$ при $\operatorname{Im}\lambda=0$), переводящая при $\sin(\beta-\alpha)>0$ верхнюю полуплоскость в верхнюю и, следовательно, согласно теореме М. Г. Крейна ([18], стр. 398):

1. Нули $\{\lambda_n(\alpha)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и полюса $\{\lambda_n(\beta)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ функции $m(\lambda)$ все простые и перемежаются, причем (учитывая нумерацию собственных значений, указанную в § 1), нули лежат правее полюсов, т. е.

$$\lambda_n(\beta) < \lambda_n(\alpha) < \lambda_{n+1}(\beta),\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots,\quad \lambda_{-1}(\alpha) < 0 < \lambda_1(\beta).$$

2. Имеет место представление:

$$m(\lambda) = c\,\frac{\lambda - \lambda_0(\alpha)}{\lambda - \lambda_0(\beta)} \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)} \cdot \frac{\lambda_k(\alpha) - \lambda}{\lambda_k(\beta) - \lambda}, \tag{3.1}$$

где $c>0$.

Вычисляя производную $\left.\frac{dm(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_n(\alpha)}$ исходя из определения (1.3), получаем

$$\left.\frac{dm(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_n(\alpha)} = \frac{a_n(\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Вычисляя ту же производную из представления (3.1) и приравнивая их значения, получаем формулы (1.8) и (1.8′) (подробности см. в [5], формулы (4.8) и (4.10)). Поэтому вопрос определения нормировочных постоянных через два спектра сводится к определению положительной постоянной c, участвующей в представлении (3.1). В условиях, при которых верна асимптотика (1.5), постоянная c определяется из предельного соотеошения (1.9) (см. [5], лемма 4.1). Таким образом, доказана теорема 2, которая является усилением теоремы 1 из [5] в том смысле, что обратная задача по двум спектрам рашается в классе локально абсолютно интегрируемых потенциалов, удовлетворяющих условию (D), что существенно менее обременительно, чем условия, приведенные в работе [5].

Замечание 1. Краевое условие из (1.2) не изменяется, если заменить α на $\alpha+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, т. е. оно периодическое с периодом π. Поэтому достаточно рассматривать $-\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. При рассмотрении обратной задачи по двум спектрам не имеет смысла случай $\beta=\alpha+\pi k$, так как „вторая задача“ просто совпадает с первой. Потому всегда имеет место естественное условие $\sin(\beta-\alpha)\neq 0$. Мы рассматривали случай $\sin(\beta-\alpha)>0$. Случай $\sin(\beta-\alpha)<0$ изучается совершенно аналогично, причем формулы (1.8), (1.8′), (1.9) не изменяются.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Пусть $p(r)\equiv 0$ и пусть $\varphi_n(\alpha)\overset{\text{def}}{=}\varphi(r,\lambda_n(\alpha))$ есть собственная вектор-функция, соответствующая собственному значению $\lambda_n(\alpha)$ и нормированная условием (1.7). Положим $v_{-n}\overset{\text{def}}{=}-\alpha_2\varphi_n(\alpha)=(-\varphi_{n1},\ \varphi_{n2})^T$ (T — транспонирование). В силу антикоммутируемости матриц α_k имеем

$$lv_{-n}=-l\alpha_2\varphi_n=\alpha_2\lambda_n(\alpha)\varphi_n=\lambda_n(\alpha)\alpha_2\varphi_n=-\lambda_n(\alpha)v_{-n},$$

причем из определения v_{-n} следует, что она удовлетворяет начальному условию $v_{-n}(0)=(\sin(-\alpha),\ -\cos(-\alpha))^T$ и, следовательно, краевому условию $y_1(0)\cos(-\alpha)+y_2(0)\sin(-\alpha)=0$, т. е. v_{-n} есть собственная функция задачи $ly=\lambda y$, $y_1(0)\cos(-\alpha)+y_2(0)\sin(-\alpha)=0$, соответствующая собственному значению $-\lambda_n(\alpha)$ и нормированная отмеченным выше начальным условием. В силу обозначений, принятых в § 1, имеем

$$-\lambda_n(\alpha)=\lambda_{-n}(-\alpha), v_{-n}(r)=\varphi(r, \lambda_{-n}(-\alpha))=\varphi_{-n}(-\alpha), \; n\in \mathbf{Z}.$$

Поэтому, если в качестве β взять $-\alpha$, то простая подстановка $\lambda_k(\beta)=-\lambda_{-k}(\alpha)$ в (1.8), (1.8′) и (1.9) приводит к формулам первой части теоремы 3. Из приведенного выше замечания 1 следует, что в этих формулах параметр α может принимать любые действительные значения кроме таких, при которых $2\alpha=\pi k$.

Замечание 2. В связи с формулой для $a_0(\alpha)$ в первой части теоремы 3 нам надо также доказать, что нуль не является собственным значением задачи (1.2) при $p(r)\equiv 0$ и $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$, т. е. $a_0(\alpha)\neq 0$. Для этого достаточно заметить, что решение $\varphi(r, 0)$, удовлетворяющее начальным условиям (1.7), явно вычисляется:

$$\varphi(r, 0)=\left(\sin\alpha\, e^{\int_0^r q(s)\,ds}, \; -\cos\alpha\, e^{-\int_0^r q(s)\,ds}\right)^T,$$

а чтобы $\varphi(\cdot, 0)\in L^2(0, \infty; \mathbf{C}^2)$ необходимо, чтобы $\exp\left(2\int_0^r q(s)\,ds\right)$ и $\exp\left(-2\int_0^r q(s)\,ds\right)\to 0$ при $r\to\infty$ одновременно, что невозможно. Случай $q(x)=0$ рассматривается совершенно аналогично.

Для доказательства теоремы 4 достаточно заметить, что при равномерной сходимости бесконечного произведения $\prod_{-\infty}^{\infty}{}'\left|\frac{\lambda_k(\alpha)-i\mu}{\lambda_k(\beta)-i\mu}\right|$ и сходимости бесконечных произведений $\prod_{-\infty}^{\infty}{}'\frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}$ и $\prod_{-\infty}^{\infty}{}' p_k$ (и, следовательно, $\prod{}'\frac{a_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}p_k=\prod{}'\frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}\cdot\prod{}' p_k$), что обеспечивается условиями (1.10) и (1.11) (см. [5], § 5) формула (1.9) принимает вид с $\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_k(\beta)}{\lambda_k(\alpha)}=1$, а формулы (1.8) и (1.8′) принимают более простой вид (1.12).

Теорема 5 следует из теоремы 4 так же, как теорема 3 из теоремы 2. Здесь следует объяснить только отсутствие дополнительного условия (1.11). В работе [5] доказано соотношение $\lambda_n(\alpha)-\lambda_n(\beta)=o(1)$ при $n\to\infty$ (см. [5], формула (5.9)). Поэтому, при $p(r)\equiv 0$, $-\lambda_{-n}(\alpha)=\lambda_n(-\alpha)=\lambda_n(\alpha)+o(1)$, что намного сильнее, чем (1.11). Аналогично, при $q(r)\equiv 0$, $-\lambda_{-n}(\alpha)=\lambda_n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\lambda_n(\alpha)+o(1)$, т. е. условие (1.11) опять автоматически удовлетворено.

Ереванский государственный университет

Поступила 8.XII.1986

Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ. Վեյլ-Տիտչմարշի ֆունկցիայի ասիմպտոտիկան և հակադարձ խնդիրը Դիրակի համակարգի համար (*ամփոփում*)

Կիսաառանցքի վրա դիտարկվող կանոնիկ ինքնահամալուծ Դիրակի համակարգի համար ստացված է նրա Վեյլ-Տիտչմարշի ֆունկցիայի ասիմպտոտիկ վարքը և լուծված է հակադարձ խնդիրը (երկու դիսկրետ սպեկտրներով վերականգնել գործակիցները)։

Բերված է երկու մասնավոր դեպք, երբ գործակիցները կարելի է վերականգնել միայն մեկ սպեկտրով։

T. N. HARUTIUNIAN. *The asymptotic form of the Weyl—Titchmarsh function and the inverse problem for Dirac system* (summary)

For canonic, selfadjoint Dirac system on halfaxis the asymptotic form of the Weyl—Titchmarsh function is obtained under condition of local integrability of the potential. In the case of purely discrete spectrum this helps to solve the problem of reconstruction of the potential matrix by two discret spectra. Two particular cases, where the inverse problem can be solved by only one spectrum, is indicated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. М. Левитан*, И. С. *Саргсян*. Введение в спектральную теорию, «Наука», М., 1970.
2. *H. Weyl*. Über gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Singularitaten und die zugehörigen eutwichlungen willkürlicher Functionen, Math. Ann., 68, 1910, 220—269.
3. *E. C. Titchmarsh*. Some eigenfunction expantion formulae, Proc, London Math. Soc., 11, 3, 1961, 159—168.
4. *Т. Н. Арутюнян*. Обратная задача для системы Дирака на полуоси с дискретным спектром, ДАН АрмССР, 75, № 5, 1982, 195—199.
5. *Т. Н. Арутюнян*. Обратная задача для канонической системы Дирака с дискретным спектром, Изв. АН АрмССР. «Математика», XX, № 4, 1985, 245—268.
6. *W. N. Everitt, D. B. Hinton, J. B. Shaw*. The asymptotic form of the Titchmarsh—Weyl coeffitieut for Dirac systems, J. London Math. Soc., 27, 2, 1983, 465—476.
7. *B. J. Harris*. The asymptotic form of the Titchmarsh—Weyl m-function, associated with the Dirac system, J. London Math. Soc., 31, 2, 1985, 321—330.
8. *W. N. Everitt, C. Bennewitz*. Some remarks on the Titchmarsh—Weyl m-coeffi, cient, Tribute to Åke Pleijel (University of Uppsal , Sweden, 1980), 49—108.
9. *D. B. Hinton, J. K. Shaw*. On Titchmarsh—Weyl $m(\lambda)$—functions for linear Hamiltonian systems, J. Diff. Equations, 40, 1981, 315—342.
10. *D. B. Hinton, J. K. Shaw*. On the spectrum of singular Hamiltonian system Ouaestiones Math., 5, 1982, 29—81.
11. *D. B. Hinton, J. K. Shaw*. Titchmarsh—Weyl theory for Hamiltonian systems, Spectral theory of differeutial operators (eds. J. Knowless and R. T. Lewis), North—Holland, New—York, 1981, 219—231.
12. *Б. М. Левитан*. Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля в случае конечно-зонных и бесконечно-зонных потенциалов, Труды ММО, т. 45, 1982, 3—36.
13. *В. В. Мартынов*. Прямые методы качественного спектрального анализа несамосопряженной системы дифференциальных уравнений первого порядка. Дифф. уравнения, 4, № 8 и № 12, 1968, 1494—1508, 2243—2257.
14. *Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов*. Обратная задача для системы Дирака, ДАН СССР, 167, № 5, 1966, 967—970.
15. *Т. Н. Арутюнян*. О каноническом операторе Дирака с частично заданным спектром. Ученые записки ЕГУ, 1(161), 1986, 11—19.
16. *В. А. Яврян*. Об асимптотике спектральной матрицы-функции канонической системы дифференциальных уравнений, ДАН АрмССР, 56, № 3, 1973, 129—134.
17. *В. А. Марченко*. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля, «Наукова думка», Киев, 1972.
18. *Б. Я. Левин*. Распределение корней целых функций, «Гостехиздат», 1956.