ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIV, № 3, 1989 Математика

УДК 517.95

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

П. З. МКРТЫЧЯН

ОЦЕНКА ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЯ И КЛАССИЧЕСКАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕРАВНОМЕРНО ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

0. Введение

Пусть Ω — ограниченная область в R^2, $Q=\Omega\times(0, T]$, $\partial\Omega$ — граница области Ω, Γ — параболическая граница цилиндра Q, т. е. $\Gamma=(\partial\Omega\times[0, T])\cup(\Omega\times\{t=0\})$, $\overline{Q}=Q\cup\Gamma$.

Рассмотрим в цилиндре Q задачу

$$\begin{cases} u_t-\sum\limits_{i=1}^{2}\dfrac{\partial}{\partial x_i}a_i(u, u_{x_i})=f(x, t, u, u_x), \\ u|_\Gamma=\psi(x, t), \end{cases} \tag{0.1}$$

где $x=(x_1, x_2)\in\Omega$, $t\in[0, T]$, $u_x=(u_{x_1}, u_{x_2})$,

$$a_i(u, p_i)=\nu p_i+a(u)|p_i|^{m-2}p_i, \tag{0.2}$$

$\nu=\text{const}>0$, $m\geqslant 3$,

$$\psi(x, t)>0, \tag{0.3}$$

функция $f(x, t, u, p)$, где $p=(p_1, p_2)$ для всех $(x, t, u, p)\in\overline{Q}\times\times\{|u|\leqslant M\}\times R^2$, а $M=\text{const}>0$, непрерывно дифференцируема по x, t, u, p и удовлетворяет неравенствам

$$\begin{gathered} |f|+\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|+\sum_{k=1}^{2}\left|\frac{\partial f}{\partial p_k}p_k\right|\leqslant c_1(1+|p|^{\overline{m}}), \\ \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|\leqslant c_1(1+|p|^{\overline{m}+1}),\ k=1, 2, \end{gathered} \tag{0.4}$$

где $c_1=\text{const}>0$, $0<\overline{m}<m$.

Относительно функции $a(u)$ из (0.2) будем предполагать, что $a>\delta>0$, дважды непрерывно дифференцируема на множестве $\{|u|\leqslant M\}$ и для всех $u\in[0, M]$ удовлетворяет неравенству

$$q(u)\equiv(m-2)\left(\frac{a'}{a}\right)'-\frac{a'^2}{a^2}\geqslant-\frac{\sigma(m-1)^2}{(\delta_1+u)^2}, \tag{0.5}$$

где $\sigma<1$, $\delta_1>0$.

В частности, легко проверить, что функция

$$a(u)=(\delta^{\alpha/l}+|u|^{\alpha})^{l/\alpha}, \tag{0.6}$$

где $\alpha>1$, $l>0$, удовлетворяет условию (0.5) с.

$$\sigma=l(l+m-2)/(m-1)^2,\ \delta_1=\delta^{\alpha/l}/M^{\alpha-1},\ \text{если}$$
$$l(l+m-2)<(m-1)^2. \tag{0.7}$$

Всюду ниже будем предполагать выполненными условия (0.2)—(0.5).

Основным результатом настоящей работы является оценка $\max\limits_{(x,t)\in\bar{Q}}|u_x|$ через $M=\max\limits_{(x,t)\in\bar{Q}} u$ и $M_1=\max\limits_{(x,t)\in\Gamma}|u_x|$, полученная для неотрицательного решения u задачи (0.1) в предположении некоторой гладкости u, ψ, f и $\partial\Omega$ (теорема 1). После получения этой оценки разрешимость задачи (0.1) в гёльдеровских пространствах устанавливается стандартными рассуждениями (теорема 2).

Особенностью уравнения (0.1) является то, что для него не выполнены так называемые условия ослабленного вхождения аргумента u в функции, составляющие уравнения (малость ε в (3.5) и (3.6), гл. VI [1], малость σ_1, σ_2, σ_3 в (3.2), (3.15), (3.16), гл. 2 [2]), при которых в [1, 2] получены оценки градиента решения для широких классов равномерно и неравномерно параболических уравнений общего вида. Рассматривать же уравнение (0.1) как недивергентное приходится из-за того, что в теории дивергентных параболических уравнений (см. [1], гл. V) оценка градиента получена для уравнений, главная часть которых имеет первую степень роста по градиенту, тогда как в (0.1) функция a_i имеет по p_i степень роста $m-1\geqslant 2$.

В работе [3] отдельно рассмотрены уравнения (квазилинейные неравномерно параболические) с двумя пространственными переменными. Однако, уравнение (0.1) не удовлетворяет условиям этой работы, при которых получена оценка градиента решения.

В последние годы, применяя новую методику получения оценок гёльдеровских норм, О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой были сняты упомянутые условия ослабленного вхождения аргумента u для всего класса равномерно эллиптических уравнений общего вида, а также для равномерно параболических уравнений общего вида, коэффициенты главной части которых ограничены по градиенту (см., напр., [4—6]). Однако, для параболических уравнений с растущими по градиенту коэффициентами главной части (тем более неравномерных) вопрос пока остается открытым. Вот почему выделение пусть узких классов таких уравнений, или даже отдельных уравнений, для которых удается получить оценку градиента решения, думается, представляет определенный интерес.

Кроме того, уравнения типа (0.1) приходится рассматривать в качестве регуляризаций при изучении уравнения нестационарной фильтрации: уравнения (0.1), в котором $a_i(u, p_i)=u^l|p_i|^{m-2}p_i$.

Что касается неравномерности уравнения (0.1), то она в данном случае не «мешает», а «помогает». Говоря точнее «помогает» то обстоятельство, что функция a_i зависит только от u, p_i и не зависит от p_k, $k\not\equiv i$.

Поэтому приводимое доказательство не удается применить, например, к уравнению

$$u_t - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu u_{x_i} + a(u)|u_x|^{m-2} u_{x_i}) = 0,$$

которое является равномерно параболическим, т. е. доказательство слишком сильно привязано к структуре уравнения (0.1).

Кроме того нужно отметить, что условие (0.5), или условие (0.7) при a, определенном (0.6), тоже, по сути дела, являются условиями ослабленного вхождения аргумента u.

1. Оценка максимума модуля градиента решения

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (0.2)—(0.5), $a \geqslant \delta > 0$; *пусть* $u(x, t)$ — *неотрицательное решение задачи* (0.1) *такое, что*

$$u,\ u_{x_i} \in C(\overline{Q}),\ u_t,\ u_{x_i t},\ u_{x_i x_i x_k} \in C(Q),\ i, k = 1, 2;$$

граница $\partial\Omega$ *области* Ω *трижды непрерывно дифференцируема; функция* ψ *такова, что* $\psi, \psi_t, \psi_{x_i}, \psi_{x_i x_k}, \psi_{x_i x_i x_k} \in C(\overline{Q}), i, k = 1, 2.$ *Тогда для* u *справедлива оценка*

$$\max_{(x, t) \in \overline{Q}} |u_x| \leqslant M_2, \tag{1.1}$$

где M_2 *зависит только от* $M = \max\limits_{(x, t) \in \overline{Q}} u$, $M_1 = \max\limits_{(x, t) \in \Gamma} |u_x|$, $\nu, \delta, \sigma, \delta_1, m, \overline{m}, c_1$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что для задачи (0.1) и решения u выполнены все условия, при которых в [2] (см. гл. 2, § 2) получена оценка $\max\limits_{(x, t) \in \Gamma} |u_x|$. Поэтому можно считать константу M известной и зависящей только от M, ν, δ, m, $\overline{m}$, c_1 и конфигурации области Ω, если известна константа M.

Запишем уравнение (0.1) в виде

$$u_t - \frac{\partial a_i}{\partial p_i} u_{x_i x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial u} u_{x_i} = f. \tag{1.2}$$

Здесь и всюду ниже, если не оговорено особо, по повторяющимся индексам производится суммирование.

Введем обозначения

$$v = |u_{x_1}|^m + |u_{x_2}|^m,\ w = \varphi(u) v,$$

где $\varphi(u)$ — положительная, определенная на интервале $[0, M]$, дважды непрерывно дифференцируемая функция, которая будет определена ниже.

Применив к обеим частям (1.2) оператор $m\varphi |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k} \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, получим:

$$w_t - \frac{\partial a_i}{\partial p_i} w_{x_i x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial u} w_{x_i} + m(m-1)\varphi \frac{\partial a_i}{\partial p_i} |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_i x_k}^2 +$$

$$+2\varphi' v_{x_l}\frac{\partial a_i}{\partial p_l}u_{x_l}+\varphi'' v\frac{\partial a_i}{\partial p_l}u_{x_l}^2-\frac{\partial^2 a_l}{\partial p_l^2}u_{x_lx_l}\varphi v_{x_l}-$$

$$-mw\frac{\partial^2 a_l}{\partial p_l\partial u}u_{x_lx_l}-mw\frac{\partial^2 a_l}{\partial u^2}u_{x_l}-\frac{\partial^2 a_l}{\partial p_l\partial u}u_{x_l}\varphi v_{x_l}=$$

$$=f\varphi' v+m\varphi\frac{\partial f}{\partial x_k}|u_{x_k}|^{m-2}u_{x_k}+mw\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial p_l}\varphi v_{x_l}. \tag{1.3}$$

Пусть (x_0, t_0) — точка максимума функции w, лежащая внутри цилиндра Q. Будем рассматривать (1.3) в точке (x_0, t_0). Очевидно, $w_t \geqslant 0$, $-w_{x_lx_l}\geqslant 0$, $w_{x_l}=0$.

Сначала предположим, что $u_{x_1}(x_0, t_0)\neq 0$, $u_{x_2}(x_0, t_0)\neq 0$. Тогда из условий $w_{x_i}=\varphi v_{x_i}+\varphi' v u_{x_i}=0$, $i=1, 2$ определим

$$u_{x_lx_l}=-\left(\frac{1}{m}\frac{\varphi'}{\varphi}u_{x_l}v+|u_{x_k}|^{m-2}u_{x_k}u_{x_1x_2}\right)\left(|u_{x_l}|^{m-2}u_{x_l}\right)^{-1},\quad k\neq i \tag{1.4}$$

(здесь по i и k не производится суммирования).

Отбрасывая в (1.3) первые три неотрицательных члена и исключая с помощью (1.4) $u_{x_1x_1}$, $u_{x_2x_2}$, учитывая конкретный вид функции a, вводя обозначения $\xi=\dfrac{u_{x_1x_2}}{u_{x_1}u_{x_2}}$, $y=\dfrac{\varphi'}{\varphi}$, получим

$$\frac{m-1}{m}\nu w\sum_{i=1}^{2}\frac{v-|u_{x_i}|^m}{|u_{x_i}|^{m-2}}(m\xi+y)^2+\nu w\left(y'-\frac{1}{m}y^2\right)\sum_{i=1}^{2}u_{x_i}^2+$$

$$+(m-1)avw\left\{m(m-1)\xi^2+m\left(y+\frac{a'}{a}\right)\xi+\varkappa_1(u)\right\}<F, \tag{1.5}$$

$$F\equiv fyw+m\varphi\frac{\partial f}{\partial x_k}|u_{x_k}|^{m-2}u_{x_k}+mw\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial p_k}u_{x_k}wy,$$

где $\varkappa_1(u)=y'-\dfrac{m-2}{m}y^2+3\dfrac{a'}{a}y-\dfrac{m}{m-1}\dfrac{a''}{a}$. Из (1.5) следует неравенство

$$\nu w\left(y'-\frac{1}{m}y^2\right)\sum_{i=1}^{2}u_{x_i}^2+(m-1)avw\varkappa_2<F, \tag{1.6}$$

где

$$\varkappa_2=\varkappa_1-\frac{m}{4(m-1)}\left(y+\frac{a'}{a}\right)^2=y'-\lambda_1 y^2+2\lambda_2\frac{a'}{a}y-$$

$$-\frac{m}{m-1}\left(\frac{a''}{a}+\frac{1}{4}\frac{a'^2}{a^2}\right),\quad \lambda_1=\frac{m-1}{m}\left(1+\frac{1}{4}\frac{(m-2)^2}{(m-1)^2}\right),\quad \lambda_2=1+\frac{1}{4}\frac{m-2}{m-1}.$$

Подберем y таким образом, чтобы для любого $u\in[0, M]$, $\varkappa_2>0$. Тогда из (1.6) в силу условий (0.4) очевидным образом будет следовать оценка для w в точке (x_0, t_0). Положим $\hat{y}=\lambda_1 y-\lambda_2\dfrac{a'}{a}$. Тогда $\varkappa_2=\dfrac{1}{\lambda_1}\left(\hat{y}'-\hat{y}^2+\dfrac{q(u)}{4(m-1)^2}\right)$, где функция q определена (0.5). В силу (0.5)

$$\varkappa_2 > \frac{1}{\lambda_1}\left(\hat{y}' - \hat{y}^2 - \frac{\sigma}{4(\delta_1+u)^2}\right).$$

Положив $\hat{y} = -1/2(\delta_1+u)$, получим: $\varkappa_2 > \dfrac{1-\sigma}{4\lambda_1(\delta_1+u)^2}$,

$$y = \frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{1}{2\lambda_1(\delta_1+u)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{a'}{a}, \quad \varphi = \frac{a^{\lambda_2/\lambda_1}}{(\delta_1+u)^{1/2\lambda_1}}.$$

Пусть теперь в точке (x_0, t_0) $u_{x_1}=0$ (аналогично рассматривается случай $u_{x_2}=0$). Тогда из условий $w_{x_i}=0$, $i=1, 2$, получим, что $u_{x_1x_2}=0$, $u_{x_2x_2} = -\dfrac{1}{m} y u_{x_2}^2$.

Воспользовавшись этими сотношениями, из (1.3) получим

$$\nu\left(y' - \frac{1}{m}y^2\right) w u_{x_2}^2 + (m-1)\, a\nu w\, \varkappa_3 \leqslant F, \tag{1.7}$$

где $\varkappa_3 = y' - \dfrac{m-1}{m}y^2 + 2\dfrac{a'}{a}y - \dfrac{m}{m-1}\dfrac{a''}{a}$. Поскольку

$$\varkappa_3 - \varkappa_2 = \frac{1}{4m(m-1)}\left[(m-2)y - m\frac{a'}{a}\right]^2 \geqslant 0, \text{ то } \varkappa_3 \geqslant \varkappa_2 > 0.$$

Тогда из (1.7) в силу условий (0.4) следует оценка для w в точке (x_0, t_0). Из оценок для w на Γ и в точке (x_0, t_0) следует оценка для w во всем цилиндре Q, откуда, в свою очередь, следует оценка (1.1). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Общая схема доказательства теоремы 1 во многом сходна с доказательствами соответствующих теорем [2, 3]. Но если к уравнению (0.1) применить оператор $\varphi u_{x_k}\dfrac{\partial}{\partial x_k}$, как это делается в [2, 3], и рассматривать полученное уравнение в точке максимума функции $w = \varphi(u)(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)$, то дифференциальное неравенство для φ, соответствующее неравенству $\varkappa_2 > 0$, оказывается неразрешимым.

2. Неотрицательность и оценка максимума решения

Пусть $u(x, t)$ — классическое решение задачи (0.1). Покажем, что если

$$f(x, t, u, 0) \geqslant 0, \ (x, t, u) \in Q \times \{u < 0\}, \tag{2.1}$$

то $u(x, t) \geqslant 0$. Действительно, применяя принцип максимума, рассмотрим уравнение (0.1) в точке $(x_0, t_0) \in Q$ минимума функции $\tilde{u} = ue^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$. Тогда получим $\lambda e^{\lambda t}\tilde{u}(x_0, t_0) \geqslant f(x_0, t_0, u, 0)$. Из этого неравенства и условия (0.3) следует неотрицательность u.

Приведем теперь условие на функцию f, обеспечивающее оценку $\max\limits_{(x,t)\in\bar{Q}} u$ через известные величины (см. теорему 2.9, гл. 1, [1]):

$$uf(x, t, u, 0) \leqslant u\Phi(u) + b, \ (x, t, u) \in Q \times [0, \infty), \tag{2.2}$$

где $b > 0$, $\Phi(\tau)$ — неубывающая положительная функция $\tau \geqslant 0$ такая, что

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{\Phi(\tau)} = \infty.$$

Можно привести и ряд других условий, обеспечивающих оценку $\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}} u$.

3. Разрешимость в пространствах Гёльдера

Пусть $C^\alpha(\overline{Q})$, $\alpha\in(0,1)$ — множество всех функций $u(x, t)$, удовлетворяющих неравенству

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}} |u| + \max_{(x,t),(x',t')\in\overline{Q}} \frac{|u(x,t)-u(x',t')|}{(|x-x'|^\alpha+|t-t'|)^{\alpha/2}} \leqslant K, \; K=\mathrm{const}\geqslant 0.$$

Через $C^{2+\alpha}(\overline{Q})$, $\alpha\in(0,1)$ обозначим множество всех функций u, для которых u, u_{x_i}, $u_{x_ix_j}$, $u_t\in C^\alpha(\overline{Q})$, $i, j=1, 2$.

Граница $\partial\Omega$ области Ω называется принадлежащей классу $C^{2+\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$, если для любой точки $\partial\Omega$ найдется такая окрестность ω, что часть $\partial\Omega\cap\omega$ представима в виде $x_k=\varphi(x_i)$, $i\neq k$, причем φ, φ_{x_i}, $\varphi_{x_ix_i}\in C^\alpha(\overline{\omega}_i)$, где ω_i — проекция окрестности ω на прямую $x_k=0$, а $C^\alpha(\overline{\omega}_i)$ — множество всех функций $u(x_i)$, удовлетворяющих условию

$$\max_{x_i\in\overline{\omega}_i} |u(x_i)| + \max_{x_i, x_i'\in\overline{\omega}_i} \frac{|u(x_i)-u(x_i')|}{|x_i-x_i'|^\alpha} \leqslant K, \; K=\mathrm{const}\geqslant 0.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (0.2)—(0.5), (2.1), (2.2) *и пусть* $\partial\Omega\in C^{2+\gamma}$, $\psi\in C^{2+\gamma}(\overline{Q})$, $\gamma\in(0,1)$, $\alpha\geqslant\delta>0$, ψ *на* $\partial\Omega\times\{t=0\}$ *удовлетворяет условию*

$$\psi_t-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(\psi, \psi_{x_i})=f\;(x, 0, \psi, \psi_x).$$

Тогда задача (0.1) *имеет хотя бы одно решение* u, *причем* $u\geqslant 0$, $u\in C^{2+\alpha}(\overline{Q})$ *с некоторым* $\alpha\in(0,1)$.

Теорема 2 доказывается с применением принципа Лере—Шаудера и теоремы 1 совершенно так же, как, скажем, доказываются теоремы § 4, гл. 2 [2]. Укажем лишь, что в качестве однопараметрического семейства линейных задач следует взять

$$v_t-\frac{\partial a_i(u, u_{x_i})}{\partial p_i}\,v_{x_ix_i}-\frac{\partial a_i(u, u_{x_i})}{\partial u}\,v_{x_i}=\tau f(x, t, u, u_x),$$

$$v|_\Gamma=\tau\psi, \; \tau\in[0,1].$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 12. III. 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., «Наука», 1967, 736 с.

2. *А. В. Иванов.* Квазилинейные вырождающиеся и неравномерно эллиптические и параболические уравнения второго порядка. Труды МИАН, т. CLX, Л., «Наука», 1982, 285 с.
3. *D. E. Edmund, L. A. Peletier.* Quasilinear parabolic equations. Ann. Scuola norm sup. Pisa, Ser. 3, 1971, v. 25, 397—421.
4. *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева.* Оценка гёльдеровской нормы решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка общего вида. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1980, т. 96, 161—168.
5. *O. A. Ladizhenskay, N. N. Ural'ceva.* Estimates of Hölder constants for bounded solutions of second order quasilinear parabolic equations of nondivergent form. LOMI preprints, E—11—81, L., 1981, 35 p.
6. *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева.* Об оценках $\max|u_x|$ для решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений общего вида и теоремах существования. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1984, 138, 90—107.