ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIV, № 3, 1989 Математика

УДК 517.547

И. В. КОВАЛИШИНА, В. П. ПОТАПОВ

МЕТОД ТРИАДЫ В ТЕОРИИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ЭРМИТОВО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В конце 60-х годов В. П. Потаповым был намечен перспективный план исследований интерполяционных задач анализа методами теории аналитических J-растягивающих матриц-функций (J-теория).

Постановка рассматриваемых интерполяционных задач такова: задается класс функций w, определяемый одним из неравенств

$$1-w^*w \geqslant 0,\ \frac{1}{2i}(w-w^*) \geqslant 0,\ \frac{1}{2}(w+w^*) \geqslant 0$$

(то есть либо класс S сжимающих функций, либо класс N неванлинновских функций, либо класс P позитивных функций), аналитических в области G, и интерполяционные условия. Ищется функция w из класса, удовлетворяющая интерполяционным условиям.

В основе предложенного В. П. Потаповым метода исследования таких задач лежат следующие два предложения:

1. С каждой интерполяционной задачей связано основное матричное неравенство (ОМН), в котором тесно переплетаются заданные интерполяционные условия и искомая функция w.

2. Множество w решений ОМН описывается дробно-линейным преобразованием

$$w(z)=[a(z)\,\omega(z)+b(z)]\,[c(z)\,\omega(z)+d(z)]^{-1},\quad z\in G$$

произвольной функции класса $\omega(z)$, а матрица коэффициентов

$$A(z)=\begin{bmatrix} a(z) & b(z)\\ c(z) & d(z)\end{bmatrix}$$

строится по данным задачи и является объектом J-теории.

Намеченный план частично реализован В. П. Потаповым, его учениками и последователями в работах [4]—[14] и ряде других.

Особенно значителен вклад В. П. Потапова в исследование дискретной проблемы Неванлинны-Пика [6] и континуальной задачи М. Г. Крейна ([1]—[3]) о продолжении эрмитово-положительных функций [4], [5].

В настоящей работе изучается теория продолжения эрмитово-положительных функций $s(x)$, удовлетворяющих следующим требованиям:

(i) Функция $s(x)=\overline{s(-x)}$ — непрерывна на $(-a,\ a)$.

(ii) Производная $s'(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0,\ a)$.

(iii) $s'(+0)+\overline{s'(+0)}=-\lambda<0$.

Подкласс эрмитово-положительных функций со свойствами (i)—(iii) характерен тем, что резольвентная матрица $A_{\xi}(z)$, дающая описание всех продолжений функции $s(x)$ с сегмента $[-\xi, \xi] C(-a, a)$ на всю числовую ось, допускает четкое мультипликативное представление в терминах, непосредственно связанных с функцией $s(x)$.

§ 1. Основные понятия

Приведем необходимые нам в настоящей работе сведения из [4].

1. Непрерывная на $[-l, l]$ функция $s(x)$ называется эрмитово-положительной, если

$$(\mathbf{K}\varphi, \varphi) = \int_0^l \int_0^l s(x-t)\varphi(t)\overline{\varphi(x)}\, dt dx \geqslant 0, \quad \forall \varphi \in L^2[0, l],$$

где

$$\mathbf{K}\varphi = \int_0^l s(x-t)\varphi(t)\, dt.$$

2. Пусть $s(x)$ — эрмитово-положительная функция, заданная на сегменте $[-l, l]$; пусть интеграл Хинчина-Бохнера [1]—[3]

$$S(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\, d\sigma(t) \quad \left(\sigma(t)\uparrow, \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(t) < +\infty\right) \tag{1}$$

определяет какое-либо из продолжений $s(x)$ на всю ось $(-\infty, +\infty)$ и

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - z} \left(\frac{W(z) - W^*(z)}{z - \bar{z}} \geqslant 0, \ W(z) = W^*(\bar{z}), \operatorname{Im} z \neq 0\right) \tag{2}$$

— ассоциированная функция.

Привлечение понятия ассоциированной функции (2) позволяет решать задачу о представлении эрмитово-положительной функции методами теории функций комплексного переменного. Имеет место

Теорема 1.1. *Ассоциированная функция $W(z)$ продолжения $S(x)$ заданной на $[-l, l]$ эрмитово-положительной функции $s(x)$ удовлетворяет следующему матричному неравенству**

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}(\varphi, \varphi) & (e^{-izx} W(z) - M_z(x), \varphi) \\ * & \dfrac{W(z) - W^*(z)}{z - \bar{z}} \end{bmatrix} \geqslant 0, \ (\mathbf{K}).$$

$$\mathbf{M}_z(x) = i \int_0^x e^{-iz(x-u)} s(u)\, du,$$

справедливому для всех $\varphi \in L^2[0, l]$ и всех $z : \operatorname{Im} z \neq 0$.

---

* Символом * обозначен элемент a_{21}, сопряженный a_{12}.

Теорема 1.1 естественно дополняется обратным утверждением:

Теорема 2.1. *Если голоморфная в верхней полуплоскости функция $W(z)$ удовлетворяет матричному неравенству $(OMH\,\mathbf{K})$, она представима в виде*

$$W(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{t-z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}d\sigma(t)<\infty\right)$$

и соответствующий интеграл Хинчина-Бохнера (1)

$$S(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}d\sigma(t)$$

совпадает на $[-l, l]$ с заданной эрмитово-положительной функцией $s(x)$.

Кроме того, доставляемое интегралом распространение по симметрии функции $W(z)$ в нижнюю полуплоскость также удовлетворяет $OMH\,(\mathbf{K})$.

Теоремы 1.1 и 2.1 свидетельствуют о том, что вся информация задачи об интегральном представлении эрмитово-положительной функции содержится в неравенстве $(\mathbf{K})$.

Используя аппроксимацию $OMH\,(\mathbf{K})$ основным матричным неравенством дискретного аналога-задачи Каратеодори, в [4] доказано, что $OMH\,(\mathbf{K})$ всегда имеет решение.

3. Здесь мы будем широко использовать обозначения главы IV [4]. Пусть $\varphi_j(x)$ — собственные функции, $\lambda_j>0$ — фундаментальные числа строго положительного оператора

$$\mathbf{K}f=\int_0^l s(x-t)f(t)\,dt,$$

порожденного непрерывной эрмитово-положительной на $[-l, l]$ функцией $s(x)$, действующего в пространстве $\mathbf{H}=L^2[0, l]$. По известной теореме Мерсера

$$s(x-t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(t)}}{\lambda_j}.$$

Ставя каждой функции $g\in\mathbf{H}=L^2[0, l]$ в соответствие последовательность $\{b_j\}$ ее коэффициентов Фурье $b_j=(g, \varphi_j)(j=1, 2,\cdots)$, рассмотрим функции

$$\|g\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|^2<\infty,\ b_j=(g, \varphi_j),\ g\in\mathbf{H},$$

$$\|f\|_+^2=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j|a_j|^2<\infty,\ a_j=(f, \varphi_j),\ f\in\mathbf{H}_+. \qquad (3)$$

Наконец, пополним пространство $\mathbf{H}=L^2[0, l]$ формальными рядами

$$h(x)\sim\sum_{j=1}^{\infty}c_j\varphi_j(x)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|c_j|^2}{\lambda_j}<\infty\right) \qquad (4)$$

и доопределим оператор $\mathbf{K}$ на новых объектах равенством

$$\mathbf{K}h=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{\lambda_j}\varphi_j(x).$$

Совокупность всех рядов вида (4) образует гильбертово пространство $\mathbf{H}_-$ с метрикой

$$(h_1,\ h_2)_-=(\mathbf{K}h_1,\ h_2),\ \|h\|_-^2=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|c_j|^2}{\lambda_j}<\infty.$$

Последовательности $C=\{c_j\}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|c_j|^2}{\lambda_j}<\infty\right)$ назовем „обобщенными" функциями.

Если множество $\mathbf{H}_+$ плотно в $C[0,\ l]$, то $\mathbf{H}_-$ содержит как все $f\in L^1[0,\ l]$, так и все функции Дирака $\delta(x-x_0)$, $x_0\in[0,\ l]$. Построенная так тройка гильбертовых пространств $\mathbf{H}_-\supseteq\mathbf{H}\supseteq\mathbf{H}_+$ называется оснащением пространства $\mathbf{H}$ по оператору $\mathbf{K}$.

4. Теорема 3.1. (Глава V[4]). *Если* $OMH(\mathbf{K})$ *имеет два решения, то все функции* e^{-izx}, $\mathbf{M}_z(x)$ *с невещественными* z *принадлежат* $\mathbf{H}_+$. $OMH(\mathbf{K})$ *имеет бесконечное множество решений и совокупность их описывается дробно-линейным преобразованием*

$$W(z)=\frac{\alpha(z,\ z_0)\,\omega(z)+\beta(z,\ z_0)}{\gamma(z,\ z_0)\,\omega(z)+\delta(z,\ z_0)},$$

где z_0 — *произвольная фиксированная невещественная точка,* $\omega(z)$ — *произвольная функция класса* $N\left(N:\ \frac{\omega(z)-\omega^*(z)}{z-\bar z}>0,\ \forall z\neq\bar z\right)$, *и матрица коэффициентов (резольвентная матрица) имеет вид*

$$\begin{Vmatrix}\alpha(z,z_0)&\beta(z,z_0)\\ \gamma(z,z_0)&\delta(z,z_0)\end{Vmatrix}=A(z,\ z_0)=T(z,\ z_0)\,M_0=[I+H(z,\ z_0)\ J]\ M_0,$$

где

$$H(z,z_0)=\frac{z-z_0}{i}\begin{Vmatrix}(\mathbf{K}C_{z_0},\ C_{\bar z})&(\mathbf{K}B_{z_0},\ C_{\bar z})\\ (\mathbf{K}C_{z_0},\ B_{\bar z})&(\mathbf{K}B_{z_0},\ B_{z})\end{Vmatrix},$$

$$J-M_0^{*-1}JM_0^{-1}=-JH(z_0,\ \bar z_0)\,J,$$

а B_z *и* C_z — *элементы из* $\mathbf{H}_-$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$\mathbf{K}B_z=e^{-izx},\ \mathbf{K}C_z=M_z(x),\ J=\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}.$$

Матрица-функция $A(z,z_0)$ — J-растягивающая в верхней полуплоскости, J-сжимающая в нижней полуплоскости и удовлетворяет принципу симметрии

$$A(\bar z,z_0)=JA^{*-1}(z,\ z_0)\ J.$$

5. Теорема 4.1*. *Для того чтобы непрерывная эрмитово-положительная на* $[-l,\ l]$ *функция* $s(x)$ *допускала многозначное продолжение на всю ось необходимо, чтобы функция* $e^{-izx}\mathbf{H}_+$ *для*

* Этот критерий многозначной продолжаемости эрмитово-положительной функции $s(x)$ впервые доказал М. Г. Крейн [3].

всех без исключения z, и достаточно, чтобы она принадлежала H_+ для одного какого-нибудь невещественного значения z (например для $z = i$, то есть $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |(e^x, \varphi_j)|^2 < \infty$).

Матрица-функция $A(z, z_0)$ — целая. Выбрав в качестве опорной точки z_0 точку 0, в качестве M_0 — единичную матрицу, получим

$$A(z) = A(z, 0) = I + H(z, 0) J,$$

$$H(z, 0) = \frac{z}{i} \begin{bmatrix} (C_0, \mathrm{M}_{\bar z}^-(x)) & (B_0, \mathrm{M}_{\bar z}^-(x)) \\ (C_0, e^{-i\bar z x}) & (B_0, e^{-i\bar z x}) \end{bmatrix},$$

где B_0, C_0 удовлетворяют соотношениям

$$\mathrm{K}B_0 = 1, \ \mathrm{K}C_0 = i\int_0^x s(u)\,du$$

и являются числовыми последовательностями из $l_-^2(\mathrm{H}_-)$

$$B_0 = \{\lambda_j (1, \varphi_j)\}, \ C_0 = \left\{\lambda_j \left(i\int_0^x s(u)\,du, \varphi_j\right)\right\},$$

откуда

$$H(z, 0) = \frac{z}{i} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \left(i\int_0^x s(u)\,du, \varphi_j\right)(\varphi_j, \mathrm{M}_{\bar z}^-(x)) & (1, \varphi_j)(\varphi_j, \mathrm{M}_{\bar z}^-(x)) \\ \left(i\int_0^x s(u)\,du, \varphi_j\right)(\varphi_j, e^{-i\bar z x}) & (1, \varphi_j)(\varphi_j, e^{-i\bar z x}) \end{bmatrix}.$$

6. Как всякая целая матрица-функция, обладающая J-свойствами, $A(z)$ представима в виде мультипликативного интеграла

$$A(z) = \int_0^{L} e^{-iz\Sigma(t)\,dt},$$

где $\Sigma(t) J > 0$, $\mathrm{tr}\{\Sigma(t) J\} = 1$ п. в. Однако это представление, полученное применением теорем Хелли, недостаточно конструктивно, в нем не прослеживаются связи между заданной эрмитово-положительной функцией $s(x)$ и элементами показателя $\Sigma(t)$. Четкую зависимость удается установить, накладывая дополнительные ограничения на поведение $s(x)$.

§ 2. Уравнение триады. Существование и единственность

1°. Нашей целью является изучение той ситуации, когда в условиях (i) — (iii) $s(x)$ многозначно продолжаема с заданного интервала $(-a, a)$ (т. е. с любого $[-\xi, \xi] \subset (-a, a)$) на всю ось с сохранением эрмитовой положительности.

Фиксируя $\xi\,(0<\xi<a)$, рассмотрим уравнение

$$\int_0^\xi s(x-t)\,\chi(t)\,dt = s(x) - kx - b \tag{5}$$

относительно трех неизвестных величин: функции $\chi(t)=\chi_\xi(t)\in L^1[0,\xi]$ и комплексных чисел $k=k(\xi)$, $b=b(\xi)$. Тройку величин $\{\chi_\xi(t), k(\xi), b(\xi)\}$, удовлетворяющих этому уравнению, назовем триадой.

Наряду с (5) будем рассматривать «сопряженное» уравнение

$$\int_0^\xi s(x-t)\,\overline{\chi(\xi-t)}\,dt = s(x-\xi) + \bar{k}x - (k\xi+\bar{b}); \tag{6}$$

оно получается из (5) заменой x на $\xi-x$, t на $\xi-t$ с последующим переходом к комплексно сопряженным величинам.

Введем еще величину

$$\Delta = k\bar{k}\xi + k\bar{b} + \bar{k}b,$$

являющуюся важнейшим структурным элементом нашего исследования.

Поясним отношение триады $\{\chi(t), k, b\}$, величины Δ и условий (i)—(iii) к поставленной здесь задаче о многозначном продолжении функции $s(x)$.

Пусть $s(x)$ многозначно продолжаема с сегмента $[-\xi, \xi]$, $\forall\xi$, $0<\xi<a$. Предположим сверх того, что

1) триада $\{\chi_\xi(t), k(\xi), b(\xi)\}$ существует, 2) $\Delta(\xi)\neq 0$.

(На деле, как будет показано в дальнейшем, 1), 2) логически вытекают из факта многозначной продолжаемости функции $s(x)$ и условий (i) — (iii)).

В силу многозначной продолжаемости $s(x)$ интегральный оператор

$$\mathbf{K}\varphi = \int_0^\xi s(x-t)\,\varphi(t)\,dt,\quad x\in[0,\xi],$$

рассматриваемый в пространстве $\mathrm{H}=L^2[0,\xi]$ строго положителен

$$(\mathbf{K}\varphi, \varphi)>0,\ \forall\varphi:(\varphi,\varphi)>0;$$

пусть $\mathrm{H}_-\supseteq\mathrm{H}\supseteq\mathrm{H}_+$ — построенное по $\mathbf{K}$ оснащение H.

По теореме 4.1 [4], $e^{-izx}\in\mathrm{H}_+$ для всех комплексных z, и так как функции e^{-izx} плотны в $C[0,\xi]$, то пространство H_- содержит $L^1[0,\xi]$ и совокупность функций Дирака $\delta_{x_0}=\delta(x-x_0)$ с $x_0\in[0,\xi]$. Легко проверяется

Теорема 1.2. *В сделанных выше предположениях, обобщенные функции*

$$B=\frac{\bar{k}}{\Delta}\delta_0+\frac{k}{\Delta}\delta_\xi-\frac{\bar{k}}{\Delta}f(x)-\frac{k}{\Delta}\overline{\chi(\xi_1-x)}, \tag{B}$$

$$\mathrm{L}=i\frac{\bar{k}\xi+\bar{b}}{\Delta}\delta_0-i\frac{b}{\Delta}\delta_\xi-i\frac{\bar{k}\xi+\bar{b}}{\Delta}\chi(x)+\frac{ib}{\Delta}\overline{\chi(\xi-x)}, \tag{L}$$

$$C = \frac{1}{(B, 1)} \{L + (B, M) B - A^*B\} \tag{C}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\mathrm{K}B = 1; \ \mathrm{KL} = ix, \ \mathrm{K}C = \mathrm{M}(x) \ \left(\mathrm{M}(x) = i \int_0^x s(u)\, du\right).$$

Здесь A — оператор интегрирования:

$$\mathrm{A} f = i \int_0^x f(t)\, dt, \ \mathrm{A}^* f = -i \int_x^\xi f(t)\, dt,$$

а

$$\mathrm{A}^* B = -\frac{ik}{\Delta} + i \int_x^\xi \left[\frac{\overline{k}}{\Delta} \chi(t) + \frac{k}{\Delta} \overline{\chi(\xi - t)} \right] dt.$$

Как было показано в [4], резольвентная матрица $A(z) = A_\xi(z)$, дающая описание всех продолжений, имеет вид:

$$A(z) = A(z, 0) = T(z, 0) = I + H(z, 0)\, J =$$

$$= I + \frac{z}{i} \begin{bmatrix} (\mathrm{K}C_0, C_{\bar z}) & (\mathrm{K}B_0, C_{\bar z}) \\ (\mathrm{K}C_0, B_{\bar z}) & (\mathrm{K}B_0, B_{\bar z}) \end{bmatrix} \cdot J = I +$$

$$+ \frac{z}{i} \begin{bmatrix} (C, \mathrm{M}_{\bar z}(x)) & (B, \mathrm{M}_{\bar z}(x)) \\ (C, e^{-i\bar z x}) & (B, e^{-i\bar z x}) \end{bmatrix} \cdot J.$$

Подставив в последнюю матрицу значения B и C из теоремы 1.2, мы выразим элементы $A(z)$ через составляющие триады $\chi(x)$, k, b. Тем самым в рассматриваемой ситуации отпадает необходимость использования спектрального разложения оператора Kf. Все же, несмотря на это, структура матрицы $A(z)$ остается трудно обозримой. Однако четко прослеживаемая зависимость $A(z)$ от параметра ζ, позволит нам в дальнейшем получить неожиданно простое мультипликативное представление резольвентной матрицы в терминах триады.

Пусть теперь $s(x)$—произвольная (не обязательно эрмитово-положительная) функция, удовлетворяющая условиям (i)—(iii). Имеет место

Теорема 2.2. *Если триада $\{\chi(x), k, b\}$ существует, то функция $\chi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению второго рода*

$$\chi(x) - \int_0^\xi s''(x - t)\, \chi(t)\, dt = -s''(x), \ x \in [0, \xi], \tag{7}$$

а составляющие b и k выражаются через $\chi(t)$ и $s(t)$ по формулам

$$b = s(0) - \int_0^\xi \overline{s(t)}\, \chi(t)\, dt, \tag{8}$$

$$k = (s'(+0) + \int_0^{\xi} \overline{s'(t)}\,\chi(t)\,dt. \tag{9}$$

Наоборот, если $\chi(t)$ *— решение уравнения* (7), b *и* k *определены равенствами* (8), (9), *то* $\{\chi(x), k, b\}$ *— триада.*

Доказательство. Вычислим первую и вторую производные выражения

$$\Phi(x) = \int_0^{\xi} s(x-t)\,\chi(t)\,dt,$$

считая пока $\chi(x)$ произвольной суммируемой функцией:

$$\Phi'(x) = \int_0^{\xi} s'(x-t)\,\chi(t)\,dt; \quad \Phi''(x) = -\chi(x) + \int_0^{\xi} s''(x-t)\,\chi(t)\,dt.$$

Если теперь $\{\chi(x), k, b\}$-триада, то имеют место тождества

$$\int_0^{\xi} s(x-t)\,\chi(t)\,dt = s(x) - kx - b,$$

$$\int_0^{\xi} s'(x-t)\,\chi(t)\,dt = s'(x) - k,$$

$$-\chi(x) + \int_0^{\xi} s''(x-t)\,\chi(t)\,dt = s''(x).$$

Последнее означает, что $\chi(x)$ удовлетворяет уравнению (7), а положив в первых двух $x = 0$, получим (8), (9).

Обратно, пусть $\chi(x) \in L^1[0, \xi]$ удовлетворяет уравнению (7) п. в. Определив b, k равенствами (8), (9), рассмотрим функцию

$$\Psi(x) = \int_0^{\xi} s(x-t)\,\chi(t)\,dt - s(x) + kx + b.$$

Так как

$$\Psi''(x) = 0 \text{ (п. в.)}, \quad \Psi'(0) = 0, \quad \Psi(0) = 0$$

и функции $\Psi'(x)$, $\Psi(x)$ — абсолютно непрерывны, то $\Psi(x) \equiv 0$ и, следовательно, $\{\chi(x), k, b\}$ является триадой.

Интегральное уравнение (7) называется уравнением Гельфанда-Левитана. Из сказанного выше следует, что при наличии условий (i)—(iii), описание всех продолжений эрмитово-положительной функции сводится к решению уравнения Гельфанда-Левитана. Преимущество триады состоит в том, что с ее помощью удачно записываются элементы $A(z)$.

2°. Здесь предполагая только, что $s(x)$ является непрерывной эрмитово-положительной функцией, многозначно продолжаемой с $[-\xi, \xi]$, и опираясь на доказанную в [5] лемму 1.2. *Для любой непрерывной эрмитово-положительной функции $s(x)$, неоднозначно продолжаемой с $[-\xi, \xi]$ и произвольных комплексных чисел α, β не равных нулю одновременно, уравнение*

$$\int_0^\xi s(x-t)\chi(t)\,dt = \alpha s(x) + \beta s(x-\xi) \quad (|\alpha| + |\beta| > 0)$$

не имеет решений $\chi(t)$ в классе суммируемых функций, легко убедимся в справедливости следующих теорем.

Теорема 3.2. *Если непрерывная эрмитово-положительная функция $s(x)$ неоднозначно продолжаема с $[-\xi, \xi]$ и если триада $\{\chi(x), k, b\}$ существует, то число $\Delta = k\bar{k}\xi + k\bar{b} + \bar{k}b$ (а значит и число $\bar{k}$) отлично от нуля.*

Теорема 4.2. *Если непрерывная эрмитово-положительная функция $s(x)$ неоднозначно продолжаема с $[-\xi, \xi]$, и если триада существует, то она единственна.*

Замечание. Теорема 3.2 свидетельствует о том, что условие $\Delta \neq 0$ является следствием многозначной продолжаемости и существования триады. Мы покажем ниже, что существование триады, в свою очередь, является следствием многозначности продолжения и условий (i)—(iii).

3°. В связи с анализом уравнения Гельфанда-Левитана (7) рассмотрим интегральное преобразование

$$g(x) = \int_0^\xi k(x-t) f(t)\,dt \tag{10}$$

с ядром $k(x-t)$, порожденным суммируемой на $[-\xi, \xi]$ эрмитовой функцией $k(x)$:

$$(a) \int_{-\xi}^{\xi} |k(u)|\,du < +\infty, \quad (b)\ k(-x) = \overline{k(x)} \text{ п. в. на } [-\xi, \xi].$$

Естественной областью определения этого преобразования является множество измеримых функций $f(x)$, $x \in [0, \xi]$ таких, что интеграл $\int_0^\xi k(x-t) f(t)\,dt$ существует для п. в. $x \in [0, \xi]$. Имеет место

Теорема 5.2. *В каждом из трех банаховых пространств $L^1[0, \xi]$, $L^2[0, \xi]$, $C[0, \xi]$ интегральное преобразование* (10) *с ядром, удовлетворяющим условию* (*a*), *индуцирует ограниченный оператор* $\mathbf{K}f$ *с нормой, не превосходящей*

$$\int_{-\xi}^{\xi} |k(u)|\,du\,.$$

Операторы $\mathbf{K}f$ ($f \in L^1[0, \xi]$, $L^2[0, \xi]$, $C[0, \xi]$) вполне непрерывны (компактны), а оператор $\mathbf{K}f$ ($f \in L^2[0, \xi]$), удовлетворяющий дополнительному условию (*b*), *является самосопряженным.*

Доказательство. В случае $f \in L^1[0, \xi]$ легко проверить, что

$$\int_0^\xi |g(x)|\, dx < \int_{-\xi}^{\xi} |k(u)|\, du \cdot \|f\|_{L^1},$$

то есть $\mathbf{K}f \in L^1(0, \xi]$ и его норма

$$\|\mathbf{K}\|_{L^1} \leqslant \int_{-\xi}^{\xi} |k(u)|\, du.$$

В случае $f \in L^2[0, \xi]$ легко доказывается с использованием неравенства Буняковского—Шварца оценка

$$\int_0^\xi |g(x)|^2 dx \leqslant \left\{ \int_{-\xi}^{\xi} |k(u)|\, du \right\}^2 \int_0^\xi |f(t)|^2\, dt,$$

откуда видно, что $g = \mathbf{K}f \in L^2[0, \xi]$ и

$$\|\mathbf{K}\|_{L^2} \leqslant \int_{-\xi}^{\xi} |k(u)|\, du.$$

Если $f \in C[0, \xi]$, то, как нетрудно проверить, $g(x) \in C[0, \xi]$ и $\|g\|_C = \|\mathbf{K}f\|_C \leqslant \int_{-\xi}^{\xi} |k(u)|\, du \cdot \|f\|_C$, то есть

$$\|\mathbf{K}\|_C \leqslant \int_{-\xi}^{\xi} |k(u)|\, du.$$

Второе утверждение теоремы также легко следует из аппроксимируемости оператора $\mathbf{K}$, во всех трех случаях, конечномерными операторами, получаемыми из оператора $\mathbf{K}$ заменой ядра $k(x-t)$ полиномом $k_n(x-t)$.

Наконец, утверждение о самосопряженности $\mathbf{K}f$ в $L^2[0, \xi]$ непосредствено следует из теоремы Фубини и эрмитовости ядра $k(x-t) = \overline{k(t-x)}$.

4°. Так как интегральный оператор $\mathbf{K}f$ является компактным оператором из $L^p[0, \xi]$ в $L^p[0, \xi]$ ($p=1, 2$ и даже $p \in [1, \infty]$), из $C[0, \xi]$ в $C[0, \xi]$, то всякая ненулевая точка спектра $\mathbf{K}$ есть собственное значение [15]. Используя специфическую структуру ядра, — x и t входят в него лишь в виде разности, — можно показать, что при $\mu \neq 0$ всякая суммуруемая функция $h(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\mu\, h(x) = \int_0^\xi k(x-t)\; h(t)\, dt \quad (0 \leqslant x \leqslant \xi)$$

будет непрерывной на $[0, \xi]$.

Таким образом, спектр интегрального оператора на конечном интервале с суммируемым зависящим от разности аргументов ядром не зависит от того в каком из пространств $L^p[0, \xi]$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ или $C[0, \xi]$ рассматривается этот интегральный оператор. Если ядро $k(x-t) = \overline{k(t-x)}$ эрмитово, то спектр интегрального оператора, рассматриваемого в $L^2[0, \xi]$, вещественен, следовательно, таким же он будет и в $L^1[0, \xi]$ и $C[0, \xi]$.

5°. Всюду до конца настоящего параграфа, будем считать, что $\hat{k}(x) = s''(x)$, где $s(x)$ — эрмитово-положительная функция, удовлетворяющая следующим двум требованиям: (c) $s(x)$ — многозначно продолжаема с любого внутреннего сегмента $[-\xi, \xi] \subset (-a, a)$; (d) $s(x)$ подчинена условиям (i), (ii), (iii) с $\lambda = 1$).

Теорема 6.2. (Первая основная теорема). *Если эрмитово-положительная функция $s(x)$ удовлетворяет требованиям (c) и (d), то уравнение Гельфанда-Левитана*

$$\chi(x) - \int_0^\xi s''(x-t)\chi(t)\,dt = -s''(x)$$

однозначно разрешимо в пространстве $L^1[0, \xi]$ и, следовательно, триада $\{\chi(x), k, b\}$ существует.

Для доказательства обратимся к ОМН (К) задачи о продолжении:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}\varphi, \varphi) & (e^{-izx}w(z) - \mathbf{M}_z(x), \varphi) \\ * & \dfrac{w(z) - w^*(z)}{z - \bar{z}} \end{bmatrix} \geqslant 0, \ \forall z : \operatorname{Im} z \neq 0, \ \forall \varphi \in L^2[0, \xi].$$

Отправляясь от функции $\Psi(x)$ такой, что $\Psi' \in L^2[0, \xi]$, $\Psi(0) = \Psi(\xi) = 0$, положим в ОМН (К) $\varphi = \Psi'$, после чего, интегрируя по частям, преобразуем элементы a_{11} и a_{12}. Мы получим

$$\mathbf{K}\Psi' = \int_0^\xi s(x-t)\Psi'(t)\,dt = -\int_0^\xi \frac{d}{dt} s(x-t)\Psi(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\xi \frac{d}{dx} s(x-t)\Psi(t)\,dt,$$

$$(\mathbf{K}\Psi', \Psi') = -\left(\frac{d}{dx}\int_0^\xi s'(x-t)\Psi(t)\,dt, \ \Psi(x)\right)$$

и, так как из-за скачка производной

$$\frac{d}{dx}\int_0^\xi s'(x-t)\Psi(t)\,dt = \lambda\Psi(x) + \int_0^\xi s'(x-t)\Psi(t)\,dt =$$

$$= -\Psi(x) + \int_0^\xi \hat{k}(x-t)\Psi(t)\,dt,$$

то

$$a_{11} = (\mathbf{K}\Psi', \Psi') = (\Psi, \Psi) - (\widehat{\mathbf{K}}\Psi, \Psi),$$

$$a_{12} = (e^{-izx} w(z) - \mathbf{M}_z(x), \Psi'(x)) = -(-ize^{-izx} w(z) - \mathbf{M}_z(x), \Psi(x)).$$

В итоге ОМН приобретает вид

$$\begin{bmatrix} (\Psi, \Psi) - (\widehat{\mathbf{K}}\Psi, \Psi) & (ize^{-izx} w(z) + \mathbf{M}_z'(x), \Psi(x)) \\ * & w(z) - w^*(z)/z - \bar{z} \end{bmatrix} \geqslant 0, \ \operatorname{Im} z \neq 0$$

и так как функция $\Psi(x)$ с указанными свойствами плотны в $L^2[0, \xi]$, то неравенство справедливо для всех $\Psi \in L^2[0, \xi]$.

Отсюда сразу же следует, что единица не является собственным числом оператора $\widehat{\mathbf{K}}f$, действующего в $L^2[0, \xi]$. Действительно, в противном случае существует собственная функция $\Psi_0 \in L^2[0, \xi]$ такая, что

$$\Psi_0 - \widehat{\mathbf{K}}\Psi_0 = 0, \ (\Psi_0, \Psi_0) - (\widehat{\mathbf{K}}\Psi_0, \Psi_0) = 0,$$

в силу чего $w(z)$ определится однозначно из ОМН вопреки требованию (с). Но тогда единица не будет собственным числом и оператора $\widehat{\mathbf{K}}f$, действующего в $L^1[0, \xi]$. Уравнение Гельфанда—Левитана разрешимо [15], и по теореме 2.2 триада $\{\chi(x), k, b\}$ существует.

Итак, при выполнении условий (с) и (d) триада $\{\chi(x), k, b\}$ существует; более того, из теоремы 3.2 вытекает, что эти же условия обеспечивают выполнеиие неравенства $\Delta \neq 0$. Тем самым имеют смысл величины B, $\mathbf{L}$, C теоремы 1.2 и справедлива следующая

Теорема 7.2. (Вторая основная теорема). *Если эрмитово-положительная функция $s(x)$, удовлетворяющая условиям (i)—(iii), допускает многозначное продолжение с сегмента $[-\xi, \xi]$, то резольвентная матрица задачи имеет вид*

$$A(z) = \begin{bmatrix} 1 - z(B, \mathbf{M}_{\bar{z}}^-(x)) & z(C, \mathbf{M}_{\bar{z}}^-(x)) \\ -z(B, e^{-i\bar{z}x}) & 1 + z(C, e^{-i\bar{z}x}) \end{bmatrix},$$

где обобщенные функции B, $\mathbf{L}$, C определены теоремой 1.2.

6° Важную информацию о величине $\Delta = k\bar{k}\xi + k\bar{b} + \bar{k}b$ доставляет

Теорема 8.2. *Если эрмитово-положительная функция $s(x)$ удовлетворяет требованиям (с) и (d), то 1) справедливо равенство $(\mathbf{K}B, B) = -\frac{1}{\Delta}$; 2) $\Delta(\xi) = k(\xi)\bar{k}(\xi)\xi + k(\xi)\bar{b}(\xi) + \bar{k}(\xi)b(\xi)$ отрицательна для всех $\xi \in (0, a)$ и монотонно неубывает с ростом ξ.*

§ 3. Элементы триады, как функции правого конца сегмента $[0, \xi]$

По-прежнему считаем, что эрмитово-положительная функция $s(x)$ подчинена требованиям (с) и (d). По теореме 6.2 уравнение (7) имеет решение $\chi_\xi(x)$ и величины $\chi_\xi(x)$, $k(\xi)=s'(+0)+\int\limits_0^\xi \overline{s'(t)}\,\chi_\xi(t)\,dt, b(\xi)=$

$=s(0)-\int\limits_0^\xi \overline{s(t)}\chi_\xi(t)\,dt$ образуют триаду.

В этом параграфе мы выясним зависимости этих величин от параметра ξ. Нас будет интересовать поведение элементов триады при $\xi\to+0$, их непрерывность и формулы дифференцирования.

1°. Пусть $\xi\to+0$. По теореме 5.2 норма оператора

$$\widehat{\mathbf{K}}_\xi f=\int\limits_0^\xi s''(x-t)f(t)\,dt$$

в пространстве $L^1[0,\xi]$ допускает оценку:

$$\|\widehat{\mathbf{K}}_\xi\|_\xi\leqslant\int\limits_{-\xi}^\xi |s''(x)|\,dx=2\int\limits_0^\xi |s''(x)|\,dx=2\|s''\|_\xi$$

и тогда

$$\|\chi_\xi\|_\xi\leqslant\left\|\int\limits_0^\xi s''(x-t)\chi_\xi(t)\,dt\right\|_\xi+\|s''\|_\xi\leqslant$$

$$\leqslant\|\widehat{\mathbf{K}}_\xi\|_\xi\|\chi_\xi\|_\xi+\|s''\|_\xi\leqslant 2\|s''\|_\xi\|\chi_\xi\|_\xi+\|s''\|_\xi,$$

то есть $\|\chi_\xi\|_\xi\to 0$ при $\xi\to 0$. Далее очевидно

$$|b(\xi)-s(0)|\leqslant\int\limits_0^\xi |\overline{s(t)}|\,|\chi_\xi(t)|\,dt,\quad |k(\xi)-s'(+0)|\leqslant\int\limits_0^\xi |\overline{s(t)}|\,|\chi_\xi(t)|\,dt$$

и, если обозначить

$$M=\max_{[0,\,\xi_0]}|s(x)|,\quad M'=\max_{[0,\,\xi_0]}|s'(x)|,$$

то при

$$\xi\leqslant\xi_0\ |b(\xi)-s(0)|\leqslant M\|\chi_\xi\|_\xi,\quad |k(\xi)-s'(+0)|\leqslant M'\|\chi_\xi\|_\xi$$

и следовательно

$$\lim_{\xi\to+0} b(\xi)=s(0),\quad \lim_{\xi\to+0} k(\xi)=s'(+0).$$

Наконец

$$\lim_{\xi\to+0}\Delta(\xi)=\lim_{\xi\to+0}\left[k(\xi)\overline{k}(\xi)\xi+k(\xi)\overline{b(\xi)}+\overline{k}(\xi)b(\xi)\right]=$$

$=[s'(+0)+\overline{s'(+0)}]\,s(0)=-s(0)$. Тем самым доказана следующая

Теорема 1.3. *Если эрмитово-положительная функция $s(x)$ удовлетворяет требованиям (c) и (d), то имеют место следующие соотношения:*

$$\lim_{\xi\to+0}\|\chi_\xi\|_\xi=0,\quad \lim_{\xi\to+0} b(\xi)=s(0),\quad \lim_{\xi\to+0} k(\xi)=s'(+0),\quad \lim_{\xi\to+0}\Delta(\xi)=-s(0).$$

2°. Доказательство непрерывности элементов триады опирается на факт равномерной ограниченности по параметру ξ операторов $[I - \widehat{K}_\xi)^{-1} g$.

Теорема 2.3. *Если функция $k(x)$ суммируема на любом внутреннем сегменте $[-\xi, \xi] \subset (-a, a)$, и если для каждого $\xi \in [0, a)$ однородное уравнение $\varphi - \widehat{K}_\xi \varphi = 0$ имеет в $L^1[0, \xi]$ лишь тривиальное решение, то семейство операторов $(I - \widehat{K}_\xi)^{-1} f$ равномерно по ξ ограничено на каждом внутреннем сегменте $[0, \xi_0]$.*

В частных случаях, когда $k(x) \in C[0, \xi]$ или $k(x) \in L^2[0, \xi]$, доказательство теоремы может быть получено стандартным образом из известных фактов теории Фредгольма. В рассматриваемом случае $k(x) \in L^1[0, \xi]$ теоремы Фредгольма остаются верными (см., например, [15]), а доказательство равномерной ограниченности по ξ [семейства $(I - \widehat{K}_\xi)^{-1} f$ несколько громоздко. Из теоремы 2.3 вытекает

Теорема 3.3. *Если функция $k(x)$ суммируема на любом $[-\xi, \xi] \subset (-a, a)$, и если для каждого $\xi \in [0, a)$ однородное уравнение $\varphi - \widehat{K}_\xi \varphi = 0$ имеет в $L^1[0, \xi]$ лишь тривиальное решение, а $|g(x)| < C$ ограничена на $(-a, a)$, то*

$$q(\xi) = \int_0^\xi \chi_\xi(x) \overline{g(x)}\, dx$$

является непрерывной функцией параметра ξ. В частности

$$k = s'(+0) + \int_0^\xi \chi_\xi(t) \overline{s'(t)}\, dt, \quad b = s(0) - \int_0^\xi \chi_\xi(t) \overline{s(t)}\, dt,$$

$\Delta = k\bar{k}\xi + k\bar{b} + \bar{k}b$ являются непрерывными функциями параметра ξ.

Следствие. *В условиях предыдущей теоремы резольвентная матрица $A_\xi(z)$ непрерывно зависит от параметра ξ.*

Наша главная задача состоит в том, чтобы доказать при выполнении тех же условий дифференцируемость матрицы $A_\xi(z)$ по параметру ξ и вывести для нее дифференциальное уравнение.

3°. С этой целью временно усилим требование (ii), заменив его условием $(\widetilde{\text{ii}})$ „$s''(x)$ непрерывна на $[0, a)$“. Для этого случая в [5] доказана

Теорема 4.3. (Третья основная теорема). *Если функция $s(x)$ удовлетворяет условиям* (i), (ii), (iii), *и если для всех $\xi \in [0, a)$ однородное уравнение $\varphi - \widehat{K}_\xi \varphi = 0$ имеет в $C[0, \xi]$ лишь тривиальное решение, то справедливы формулы дифференцирования*

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \chi_\xi(x) = -\Theta(\xi)\, \overline{\chi_\xi(\xi - x)}, \tag{11}$$

$$\frac{dk}{d\xi} = \Theta(\xi)\, \bar{k}, \tag{12}$$

$$\frac{db}{d\xi} = -\Theta(\xi)\,(\overline{k}\xi + \overline{b}). \tag{13}$$

Здесь $\chi_\xi(x)$, k, b *образует триаду, а* $\Theta(\xi) = \chi_\xi(\xi)$.

В частности, из (12) и (13) вытекает важное, не содержащее $\Theta(\xi)$, соотношение

$$\frac{d}{d\xi}\Delta(\xi) = k\overline{k}. \tag{14}$$

Формула (11) впервые получена М. Г. Крейном [3]. Несмотря на ее важную роль в вычислениях, она не может считаться основным элементом теории по следующим соображениям: во-первых, она утрачивает смысл в случае суммируемой второй производной $s''(x)$, так как значение суммируемой функции $\chi_\xi(x)$ в точке $x=\xi$ бессодержательно; во-вторых, как будет показано, основные формулы вообще не содержат величины $\Theta(\xi) = \chi_\xi(\xi)$.

Замечание. Из соотношеиия (12) с учетом начального условия $k(+0) = s'(+0)$ $(s'(+0) \neq 0)$ видно, что функция $k = k(\xi)$ всюду на $[0, a)$ отлична от нуля, и так как $\frac{d}{d\xi}\Delta = k\overline{k} > 0$, то $\Delta(\xi)$—строго возрастает, обращаясь в нуль не болеее чем в одной точке.

4°. Имея в виду вычисление производной $\frac{d}{d\xi}A_\xi(z)$, рассмотрим произведения (B, f), $(\mathbf{L}, f)$, (C, f) обобщенных функций B, $\mathbf{L}$, C на произвольную, непрерывную на $[0, a)$ вместе со своей производной функцию $f(x)$. Эти скалярные произведения являются, очевидно, антилинейными функционалами

$$B(f) = (B, f)_\xi,\ \mathbf{L}(f) = (\mathbf{L}, f)_\xi, C(f) = (C, f)_\xi.$$

Мы придем к нужным формулам, вычислив производные $\frac{d}{d\xi}B(f)$, $\frac{d}{d\xi}C(f)$, и положив там $f = e^{-i\overline{z}x}$, $f = \mathbf{M}_{\overline{z}}(x)/\mathbf{M}_{\overline{z}}(x) =$

$$= i\int_0^x e^{-i\overline{z}(x-u)}\,s(u)\,du.$$

Формула для $\frac{d}{d\xi}\mathbf{L}(f)$ при этом играет вспомогательную роль.

Теорема 5.3. [5]. *Если функция* $s(x)$ *удовлетворяет условиям* (i), ($\widetilde{\text{ii}}$), (iii), *если для всех* $\xi \in [0, a)$ *однородное уравнение*

$$\varphi(x) - \int_0^\xi s''(x-t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

имеет в $C[0, \xi)$ *лишь тривиальное решение, то имеют место формулы:*

$$\frac{d}{d\xi} B(f) = -\{\bar{k} B(f) - \overline{f'(\xi)} + \overline{(\chi_\xi(\xi-u),\ f'(u))_\xi}\} \frac{k}{\Delta}, \tag{15}$$

$$\frac{d}{d\xi} C(f) = \{\bar{k} B(f) - \overline{f'(\xi)} + (\chi_\xi(\xi-u),\ f'(u))_\xi\} \{kB(M_0) - ib\}, \tag{16}$$

при этом из первой, в частности, вытекает

$$\Delta \cdot B(1) = -1, \tag{17}$$

$$\Delta \cdot B(M_0) = \int_0^\xi \frac{1}{2i} \left[k(v) \overline{b(v)} - \overline{k(v)} b(v) \right] dv - \frac{i}{2} \Delta \cdot \xi. \tag{18}$$

5°. Мы покажем здесь, что эти формулы останутся в силе и тогда, когда функция $s''(x) = k(x)$ лишь локально суммируема на $(-a, a)$.

Метод доказательства основывается на том, что на выделенном сегменте $[0, \xi_0] \subset [0, a)$ функция $s(x)$ класса (i), (ii), (iii) с суммируемой второй производной $s''(x)$ аппроксимируется последовательностью функций $s_n(x) = \tilde{s}(x)$ класса (i), (ii), (iii) с непрерывной $\dot{s}_n = \tilde{s}'' = \tilde{k}(x)$.

Эта аппроксимация строится следующим образом: отправляясь от $s''(x) = k(x)$, подбираем непрерывную $k_n(x) = \tilde{k}(x)$ так, чтобы

$$\|k - k_n\|_{\xi_0} = \int_0^{\xi_0} |k(u) - \tilde{k}(u)|\, du < \varepsilon_n \quad (\varepsilon_n \to +0).$$

и полагаем

$$\tilde{s}(x) = \int_0^x \int_0^t \tilde{k}(u)\, du dt + s'(+0)x + s(0), \quad x \in [0, \xi_0].$$

Ясно, что

$$\tilde{s}'(x) = \int_0^x \tilde{k}(u)\, du + s'(+0), \quad \tilde{s}(0) = s(0), \quad \tilde{s}'(+0) = s'(+0).$$

Так как с другой стороны

$$s(x) = \int_0^x \int_0^t k(u)\, du dt + s'(+0) + s(0),$$

$$s'(x) = \int_0^x k(u)\, du + s'(+0),$$

то для всех $x \in [0, \xi_0]$

$$|s(x) - \tilde{s}(x)| \leqslant \xi_0 \int_0^{\xi_0} |k(u) - \tilde{k}(u)|\, du < \xi_0 \varepsilon_n,$$

$$|s'(x) - \tilde{s}'(x)| \leqslant \int_0^{\xi_0} |k(u) - \tilde{k}(u)|\, du < \varepsilon_n$$

и, следовательно, $s_n(x)$ и $s_n'(x)$ равномерно на $[0, \xi_0]$ стремятся к $s(x)$ и $s'(x)$ соответственно.

Функции $\tilde{s}(x)$ доопределим на $[-\xi_0, 0]$ по закону четности: $\tilde{s}(x) = \tilde{s}(-x)$, тем самым доопределятся и $\tilde{s}'(x)$, $\tilde{s}''(x)$: $\tilde{s}'(x) = -\tilde{s}'(-x)$, $\tilde{s}''(x) = \tilde{s}''(-x)$. Ход рассуждений проиллюстрируем на формуле $\frac{d}{d\xi}\Delta = k\bar{k}$. Легко устанавливается, что если $s(x)$ такова, что однородное уравнение

$$\varphi(x) - \int_0^\xi s''(x-t)\varphi(t)\,dt = 0$$

имеет для всех $\xi \in [0, \xi_0]$ лишь тривиальное решение, то это же верно и для любых $\bar{s}(x)$ при достаточно малых ε_n. Но тогда для всех $\xi \in [0, \xi_0]$ разрешимо уравнение Гельфанда—Левитана

$$\bar{\chi}_\xi(x) - \int_0^\xi \tilde{s}''(x-t)\,\bar{\chi}_\xi(t)\,dt = -\tilde{s}''(x)$$

и имеют смысл элементы триады

$$\bar{b}_\xi = s(0) - \int_0^\xi \overline{\tilde{s}(t)}\,\bar{\chi}_\xi(t)\,dt, \quad \bar{k}_\xi = s'(+0) + \int_0^\xi \tilde{s}'(t)\,\bar{\chi}_\xi(t)\,dt.$$

При $\varepsilon_n \to 0$ $\bar{b}_\xi \to b_\xi$, $\bar{k}_\xi \to k_\xi$. (19)

В самом деле, в силу равномерной ограниченности на $[0, \xi_0]$ операторов $(I - \tilde{\mathbf{K}}_\xi)^{-1}$, для функций $\bar{g}(x)$, мало отличающихся на $[0, \xi_0]$ от непрерывной функции $g(x)$ в смысле

$$\|g - \tilde{g}\|_C = \sup_{x \in [0, \xi_0]} |g(x) - \bar{g}(x)| < \varepsilon$$

имеет место неравенство

$$|(\bar{\chi}_\xi, \tilde{g})_\xi - (\chi_\xi, g)_\xi| < C\varepsilon,$$

где постоянная C не зависит не от выбора аппроксимант $\tilde{k}(x)$, $\bar{g}(x)$, ни от значения $\xi \in [0, \xi_0]$. Но тогда справедливы соотношения (19).

Однако, для функций $\tilde{s}(x)$ формула $\frac{d}{d\xi}\bar{\Delta}_\xi = \bar{k}_\xi \bar{\bar{k}}_\xi$ уже доказана. Проинтегрируем ее, учитывая начальные условия при $\xi \to +0$

$$\bar{k}_\xi \tilde{\bar{k}}_\xi \xi + \bar{k}_\xi \bar{b}_\xi + \bar{\bar{k}}_\xi \tilde{b}_\xi = \int_0^\xi \tilde{k}_\eta \bar{\bar{k}}_\eta\,d\eta - s(0)$$

и перейдем к пределу при $\varepsilon_n \to 0$ (Переход к пределу под знаком интеграла возможен в силу равномерной сходимости $\overline{k} \to k$). Мы получим

$$k_\xi \overline{k}_\xi \xi + k_\xi \overline{b}_\xi + \overline{k}_\xi b_\xi = \int_0^\xi k_\eta \overline{k}_\eta \, d\eta - s(0)$$

и так как подынтегральная функция непрерывна, то всюду на $[0, \xi_0]$ существует производная $\frac{d}{d\xi}\Delta = k\overline{k}$.

Теорема 6.3. *Если функция* $s(x)$, *удовлетворяющая требованиям* (i), (ii), (iii), *такова, что однородное уравнение*

$$\varphi(x) - \int_0^\xi s''(x-t)\varphi(t)\,dt = 0$$

имеет лишь тривиальное решение, и если $\Delta \neq 0$ *на* $[0, a)$, *то для функции* $f(x)$, *непрерывной вместе с* $f'(x)$ *на* $[0, a)$, *справедливы формулы дифференцирования*

$$\frac{d}{d\xi}B(f) = -\left[\overline{k}B(f) - \overline{f'(\xi)} + \overline{(\chi_\xi(\xi-u), f'(u))_\xi}\right]\frac{k}{\Delta}, \tag{20}$$

$$\frac{d}{d\xi}C(f) = \left[\overline{k}B(f) - \overline{f'(\xi)} + (\chi_\xi(\xi-u), f'(u))_\xi\right]\left[kB(M_0) - ib\right], \tag{21}$$

а значит и вытекающие из них соотношения

$$\Delta \cdot B(1) = -1, \tag{22}$$

$$\Delta \cdot B(M_0) = \int_0^\xi \frac{1}{2i}\left[k(u)\overline{b(u)} - \overline{k}(u)b(u)\right]du - \frac{i}{2}\xi \cdot \Delta. \tag{23}$$

Доказательство. Выделив произвольно сегмент $[0, \xi_0] \subset \subset [0, a)$, построим последовательность аппроксимирующих функций $s_n(x)$ с непрерывными вторыми производными. Для таких функций справедливость формул

$$\frac{d}{d\xi}B_n(f) = -\left[\overline{k}_n B_n(f) - \overline{f'(\xi)} + \overline{(\chi_\xi^{(n)}(\xi-u), f'(u))_\xi}\right]\frac{k_n}{\Delta_n}, \tag{24}$$

$$\frac{d}{d\xi}C_n(f) = \left[\overline{k}_n B_n(f) - \overline{f'(\xi)} + \overline{(\chi_\xi^{(n)}(\xi-u), f'(u))_\xi}\right]\left[k_n B_n(M_0) - ib_n\right] \tag{25}$$

установлена в теореме 5.3 [5].

Проинтегрируем (24), (25) по ξ с учетом начальных условий при $\xi \to +0$. Отправляясь от уже известных предельных соотношений

$$\lim_{\xi \to +0}\|\chi_\xi^{(n)}\|_\xi = 0, \ \lim_{\xi \to +0} b_n = s(0), \ \lim_{\xi \to +0} k_n = s'(+0), \ \lim_{\xi \to +0}\Delta_n = -s(0),$$

найдем без труда

$$\lim_{\xi \to +0} B_n(f) = \frac{1}{s(0)} = \lim_{\xi \to +0} B(f). \tag{26}$$

Из (26) в частности следует

$$\lim_{\xi\to+0}(B_n,1)_\xi=\lim_{\xi\to+0}B_n(1)=\frac{1}{s(0)};\ \lim_{\xi\to+0}(B_n,M_0)_\xi=\lim_{\xi\to+0}B_n(M_0)=0,$$

$$\lim_{\xi\to+0}(B_n,Af)_\xi=\lim_{\xi\to+0}B_n(Af)=0,$$

после чего

$$\lim_{\xi\to+0}C_n(f)=0=\lim_{\xi\to+0}C(f). \tag{27}$$

Таким образом, учитывая (26) и (27), получаем

$$B_n(f)=-\int_0^\xi[\overline{k}_n B_n(f)-\overline{f'(\eta)}+\overline{(\chi_\eta^{(n)}(\eta-u),\ f'(u)_\eta)}]\frac{k_n}{\Delta_n}d\eta+\lim_{\xi\to+0}B(f),$$

$$C_n(f)=\int_0^\xi[\overline{k}_nB_n(f)-\overline{f'(\eta)}+\overline{(\chi_\eta^{(n)}(\eta-u),\ f'(u)_\eta}][k_nB_n(M_0)-ib_n]d\eta+$$
$$+\lim_{\xi\to+0}C(f).$$

Равномерная сходимость левых частей и подынтегральных функций позволяет перейти к пределу под знаками интегралов. Так как предельные подынтегральные функции по теореме 3.3 непрерывны, то всюду на $[0,\xi_0]$ существуют производные $\frac{d}{d\xi}B(f)$, $\frac{d}{d\xi}C(f)$ такие, что выполняются неравенства (20), (21), а значит и (22), (23). В частности

Теорема 7.3. (Четвертая основная теорема). *Если эрмитово-положительная функция $s(x)$, удовлетворяющая требованиям* (i), (ii), (iii), *многозначно продолжаема с интервала* $(-a,a)$, *то справедливы формулы дифференцирования* (20), (21) *и, вытекающие из них* (22), (23).

В самом деле, по теореме 6.2 однородное уравнение

$$\varphi(x)-\int_0^\xi s''(x-t)\varphi(t)\,dt=0$$

имеет лишь тривиальное решение, а по теореме 3.2 $\Delta\neq0$.

§ 4. Мультипликативное представление резольвентной матрицы

1°. Пусть эрмитово-положительная функция $s(x)$, удовлетворяющая требованиям (i), (ii), (iii), многозначно продолжаема с интервала $(-a,a)$, и пусть

$$A_\xi(z)=A(\xi,z)=\begin{bmatrix}\alpha(\xi,z) & \beta(\xi,z)\\ \gamma(\xi,z) & \delta(\xi,z)\end{bmatrix}\ \xi\in(0,a)$$

— резольвентная матрица задачи. Элементы матрицы $A_\xi(z)$ выражаются через антилинейные функционалы $B(f)$ и $C(f)$ следующим образом:

$$\alpha(\xi,z)=1-zB(M_{\bar z}),\ \beta(\xi,z)=zC(M_{\bar z}),$$

$$\gamma(\xi, z) = -zB(e^{-i\bar{z}x}), \ \delta(\xi, z) = 1 + zC(e^{-i\bar{z}x}).$$

Формулы (20), (21) теоремы 6.3 позволяют вычислить $\frac{d}{d\xi} A_\xi(z)$.

Предварительно введем следующие обозначения: положив

$p = \frac{k}{\Delta}$, $q = kB(M_0) - ib$, рассмотрим матрицу

$$Q(\xi) = J\begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{bmatrix}[p, q], \text{ где } J = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Проверим, что Q является „минус-J-проектором", то есть что $JQ \geqslant 0$, $Q^2 = -Q$. Первое очевидно, второе же вытекает из того, что, в силу (23), $\operatorname{Im} B(M_0) = -\frac{\xi}{2}$, откуда $\bar{p}q - p\bar{q} = -i$, и тогда

$$Q^2 = J\begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{bmatrix}\{-i(q\bar{p} - p\bar{q})\}[p, q] = -Q.$$

Мультипликативное представление $A(\xi, z)$ устанавливает следующая

Теорема 1.4. (Пятая основная теорема). *Матрица-функция $A(\xi, z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{d}{d\xi} A(\xi, z) = -izA(\xi, z)\,Q(\xi)$$

и начальному условию

$$A(0, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z/s(0) & 1 \end{bmatrix}.$$

Доказательство начнем с проверки первого утверждения. Записав

$$\frac{d}{d\xi} A(\xi, z) = \frac{d}{d\xi}\begin{bmatrix} \alpha(\xi, z) & \beta(\xi, z) \\ \gamma(\xi, z) & \delta(\xi, z) \end{bmatrix} = z\frac{d}{d\xi}\begin{bmatrix} -B(M_{\bar{z}}) & C(M_{\bar{z}}) \\ -B(e^{-i\bar{z}x}) & C(e^{-i\bar{z}x}) \end{bmatrix},$$

воспользуемся формулами дифференцирования теоремы 7.3:

$$\frac{d}{d\xi} A(\xi, z) = z\begin{bmatrix} \bar{k}\overline{B(M_{\bar{z}}) - M'_{\bar{z}}(\xi)} + \overline{(\chi_\xi(\xi-u), M'_{\bar{z}}(u))_\xi} \\ \bar{k}B(e^{-i\bar{z}x}) - ize^{iz\xi} + iz\overline{(\chi_\xi(\xi-u), e^{-i\bar{z}u})_\xi} \end{bmatrix} \times$$

$$\times\left[\frac{k}{\Delta}, kB(M_0) - ib\right]$$

и так как в состав

$$Q = J\begin{bmatrix} \bar{k}/\Delta \\ \overline{kB(M_0) - ib} \end{bmatrix}[k/\Delta, kB(M_0) - ib]$$

входит та же строка, то достаточно проверить лишь равенство

$$\begin{bmatrix} \bar{k}B(M_{\bar{z}}) - M'_{\bar{z}}(\xi) + \overline{(\chi_\xi(\xi-u), M'_{\bar{z}}(u))_\xi} \\ \bar{k}B(e^{-i\bar{z}x}) - ize^{-i\bar{z}x} + iz\overline{(\chi_\xi(\xi-u), e^{-i\bar{z}x})_\xi} \end{bmatrix} = -$$

$$-iA(\xi, z)\,J\begin{bmatrix} \bar{k}/\Delta \\ \overline{kB(M_0) - ib} \end{bmatrix}. \qquad (28)$$

Преобразуем сначала правую часть этого равенства. Учитывая, что $\overline{B(M_0)} = B(M_0) + i\xi$, получим

$$-iJ\begin{bmatrix}\bar{k}/\Delta \\ \overline{kB(M_0) - ib}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\bar{k}/\Delta \\ \bar{k}B(M_0) + i\bar{k}\xi + i\bar{b}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\bar{k}B(M_0) + i\bar{k}\xi + i\bar{b} \\ -\dfrac{\bar{k}}{\Delta}\end{bmatrix},$$

откуда

$$-iA(\xi, z)J\begin{bmatrix}\bar{k}/\Delta \\ \overline{kB(M_0) - ib}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - zB(M_{\bar z}) & zC(M_{\bar z}) \\ -zB(e^{-i\bar{z}x}) & 1 + zC(e^{-i\bar{z}x})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{k}B(M_0) + i\bar{k}\xi + i\bar{b} \\ \bar{k}/\Delta\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\bar{k}B(M_0) + i\bar{k}\xi + i\bar{b} - izB(M_{\bar z})(\bar{k}\xi + \bar{b}) - z\bar{k}B(M_0)B(M_{\bar z}) - z\dfrac{\bar{k}}{\Delta}C(M_{\bar z}) \\ -izB(e^{-i\bar{z}x})(\bar{k}\xi + \bar{b}) - \bar{k}/\Delta - z\bar{k}B(M_0)B(e^{-i\bar{z}x}) - z\bar{k}/\Delta\, C(e^{-i\bar{z}x})\end{bmatrix}.$$

Формула

$$C(f) = -\Delta\{L(f) + B(M_0)B(f) - B(A_0 f)\}$$

дает возможность преобразовать сумму двух последних слагаемых элементов колонны:

$$z\bar{k}B(M_0)B(M_{\bar z}) + z\bar{k}/\Delta\, C(M_{\bar z}) = -z\bar{k}L(M_{\bar z}) + z\bar{k}B(A_0 M_{\bar z}),$$

$$z\bar{k}B(e^{-i\bar{z}x})B(M_0) + z\bar{k}/\Delta\, C(e^{-i\bar{z}x}) = -z\bar{k}L(e^{-i\bar{z}x}) + z\bar{k}B(A_0 e^{-i\bar{z}x})$$

и, если учесть соотношения

$$A_0 e^{-i\bar{z}x} = i\int_0^x e^{-i\bar{z}v}dv = \frac{1}{\bar z}(1 - e^{-i\bar{z}x}),$$

$$A_0 M_{\bar z}(x) = -i\int_0^x\int_0^u e^{-i\bar{z}(u-v)}s(v)\,dv\,du = \frac{1}{\bar z}(M_0(x) - M_{\bar z}(x)),$$

то мы придем к равенству

$$-iA(\xi, z)J\begin{bmatrix}\bar{k}/\Delta \\ \overline{kB(M_0) - ib}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\bar{k}B(M_0) + i\bar{k}\xi + i\bar{b} - izB(M_{\bar z})(\bar{k}\xi + \bar{b}) + \bar{k}zL(M_{\bar z}) - \bar{k}B(M_0) + \bar{k}B(M_{\bar z}) \\ -izB(e^{-i\bar{z}x})\left(\bar{k}\xi + \bar{b}\right) - \dfrac{\bar{k}}{\Delta} + \bar{k}zL(e^{-i\bar{z}x}) - \bar{k}B(1) + \bar{k}B(e^{-i\bar{z}x})\end{bmatrix}.$$

Наконец, учитывая, что $B(1) = -\Delta^{-1}$, мы, после приведения подобных, получим

$$-iA(\xi,\ z)\,J\left[\frac{\overline{k}/\Delta}{kB(M_0)-ib}\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} i\overline{k}\xi+i\overline{b}-izB(M_{\overline{z}})(\overline{k}\xi+\overline{b})+z\overline{k}L(M_{\overline{z}})+\overline{k}B(M_{\overline{z}}) \\ -iz(e^{-i\overline{z}x})(\overline{k}\xi+b)+z\overline{k}L(e^{-i\overline{z}x})+\overline{k}B(e^{-i\overline{z}x}) \end{bmatrix}.$$

Преобразуем теперь левую часть проверяемого равенства (28). С этой целью вычислим производную

$$M'_{\overline{z}}(x)=i\frac{d}{dx}\int\limits_0^x e^{-i\overline{z}(x-u)}\,s(u)\,du=is(x)-i\overline{z}M_{\overline{z}}(x)$$

и подсчитаем, используя тождество триады,

$$-\overline{M'_{\overline{z}}(\xi)}\,\overline{(\chi_\xi(\xi-u)},\ M'_{\overline{z}}(u))_\xi=$$

$$=i\overline{s(\xi)}-i\int\limits_0^\xi \overline{\chi_\xi(\xi-u)}\ \overline{s(u)}\,du-iz\overline{M_{\overline{z}}(\xi)}+iz(\overline{\chi_\xi(\xi-u)},\ M_{\overline{z}}(u))_\xi=$$

$$=i\overline{k}\xi+i\overline{b}-iz\overline{M_{\overline{z}}(\xi)}+iz(\overline{\chi_\xi(\xi-u)},\ M_{\overline{z}}(u))_\xi.$$

После этого (28) становится эквивалентным равенству

$$\begin{bmatrix} -i\overline{M_{\overline{z}}(\xi)}+i(\overline{\chi_\xi(\xi-u)},\ M_{\overline{z}}(u))_\xi \\ -ie^{iz\xi}+i\,(\overline{\chi_\xi(\xi-u)},\ e^{-i\overline{z}u})_\xi \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -i(\overline{k}\xi+\overline{b})B(M_{\overline{z}})+\overline{k}L(M_{\overline{z}}) \\ -i(\overline{k}\xi+\overline{b})B(e^{-i\overline{z}x})+\overline{k}L(e^{-i\overline{z}x}) \end{bmatrix}.$$

Но оно является частным случаем тождества

$$-i\overline{f(\xi)}+i(\overline{\chi_\xi(\xi-u)},\ f(u))_\xi=-i(\overline{k}\xi+\overline{b})B(f)+\overline{k}L(f),$$

вытекающего из определения функционалов

$$B(f)=\frac{1}{\Delta}\{\overline{k}\overline{f(0)}+k\overline{f(\xi)}-k(\overline{\chi_\xi(\xi-u)},f(u))_\xi-\overline{k}(\chi_\xi(u),\ f(u))_\xi\},$$

$$L(f)=\frac{i}{\Delta}\{(\overline{k}\xi+\overline{b})\overline{f(0)}-b\overline{f(\xi)}-(\overline{k}\xi+\overline{b})(\chi_\xi(u),\ f(u))_\xi+$$

$$+b\,(\overline{\chi_\xi(\xi-u)},\ f(u))_\xi\}.$$

Первое утверждение теоремы доказано. Второе вытекает из элементарных соотношений

$$\lim_{\xi\to+0}B(f)=\frac{\overline{f(0)}}{s(0)},\quad \lim_{\xi\to+0}L(f)=0,\ \lim_{\xi\to+0}C(f)=0.$$

Используя их, получим

$$\lim_{\xi\to+0}A(\xi,\ z)=\lim_{\xi\to+0}\begin{bmatrix} 1-zB(M_{\overline{z}}) & zC(M_{\overline{z}}) \\ -zB(e^{-i\overline{z}x}) & 1+zC(e^{-i\overline{z}x}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z/s(0) & 1 \end{bmatrix}.$$

Полученный здесь результат может быть перефразирован так:

Теорема 2.4. *Резольвентная матрица* $A(z) = A(\xi, z)$ *допускает следующее мультипликативное представление:*

$$A(\xi, z) = e^{-iz\varepsilon_0} \cdot \int\limits_0^{\xi} e^{-izQ(t)\,dt},$$

где

$$\varepsilon_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{i}{s(0)} & 0 \end{bmatrix}, \quad J\varepsilon_0 \geqslant 0, \quad \varepsilon_0^2 = 0,$$

$$Q = J\left|\frac{\overline{p}}{q}\right|[p, q], \quad JQ \geqslant 0, \quad Q^2 = -Q, \quad p = k/\Delta,$$

$$q = \frac{k}{\Delta}\int\limits_0^t \frac{1}{2i}\left[k(v)\overline{b(v)} - \overline{k(v)}\,b(v)\right]dv - \frac{i}{2}kt - ib.$$

Харьковский институт инженеров
железнодорожного транспорта
имени С. М. Кирова

Поступила 17. VI. 1985

Ի. Վ. ԿՈՎԱԼԻՇԻՆԱ, Վ. Պ. ՊՈՏԱՊՈՎ. Տրիադայի մեթոդը էրմիտյան-դրական ֆունկցիաների շարունակման տեսությունում *(ամփոփում)*.

Աշխատանքի նպատակը կայանում է $(-a, a)$ *ինտերվալից էրմիտյան-դրական* $s(x)$ *ֆունկցիայի շարունակման խնդրի ռեզոլվենտային* $A_\xi(z)$ *մատրիցի կառուցումը, երբ առկա են հետևյալ երեք պայմանները՝ 1)* $s(x) = \overline{s(-x)}$ *ֆունկցիան անընդհատ է* $(-a, a)$*-ում, 2)* $s'(x)$ *ածանցյալը բացարձակ անընդհատ է* $[0, a[$*-ում, 3)* $s'(+0) + \overline{s'(+0)} < 0$.

Հետազոտվում է երևան եկած Գելֆանդ-Լևիտանի տիպի ինտեգրալ հավասարումը։

I. V. KOVALISHINA, V. P. POTAPOV. *The triad method in the theory of continuation of Hermitian positive functions* (summary)

The aim of the paper is the construction of the resolvent matrix $A_\xi(z)$ in th problem of continuation of the Hermitian positive function $s(x)$ from the interva $(-a, a)$ under the following three requirements: 1) the function $s(x) = \overline{s(-x)}$ is continuous on the interval $(-a, a)$; 2) the function $s'(x)$ is totally continuous on the nterval $[0, a)$; 3) $s'(+0) + \overline{s'(+0)} = -\lambda < 0$. The integral equation originatinge here (equation of Gelfand—Levitan) is studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн.* О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций, ДАН СССР, 1940, 26, № 1, 17—22.
2. *М. Г. Крейн.* О логарифме бесконечно разложимой эрмитово-положительной функции, ДАН СССР, 1944, 45, № 3, 99—102.
3. *М. Г. Крейн.* Об интегральных уравнениях, порождающих дифференциальные уравнения 2-го порядка, ДАН СССР, 1954, 97, № 1, 21—24.
4. *И. В. Ковалишина, В. П. Потапов.* Интегральное представление эрмитово-положительных функций, ВИНИТИ, 1981, № 2984—81, деп. рук.

5. *И. В. Михайлова, В. П. Потапов.* Об одном критерии эрмитовой положительности, Теория функций, функц. ан. и их прил., 1981, вып. 36, 65—89.

6. *И. В. Ковалишина, В. П. Потапов.* Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны-Пика, ДАН Арм.ССР, 1974, 59, № 3, 17—22.

7. *И. В. Ковалишина, Г. М. Чубкова-Видова.* Проблема Неванлинны-Пика для симметрических матриц-функций в верхней полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1978, 13, № 1, 48—78.

8. *И. В. Ковалишина.* Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач, Изв. АН СССР, 1983, 47, № 3, 455—497.

9. *И. В. Ковалишина.* О граничной производной аналитической сжимающей в круге матрицы-функции, ВИНИТИ, 1983, № 2709—83, деп. рук.

10. *В. Э. Кацнельсон.* Континуальные аналоги теоремы Гамбургера-Неванлинны и основные матричные неравенства пластических задач. I—IV, Теория функций, функц. ан. и их прил., 1981, вып. 36, 31—48, 1982, вып. 37, 31—48, 1983, вып. 39, 61—73, вып. 41, 56—70.

11. *Л. А. Галстян.* Аналитические J-растягивающие матрицы-функции в проблеме Шура, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1977, 12, № 3, 204—227.

12. *В. К. Дубовой.* Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций, Теория функций, функц. ан. и их прил., 1982, вып. 36, 14—26, 1982, вып. 38, 32—39.

13. *Ю. М. Дюкарев, В. Э. Кацнельсон.* Мультипликативные и аддитивные классы Стилтьеса аналитических матриц-функций и связанные с ними интерполяционные задачи, Теория функций, функц. ан и их прил., 1981, вып. 36, 13—27, 1982, вып. 38, 40—48.

14. *Е. Я. Меламуд.* Граничная задача Неванлинны-Пика для J-растягивающих матриц-функций, Изв. ВУЗов, 1984, «Математика», № 6, 36—43.

15. *К. Иосида.* Функциональный анализ, М., 1967, 378—396.