

УДК 517.988

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

С. Г. КАРАДЖЯН

**ЭКОНОМИЧНЫЙ АЛГОРИТМ ОБРАЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО  
 ОПЕРАТОРА С РАЗНОСТНО-СУММАРНО-ГАРМОНИЧЕСКИМ  
 ЯДРОМ**

Рассматривается задача эффективного приближенного обращения интегрального оператора Фредгольма второго рода

$$(I - K) y = y(x) - \int_0^T K(x, t) y(t) dt; \quad (0 \leq x, t \leq T). \quad (1)$$

В дальнейшем будем предполагать существование обратного оператора  $(I + K) = (I - K)^{-1}$  с ядром  $R(x, t)$  (это обеспечено, например, при достаточно малом  $T$ ).

В работе [4] (см. также [5]) выявлена структура резольвентного оператора  $(I + R)$ , если  $K$  удовлетворяет дифференциальному уравнению определенного типа. Здесь будет рассмотрен случай, когда

$$\left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right) K(x, t) = 0. \quad (2)$$

В работе [3] получена явная формула резольвентного ядра оператора (1) с ядром (2). Однако при численной реализации этой формулы число арифметических операций имеет порядок  $O(N^4)$ ,  $N \rightarrow \infty$ , где  $N$  — число узлов, на которые разбивается интервал  $(0, T)$ . В общем же случае, при непосредственной дискретизации оператора (1), путем разбиения интервала  $(0, T)$  на  $N$  частей (т. е. при сведении к алгебраической системе), потребуется порядка  $O(N^3)$  арифметических операций. Под экономичным обращением оператора (1) здесь будем понимать алгоритм, требующий затрат порядка не более чем  $O(N_2)$ . Оказывается, что такие алгоритмы существуют не только в теплицевом случае (при  $K = K(x - t)$ ). Так, в работе [2] построен алгоритм с числом арифметических операций порядка  $O(N^2)$  в случае, когда  $K$  имеет вид  $K(x, t) = f(x + t) + g(x - t)$ .

Ниже будет построен экономичный алгоритм обращения оператора (1) с ядром (2), а также будут указаны пути его реализации на ЭВМ параллельной архитектуры.

**§ 1. Дифференциально-функциональные уравнения  
 для резольвентного ядра на границе**

Нетрудно доказать, что уравнению (2) удовлетворяют те и только те функции, которые можно представить в виде  $K(x, t) = f(x + t) + g(x - t) + H(x, t)$ , где  $H(x, t)$  — гармоническая функция

(см. (2)). Оператор  $(I - K)$  будем рассматривать в паре со вспомогательным оператором  $(I - K^-)$  с ядром  $K^-(x, t) = f(x + t) + g(x - t) - H(x, t)$  (примем  $K = K^+$ ).

Для каждого  $\tau \in [0, T]$  рассмотрим интегральные операторы

$$(I - K^\pm) y \stackrel{\text{def}}{=} y(x) - \int_0^\tau K^\pm(x, s) y(s) ds; \quad 0 \leq x \leq \tau \leq T. \quad (3)$$

Всюду в дальнейшем предполагается существование операторов  $(I + R_\pm) = (I - K_\pm)^{-1}$ . Ядра  $K^\pm(x, t)$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 K^\pm(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 K^\mp(x, t)}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p R^\pm(x, t)}{\partial t^p} \Big|_{t=0} &= r_1^{\pm p}(x, \tau); \quad \frac{\partial^p R^\pm(x, t)}{\partial t^p} \Big|_{t=\tau} = r_2^{\pm p}(x, \tau), \\ \frac{\partial^p R^\pm(x, t)}{\partial x^p} \Big|_{x=0} &= R_1^{\pm p}(\tau, t); \quad \frac{\partial^p R^\pm(x, t)}{\partial x^p} \Big|_{x=\tau} = R_2^{\pm p}(\tau, t), \quad (5) \\ (p=0, 1); \quad \frac{\partial^0 R}{\partial x^0} &= R. \end{aligned}$$

Исходя из известных интегральных уравнений для резольвентных ядер, с учетом соотношений (4) придем к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r_2^{\pm 0}(x, \tau)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 r_2^{\mp 0}(x, \tau)}{\partial x^2} &= r_2^{\pm 0}(x, \tau) \cdot \left[ \frac{\partial r_2^{\pm 0}(s, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{s=\tau} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial r_2^{\pm 0}(\tau, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial r_2^{\mp 0}(s, \tau)}{\partial s} \Big|_{s=\tau} \right] + \left[ \frac{\partial r_2^{\pm 0}(x, \tau)}{\partial \tau} - \right. \\ &- \left. r_2^{\pm 0}(x, \tau) \cdot r_2^{\mp 0}(\tau, \tau) \right] \cdot [r_2^{\pm 0}(\tau, \tau) - r_2^{\mp 0}(\tau, \tau)] + \\ &+ r_1^{\pm 1}(x, \tau) \cdot r_2^{\pm 0}(0, \tau) - r_1^{\pm 0}(x, \tau) \cdot \frac{\partial r_2^{\mp 0}(s, \tau)}{\partial s} \Big|_{s=0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим также соотношения

$$\begin{aligned} r_2^\pm(x, \tau) &= \frac{\partial r_2^{\pm 0}(x, \tau)}{\partial \tau} - r_2^{\pm 0}(\tau, \tau) r_2^{\pm 0}(x, \tau), \\ \frac{\partial r_1^{\pm p}(x, \tau)}{\partial \tau} &= r_1^{\pm p}(\tau, \tau) r_2^{\pm 0}(x, \tau), \quad p=0, 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Вполне аналогично можно получить дифференциальные соотношения для функций  $R_q^{\pm p}(\tau, t)$ , ( $p=0, 1$ ), ( $q=1, 2$ )

$$\frac{\partial^2 R^{\pm 0}(\tau, t)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 R^{\mp 0}(\tau, t)}{\partial t^2} = R_2^{\pm 0}(\tau, t) \cdot \left[ \frac{\partial R_2^{\pm 0}(\tau, s)}{\partial \tau} \Big|_{s=\tau} + \right.$$

$$+ \frac{\partial R_2^{\pm 0}(\tau, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial R_2^{\mp 0}(\tau, s)}{\partial s} \Big|_{s=\tau} \Big] + \left[ \frac{\partial R_2^{\mp 0}(\tau, t)}{\partial \tau} - R_2^{\pm 0}(\tau, t) \cdot R_2^{\pm 0}(\tau, \tau) \right] \times$$

$$\times [R_2^{\pm 0}(\tau, \tau) - R_2^{\mp 0}(\tau, \tau)] + R_1^{\pm 1}(\tau, t) \cdot R_2^{\pm 0}(\tau, 0) - R_1^{\pm 0}(\tau, t) \cdot$$

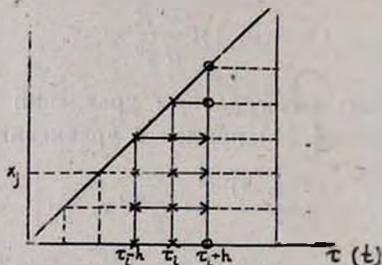
$$\frac{\partial R_2^{\mp 0}(\tau, s)}{\partial s} \Big|_{s=0},$$

$$\frac{\partial R_1^{\pm p}(\tau, t)}{\partial \tau} = R_1^{\pm p}(\tau, \tau) \cdot R_2^{\pm 0}(\tau, t) \quad (p = 0, 1).$$

## § 2. Приближенное нахождение значений резольвентного ядра на границе

Построим на основе формул (6), (7), (8) рекуррентный алгоритм нахождения функций (5).

На плоскости  $(\tau, x)$  разобьём треугольник  $0 \leq x \leq \tau \leq T$  прямыми  $\tau_i = ih$ ,  $x_j = jh$ ;  $0 \leq j \leq i \leq N$ ,  $h = T/N$ . Значение функций (5) определим на сетке



Пусть для некоторого  $i < N$  известны значения функций  $r_q^{\pm p}$ ,  $q = 1, 2$ ;  $p = 0, 1$  в узлах сетки с координатами  $(x, \tau)$ ,  $x \leq \tau \leq \tau_i$ . В уравнениях (6), (7) заменяя производные разностными отношениями, получим рекуррентные формулы для вычисления значений искомых функций в „столбце“  $\tau = \tau_i + h$  при  $x = x_j$ ;  $1 \leq j \leq i - 2$

$$r_2^{\pm 0}(x_j, \tau_i + h) = 2r_2^{\pm 0}(x_j, \tau_i) - r_2^{\pm 0}(x_j, \tau_i - h) + r_2^{\mp 0}(x_j + h, \tau_i) -$$

$$- 2r_2^{\mp 0}(x_j, \tau_i) + r_2^{\mp 0}(x_j - h, \tau_i) + 2h \cdot [r_2^{\pm 0}(x_j, \tau_i) \cdot [3r_2^{\pm 0}(\tau_i, \tau_i) -$$

$$- r_2^{\pm 0}(\tau_i, \tau_i + h) - r_2^{\pm 0}(\tau_i - h, \tau_i - h) - r_2^{\mp 0}(\tau_i - h, \tau_i)] - [r_2^{\pm 0}(x_j, \tau_i - h) +$$

$$+ h r_2^{\pm 0}(x_j, \tau_i) \cdot r_2^{\pm 0}(\tau_i, \tau_i)] \cdot [r_2^{\pm 0}(\tau_i, \tau_i) - r_2^{\mp 0}(\tau_i, \tau_i)] -$$

$$- 2h r_1^{\pm 0}(x_j, \tau_i) \cdot [r_2^{\mp 0}(h, \tau_i) - r_2^{\mp 0}(0, \tau_i)] +$$

$$+ 2h^2 r_1^{\pm 1}(x_j, \tau_i) \cdot r_2^{\mp 0}(0, \tau_i); \quad (9)$$

$$r_1^{\pm 1}(x_j, \tau_i + h) = r_1^{\pm 1}(x_j, \tau_i) + h r_1^{\pm 1}(\tau_i, \tau_i) \cdot r_2^{\pm 0}(x_j, \tau_i), \quad (10)$$

$$r_1^{\pm 0}(x_j, \tau_i + h) = r_1^{\pm 0}(x_j, \tau_i) + h r_1^{\pm 0}(\tau_i, \tau_i) \cdot r_2^{\pm 0}(x_j, \tau_i).$$

Значения искомым функций в узлах  $(0, \tau_i + h)$ ,  $(\tau_i, \tau_i + h)$ ,  $(\tau_i + h, \tau_i + h)$  (на рис. 1 они отмечены кружками), можно получить, например, из формул

$$\tau_{\frac{1}{2}}^{\pm 0}(\tau_i, \tau_i + h) = K^{\pm}(\tau_i, \tau_i + h) + \sum_{s=1}^i K^{\pm}(\tau_i, sh) \cdot r_{\frac{1}{2}}^{\pm 0}(sh, \tau_i + h). \quad (11)$$

Нетрудно получить аналогичные рекуррентные формулы для функций  $R_q^p$ . Не выписывая этих формул, присвоим им номера (9'), (10'), (11'). Конечным шагом рекуррентного процесса по  $\tau$  является вычисление значений функций  $r_q^p$  и  $R_q^p$  при  $\tau = Nh = T$ , т. е. приближенных значений резольвентного ядра  $R$  и её производных на границе квадрата  $0 \leq x, t \leq T$ .

Таким образом, этот вычислительный процесс можно представить инструкциями следующего алгоритма:

а) при  $i=h$  и  $i=2h$  с помощью формул типа (11) и (11') вычислить значения функций  $r_q^p$ ,  $R_q^p$ .

Дальше действуем рекуррентно:

б) по формулам (9), (10), (9'), (10') вычислить значения функций  $r_q^p$  и  $R_q^p$  в очередном столбце при  $\tau = \tau_i + h$  на основе данных при  $\tau \leq \tau_i$ ;

в) по формулам типа (11), (11') вычислить значения искомым функций в «приграничных» узлах;

г) при  $i=Nh$  завершить вычисления.

Сложность этого алгоритма (с учетом всех аддитивных и мультипликативных операций) равна  $4(15N^2 - 64N + 100)$ . При этом требуется  $N^2$  ячеек памяти.

### § 3. Приближенное решение интегрального уравнения и восстановление резольвентного ядра

Рассмотрим уравнение

$$y(x) - \int_0^x K^+(x, s) y(s) ds = f(x). \quad (12)$$

Поставим вопрос приближенного вычисления решения этого уравнения при  $\tau=T$ .

Обозначив решение (12) через  $y(x, \tau)$  и дифференцируя (12) по  $\tau$  придем к соотношению

$$\frac{\partial y(x, \tau)}{\partial \tau} = r_{\frac{1}{2}}^{+0}(x, \tau) \cdot y(\tau, \tau). \quad (13)$$

Дискретизируя (12) и (13) на сетке (рис. 1) получим рекуррентные соотношения для вычисления  $y(x_j) = y(x_j, T)$

$$y(x_j, \tau_i + h) = y(x_j, \tau_i) + h r_{\frac{1}{2}}^{+0}(x_j, \tau_i) y(\tau_i, \tau_i), \quad (14)$$

$$y(\tau_i + h, \tau_i + h) = f(\tau_i + h) + h \sum_{k=0}^i K^+(\tau_i + h, kh) y(kh, \tau_i + h).$$

Значения функции  $r_2^{+0}(x, \tau)$  в узлах сетки вычисляются по формулам (9)—(11). Нетрудно посчитать что алгоритм приближенного нахождения  $y(x, T)$  на данной сетке по формулам (9)—(11) и (14) имеет сложность  $2(16N^2 - 62N + 100)$ .

Для резольвентного ядра  $R$  в работе [3] получено дифференциальное соотношение

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (R^+ \mp R^-) = F^+(x, t) \pm F^-(x, t), \quad (15)$$

где  $F^\pm(x, t) = r_2^{\mp 1}(x, T) \cdot R_2^{\pm 0}(T, t) - r_2^{\mp 0}(x, T) \cdot R_2^{\pm 1}(T, t) - r_1^{\mp 1}(x, T) \cdot R_1^{\pm}(T, t) + r_1^{\mp}(x, T) \cdot R_1^{\pm 1}(T, t)$ .

Дискретизацию уравнения (15) проведем в квадрате  $0 \leq x, t \leq T$  на плоскости  $(t, x)$  (см. рис. 1), прямыми  $x_m = mh$ ,  $t_n = nh$ ,  $0 \leq m, n \leq N$ , с учётом уже приближённо вычисленной в § 2 её правой части

$$R^\pm(x_m, t_n + h) = 2[2R^\pm(x_m, t_n) - R^\pm(x_m, t_n - h)] + \\ + R^\pm(x_m + h, t_n) - R^\pm(x_m - h, t_n) + 2h^2 F^\pm(x_m, t_n). \quad (16)$$

Шаблон, соответствующий постолбцовому вычислению значений  $R(x_m, t_n)$  на основе этой формулы, показан в пунктирной части рис. 1. Сложность данного алгоритма приближенного восстановления  $R(x, t)$  на сетке рис. 1 равна  $28(N-2)^2$ .

#### § 4. Распараллеливание алгоритмов

В связи с увеличением производства ЭВМ параллельной архитектуры возникает необходимость построения алгоритмов с параллельным счетом (см. [1]). Это позволяет значительно сократить время счета. Пусть в нашем распоряжении есть  $p$  идентичных процессоров. Сделаем дополнительное допущение, что все процессоры могут одновременно обращаться к памяти, а каналы передачи информации действуют с бесконечной скоростью. Дадим определение коэффициента повышения быстродействия, (т. е. введем некоторую меру эффективности). Пусть  $\Omega$ —общая сложность алгоритма,  $t$ —время, затрачиваемое процессором на выполнение одной (мультипликативной или аддитивной) операции. Тогда время, необходимое для реализации алгоритма на однопроцессорной ЭВМ, равно  $T_1 = \Omega t$ . Если  $T_p$ —время обчета того же алгоритма на параллельной ЭВМ с  $p$  процессорами, то за величину коэффициента повышения быстродействия примем  $K_p = T_1/p \cdot T_p$  ( $0 < K_p \leq 1$ ). Чем ближе  $K_p$  к единице, тем, очевидно, эффективней распараллеливание.

Здесь рассмотрим реализацию на параллельной ЭВМ алгоритма восстановления резольвентного ядра  $R$ . Учитывая, что формула типа (9) примерно в 6 раз сложнее формулы типа (10), а формула типа (16) в 7 раз сложнее формулы (10), и воспользуясь полной независимостью формул (9)—(11) для вычисления  $r_q^p$  и формул (9')—(11') для вычисления  $R$ , распределим процессоры следующим образом: 8—для формул (10), 24—для формул (9), 14—для формул (16). Тогда  $p = 46$ ,  $K_p = \frac{2(11N^2 - 46N + 64)}{23N(N+2)}$ . При  $N \rightarrow \infty$ ,  $K_p = \frac{22}{23}$ .

Таким образом, время обьчета алгоритма сокращается примерно в 40 раз.

При абстрактном подходе возможно полная векторизация, — распараллеливание при  $p = O(N)$ , — поскольку оказывается, что выполнены все условия  $T$ -алгоритма (см. [6], § 12).

Что же касается памяти, то нетрудно видеть, что для реализации этого алгоритма требуется  $18N$  ячеек оперативной памяти и  $N^2$  ячеек дополнительной памяти для записи итоговой матрицы.

В заключение заметим, что предлагаемые алгоритмы очень удобны для реализации на ЭВМ конвейерного типа (см. [1]).

Кироваканский филиал  
ЕрПИ

Поступила 5. V. 1988

### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Валях. Последовательно-параллельные вычисления, М., «Мир», 1985.
2. А. А. Папоян. Обращение операторов с разностно-суммарно-гармоническим ядром. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ. мат. наук, Ереван, 1986.
3. А. А. Папоян. Об интегральном операторе с разностно-суммарно-гармоническим ядром, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XX, № 4, 1985, 307—317.
4. А. Б. Нерсисян. Структура резольвент некоторых интегральных операторов, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XVII, № 6, 1982, 442—463.
5. А. Б. Нерсисян. О структуре резольвент некоторых дифференциальных операторов с ядрами, определенными дифференциальными уравнениями, ДАН СССР, 279, № 4, 1984, 805—809.
6. В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами, М., «Наука», 1987.