ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 3, 1989 Математика

УДК 517. 53

Г. А. БАРСЕГЯН, К. Н. МАРТИРОСЯН

О ЗНАЧЕНИЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА МНОЖЕСТВАХ a-ТОЧЕК МЕРОМОРФНОЙ В ЗАДАННОЙ ОБЛАСТИ ФУНКЦИИ

По первой основной теореме Р. Неванлинны (см. [1]), для мероморфной в $\mathbf{C}$ функции $w(z)$ и произвольного значения $a\in\mathbf{C}$ выполняется

$$N(r, a)+m(r, a)=T(r)+O(1),\ r\to\infty, \tag{1}$$

где $N(r, a)=\int\limits_0^r \frac{n(t, a)}{t}dt$, $n(t, a)$ — количество a-точек функции, с учетом кратности, в круге $|z|\leqslant t$

$$m(r, a)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\frac{1}{|w-a|}d\varphi,\ (z=re^{i\varphi}),\ m(r, \infty)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|w|\,d\varphi,\ T(r)=N(r, \infty)+m(r, \infty).$$

Соотношение (1) устанавливает инвариантность левой части ее относительно значения a с точностью до несущественного остаточного члена $O(1)$.

В заметке [2] было анонсировано следующее аналогичное соотношение, в котором роль $N(r, a)$ выполняют алгебраические суммы $B(r, a)$ a-точек, т. е. если $z_i(a)$, $i=1, 2,\cdots, n(r, a)$ a-точки функции $w(z)$ в круге $|z|<r$ с учетом кратности, то $B(r, a)=\sum\limits_{i=1}^{n(r, a)} z_i(a)$.

Теорема А [2]. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $\mathbf{C}$ функция, $a\in\mathbf{C}$. Тогда*

$$B(r, a)+m^*(r, a)=C(r)+O(rL(r)),\ r\to\infty, \tag{2}$$

где

$$m^*(r, a)=\frac{r^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{i\varphi}\frac{\partial}{\partial r}\ln^+\frac{1}{|w-a|}d\varphi-\frac{r}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{i\varphi}\ln^+\frac{1}{|w-a|}d\varphi,$$

$$m^*(r, \infty)=\frac{r^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{i\varphi}\frac{\partial}{\partial r}\ln^+|w|\,d\varphi-\frac{r}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{i\varphi}\ln^+|w|\,d\varphi,$$

$$C(r) = B(r, \infty) + m^*(r, \infty),$$

$L(r) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{|w'|}{1+|w|^2} r d\varphi$ — сферическая длина w-образа окружности $|z| = r$.

Соотношение (2) интересно тем, что в величинах $B(r, a)$ естественным образом фигурируют аргументы a-точек, что позволяет делать выводы о расположении a-точек.

Величину $C(r)$ естественно рассматривать как аналог неванлинновской характеристики $T(r)$, а величину $m^*(r, a)$ — как аналог неванлинновской функции приближения $m(r, a)$.

Величина $L(r)$ выполняет роль несущественного остаточного члена в теории поверхностей наложения Л. Альфорса (см. [1], гл. X). Очевидно в соотношении (2) интересными являются только случаи, когда величины B, m^*, C или хотя бы одна из них по модулю больше, чем $rL(r)$. Однако эта ситуация встречается довольно часто. По теории Л. Альфорса для „большинства" a и r выполняется

$$L(r) < [n(r, a)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \quad \varepsilon = \mathrm{const} > 0,$$

так что $L(r)$ не будет выполнять роль несущественного остаточного члена в (2) лишь когда $|B(r, a)| = O[rn(r, a)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, что может быть лишь при очень равномерном распределении a-точек функции w по аргументам.

Следующий наш результат устанавливает подобное соотношение для функций $w(z) \in M(D)$ — мероморфной в замыкании заданной односвязной области D с гладкой границей. При этом вместо сумм a-точек мы рассматриваем более общие выражения $B_\varphi(D, a) = \sum \varphi(z_i(a))$ где $\varphi(z)$ — аналитична в $\overline{D}$, а суммы берутся с учетом кратности a-точек $z_i(a)$. Будем пользоваться обозначениями: n — направление внешней нормали к границе ∂D области D; $n(z)$ — комплексное число с единичным модулем, направленное по n; ds — элемент границы ∂D; $h(f)$ — выражение, модуль которого не превосходит $|f|$; $l(\partial D)$ — длина ∂D; $L(\partial D)$ — сферическая длина w-образа ∂D; M_f — максимум модуля f на $\overline{D}$.

Теорема 1. *Пусть* $w(z) \in M(D)$, $a \in \mathbb{C}$. *Тогда*

1. $$B_\varphi(D, a) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n} \ln^+ \frac{1}{|w-a|} ds - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} n(z)\varphi'(z) \ln^+ \frac{1}{|w-a|} ds = C_\varphi(D) + h\left(\frac{5}{2\pi} M_\varphi (|a|+1)^3 L(\partial D) + \frac{3}{2\pi} M_{\varphi'} |a| l(\partial D)\right), \quad (3)$$

где
$$C_\varphi(D)=B_\varphi(D,\infty)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln^+|w|\,dz-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}n(z)\,\varphi'(z)\ln^+|w|\,ds.$$

II.
$$B_\varphi(D,a)+m_\varphi(D,a)=B_\varphi(D,\infty)+m_\varphi(D,\infty)+$$
$$+h\left(\frac{5}{2\pi}M_\varphi(|a|+1)^2(\partial D)\right), \tag{4}$$

где
$$m_\varphi(D,a)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Delta_1(a)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln\frac{1}{w-a}\,dz,\quad m_\varphi(D,\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Delta_2(0)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln w\,dz,$$
$$\Delta_1(a)=\{z: z\in\partial D,\ |w(z)-a|\leqslant 1\},\quad \Delta_2(a)=\{z: z\in\partial D,\ |w(z)-a|>1\}.$$

Отметим, что при $D=\{z: |z|<r\}$, $n(z)=e^{i\varphi}$, $\frac{\partial}{\partial n}f=\frac{\partial}{\partial r}f$, так что из (3) при $\varphi(z)=z$ вытекает (2).

Соотношение (4) имеет более простой вид, однако соотношение (3) практичнее, ибо интеграл $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}n(z)\varphi'(z)\ln^+\frac{1}{|w-a|}\,ds$ хорошо увязывается с функцией приближения $m(r,a)$, а выражение
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln^+\frac{1}{|w-a|}\,ds \text{ — с функцией } \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\ln^+\frac{1}{|w-a|}\,r\,d\varphi,$$
которая фигурирует в следующем аналоге первой основной теоремы (см. [3]): для мероморфной в C функции $w(z)$ и $a\in C$ имеет место
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\ln^+\frac{1}{|w-a|}\,r\,d\varphi+n(r,a)=A(r)+O(L(r)),\ r\to\infty,$$
где $A(r)$ — характеристика Л. Альфорса.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Установим сначала соотношение (4).

Рассмотрим два случая: 1) $\Delta_1(0)\cap\Delta_1(a)=\varnothing$ и 2) $\Delta_1(0)\cap\Delta_1(a)\neq\varnothing$. Случай 1). Имеем
$$\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln(w-a)\,dz=\int\limits_{\Delta_1(a)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln(w-a)\,dz+$$
$$+\int\limits_{\Delta_2(a)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln(w-a)\,dz=\int\limits_{\Delta_1(a)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln(w-a)\,dz+$$
$$+\int\limits_{\Delta_1(0)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln(w-a)\,dz+\int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln(w-a)\,dz=$$
$$=\int\limits_{\Delta_1(a)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln(w-a)\,dz+\int\limits_{\Delta_1(0)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln(w-a)\,dz+$$

$$+\int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln\frac{w-a}{w}dz+\int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln w dz=$$

$$=\int\limits_{\Delta_1(a)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln(w-a)\,dz+\int\limits_{\Delta_2(0)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln w dz+$$

$$+\int\limits_{\Delta_1(0)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln(w-a)\,dz+\int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln\frac{w-a}{w}dz+$$

$$+\left\{\int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln w dz-\int\limits_{\Delta_2(0)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln w dz\right\}. \qquad (5)$$

Оценим 3-й, 4-й интегралы и выражение в скобке в последнем соотношении. Учитывая, что в случае 1) при $z\in\Delta_1(0)$ выполняется неравенство $|w-a|>1$, следовательно $\sup\limits_{z\in\Delta_1(0)}\frac{1+|w|^2}{|w-a|}\leqslant 2$, получим

$$\left|\int\limits_{\Delta_1(0)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln(w-a)\,dz\right|\leqslant M_\varphi\int\limits_{\Delta_1(0)}\left|\frac{w'}{w-a}\right|ds\leqslant$$

$$\leqslant M_\varphi\sup_{z\in\Delta_1(0)}\frac{1+|w|^2}{|w-a|}\int\limits_{\Delta_1(0)}\frac{|w'|}{1+|w|^2}ds\leqslant 2M_\varphi\int\frac{|w'|}{1+|w|^2}ds. \qquad (6)$$

При $z\in\Delta_1(a)$ в случае 1) выполняется $|w|>1$ и $|w|<|a|+1$, так что

$$\left|\int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(a)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln w dz-\int\limits_{\Delta_2(a)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln w dz\right|=\left|-\int\limits_{\Delta_1(a)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln w dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant M_\varphi\int\limits_{\Delta_1(a)}\left|\frac{w'}{w}\right|ds\leqslant M_\varphi\sup_{z\in\Delta_1(a)}\frac{1+|w|^2}{|w|}\int\limits_{\Delta_1(a)}\frac{|w'|}{1+|w|^2}ds\leqslant$$

$$\leqslant M_\varphi((|a|+1)^2+1)\int\limits_{\Delta_1(a)}\frac{|w'|}{1+|w|^2}ds. \qquad (7)$$

Оценим теперь 4-й интеграл в последнем выражении равенства (5). Имеем

$$\left|\int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)}\varphi(z)\left[\frac{d}{dz}\ln(w-a)-\frac{d}{dz}\ln w\right]dz\right|=\left|\int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)}\varphi(z)\left[\frac{w'}{w-a}-\frac{w'}{w}\right]dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant M_\varphi\int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)}\frac{|a||w'|}{|w-a||w|}ds\leqslant M_\varphi|a|\sup_{z\in\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)}\frac{1+|a|^2}{|w-a||w|}\int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)}\frac{|w'|}{1+|w|^2}ds.$$

Поскольку при $z\in\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)$ выполняется $|w|>1$ и $|w-a|>1$, то

$$\frac{1+|w|^2}{|w-a||w|}=\frac{\frac{1}{|w|}+|w|}{|w-a|}<\frac{1+|w|}{|w-a|}=\left(\frac{1}{|w-a|}-\frac{|w|}{|w-a|}\right)<$$

$$<1+\frac{|w|}{|w-a|}<|a|+2,$$

откуда следует

$$\left| \int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln \frac{w-a}{w}\, dz \right| \leqslant M_\varphi |a| (|a|+2) \cdot \int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)} \frac{|w'|}{1+|w|^2}\, ds. \tag{8}$$

Объединяя соотношения (5)—(8) и учитывая, что множества интегрирования по оцениваемым интегралам не пересекаются, а также, что в случае 1) выполняется $|a| \geqslant 2$, получим

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a)\, dz + m_\varphi(D, a) - m_\varphi(D, \infty) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{5}{2\pi} M_\varphi (|a|+1)^2 L(\partial D).$$

По теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a)\, dz = B_\varphi(D, a) - B_\varphi(D, \infty),$$

так что из последнего неравенства вытекает (4) в случае 1).

Рассмотрим случай 2), когда $\Delta_1(0) \cap \Delta_1(a) \neq \varnothing$. Имеем

$$\int\limits_{\partial D} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a)\, dz = \int\limits_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a)\, dz +$$

$$+ \int\limits_{\Delta_2(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a)\, dz = \int\limits_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a)\, dz +$$

$$+ \int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a)\, dz + \int\limits_{\Delta_1(0)\setminus\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a)\, dz =$$

$$= \int\limits_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a)\, dz + \int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln \frac{w-a}{w}\, dz +$$

$$+ \int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w\, dz + \int\limits_{\Delta_1(0)\setminus\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a)\, dz =$$

$$= \int\limits_{\Delta_1(a)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln(w-a)\, dz + \int\limits_{\Delta_2(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w\, dz +$$

$$+ \int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln \frac{w-a}{w}\, dz + \int\limits_{\Delta_1(0)\setminus\Delta_1(a)} \varphi(z) \ln(w-a)\, dz +$$

$$+ \left\{ \int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w\, dz - \int\limits_{\Delta_2(0)} \varphi(z) \frac{d}{dz} \ln w\, dz \right\}. \tag{9}$$

Оценим 3-й, 4-й интегралы и выражение в скобках в последнем соотношении. При $z \in \Delta_2(a) \setminus \Delta_1(0)$ в случае 2) имеем $|w| > 1$, $|w-a| > 1$, так что как и при выводе неравенства (8), получим

$$\left|\int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)} \varphi(z)\frac{d}{dz}\ln\frac{w-a}{w}\,dz\right| \leqslant M_\varphi|a| \sup_{z\in\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)} \frac{1+|w|^2}{|w-a|\,|w|}\cdot\int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)}\frac{|w'|}{1+|w|^2}ds \leqslant$$

$$\leqslant M_\varphi|a|\,(|a|+1)\int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)}\frac{|w'|}{1+|w|^2}ds.$$

При $z\in\Delta_1(0)\setminus\Delta_1(a)$ выполняется $|w|\leqslant 1$, $|w-a|>1$ и поэтому

$$\left|\int\limits_{\Delta_1(0)\setminus\Delta_1(a)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln(w-a)\,dz\right|\leqslant M_\varphi \sup_{z\in\Delta_1(0)\setminus\Delta_1(a)}\frac{1+|w|^2}{|w-a|}\cdot\int\limits_{\Delta_1(0)\setminus\Delta_1(a)}\frac{|w'|}{1+|w|^2}ds<$$

$$<2M_\varphi\int\limits_{\Delta_1(0)\setminus\Delta_1(a)}\frac{|w'|}{1+|w|^2}ds.$$

Далее, при $z\in\Delta_1(a)\setminus\Delta_1(0)$ выполняется $|w|<|a|+1$ и $|w|>1$, следовательно

$$\left|\int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_1(0)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln w\,dz-\int\limits_{\Delta_2(0)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln w\,dz\right|=\left|-\int\limits_{\Delta_1(a)\setminus\Delta_1(0)}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln w\,dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant M_\varphi\sup_{z\in\Delta_1(a)\setminus\Delta_1(0)}\frac{1+|w|^2}{|w|}\cdot\int\limits_{\Delta_1(a)\setminus\Delta_1(0)}\frac{|w'|}{1+|w|^2}ds\leqslant M_\varphi[(|a|+1)^2+1]\times$$

$$\times\int\limits_{\Delta_1(a)\setminus\Delta_1(0)}\frac{|w'|}{1+|w|^2}ds.$$

Заметим, что $|a|\leqslant 2$ в случае 2), так что в этом случае выполняется

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln(w-a)\,dz+m_\varphi(D,\ a)-m_\varphi(D,\infty)\right|\leqslant$$

$$<\frac{5}{2\pi}M_\varphi(|a|+1)^2\cdot L(\partial D).$$

Теперь, точно так же как и при выводе неравенства (4) в случае (1), придем к нему в случае 2).

Докажем теперь соотношение (3). Пусть s_0 и n_0 — комплексные числа с единичным модулем, аргументы перпендикулярны и такие, что поворот от s_0 к n_0 совершается на прямой угол против часовой стрелки, т. е. $n_0=is_0$; s и n — направления, соответствующие этим единичным векторам. Напомним, что для производной аналитической функции $f=u+iv$ выполняется (см., например, [4], стр. 23)

$$f'(z)=\frac{1}{s_0}\left(\frac{\partial u}{\partial s}+i\frac{\partial v}{\partial s}\right)=\frac{1}{n_0}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+i\frac{\partial v}{\partial n}\right), \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n},\ \frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}. \tag{11}$$

Применим (10) к функции $\ln f$ на кривой ∂D, где $s_0=s_0(z)$ направлено по касательной к ∂D, а $n_0=n_0(z)$ направлено по внутренней нормали к ∂D. При этом $s_0 = s_0(z) = -in_0 = -in_0(z)$; $dz = -in_0(z)\,ds$, $\frac{\partial f}{\partial n^*}$ — производная функции f по внутренней нормали. Получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Delta_1(a)} \varphi(z)\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{1}{w-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Delta_1(a)}\varphi(z)\,\frac{1}{n_0(z)}\,\frac{\partial}{\partial n^*}\ln\frac{1}{|w-a|}\,dz +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(a)}\varphi(z)\,\frac{1}{n_0(z)}\,\frac{\partial}{\partial n^*}\arg\frac{1}{w-a}\,dz = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(a)}\varphi(z)\,\frac{\partial}{\partial n^*}\ln\frac{1}{|w-a|}\,ds -$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(a)}\varphi(z)\,\frac{\partial}{\partial n^*}\arg\frac{1}{w-a}\,ds. \tag{12}$$

Фактически при доказательстве соотношения (4) мы установили следующее соотношение (см. (12) и теорему о вычетах):

$$\Bigg| B_\varphi(D,\ a) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(a)}\varphi(z)\,\frac{\partial}{\partial n^*}\ln^+\frac{1}{|w-a|}\,ds - B_\varphi(D,\ \infty) +$$

$$+\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Delta_2(a)}\varphi(z)\,\frac{\partial}{\partial n^*}\ln^+|w|\,ds - \frac{i}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\,\frac{\partial}{\partial n^*}\arg\left(\frac{1}{w-a}\right)ds\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{5}{2\pi}M_\varphi(|a|+1)^2 L(\partial D). \tag{13}$$

Покажем теперь, что

$$\Bigg|\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\,\frac{\partial}{\partial n^*}\arg\frac{1}{w-a}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} n_0(z)\,\varphi'(z)\ln^+\frac{1}{|w-a|}\,ds +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} n_0(z)\,\varphi'(z)\ln^+|w|\,ds\Bigg| \leqslant \frac{3}{2\pi}M_{\varphi'}|a|\,l(\partial D). \tag{14}$$

В самом деле, используя равенства (11) и $s_0(z) = -in_0(z)$ и интегрируя по частям, имеем

$$-\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\,\frac{\partial}{\partial n^*}\arg\left(\frac{1}{w-a}\right)ds = -\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\frac{\partial}{\partial s}\ln\frac{1}{|w-a|}\,ds =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\varphi'_s(z)\ln\frac{1}{|w-a|}\,ds = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\varphi'(z)\,s_0(z)\ln\frac{1}{|w-a|}\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} n_0(z)\,\varphi'(z)\ln\frac{1}{|w-a|}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} n_0(z)\,\varphi'(z)\ln^+\frac{1}{|w-a|}\,ds -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_2(0)} n_0(z)\,\varphi'(z)\ln^+|w|\,ds + \Bigg\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_2(0)} n_0(z)\,\varphi'(z)\ln^+|w|\,ds -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_2(0)} n_0(z)\,\varphi'(z)\ln^+|w-a|\,ds\Bigg\}. \tag{15}$$

Выражение в скобках равно

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_2(a)\setminus\Delta_2(0)} n_0(z)\,\varphi'(z)\,(\ln^+|w-a|-\ln^+|w|)\,ds -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(a)\setminus\Delta_1(0)} n_0(z)\,\varphi'(z)\ln^+|w|\,ds+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(0)\setminus\Delta_1(a)} n_0(z)\,\varphi'(z)\ln^+|w-a|\,ds.$$

Модуль каждого из последних интегралов не превосходит величины $M_{\varphi'}|a|\,l(\partial D)/2\pi$, т. е. справедливо неравенство (14).

Из (13) и (14) получим

$$B_\varphi(D,a)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\frac{\partial}{\partial n^*}\ln^+\frac{1}{|w-a|}\,ds+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} n_0(z)\,\varphi'(z)\ln^+\frac{1}{|w-a|}\,ds=B_\varphi(D,\infty)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\frac{\partial}{\partial n^*}\ln^+|w|\,ds+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} n_0(z)\,\varphi'(z)\ln^+|w|\,ds+h\left(\frac{5}{2\pi}M_\varphi(|a|+1)^2L(\partial D)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2\pi}M_{\varphi'}|a|\,l(\partial D)\right).$$

Из последнего равенства, учитывая, что $\frac{\partial}{\partial n^*}f=-\frac{\partial}{\partial n}f$ и $n_0(z)=-n(z)$, получим равенство (2).

Величину $C_\varphi(D)$, очевидно, можно рассматривать как аналог неванлинновской характеристики $T(r)$. Интересно, что для величин $C_\varphi(D)$ и $B_\varphi(D,a)$ в полном объеме выполняется аналог тождества Картана (см. [1]): для мемроморфной в $\mathbf{C}$ функции

$$T(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} N(r,e^{i\theta})\,d\theta+\text{const}.$$

Именно, справедлива

Теорема 2. *Пусть $w(z)\in M(D)$. Тогда*

$$C_\varphi(D)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} B_\varphi(D,e^{i\theta})\,d\theta. \tag{16}$$

Докажем равенство (16). Из теоремы о вычетах, учитывая (12) и (15), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} B_\varphi(D,e^{i\theta})\,d\theta-B_\varphi(D,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln(w-e^{i\theta})\,dz\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln(w-e^{i\theta})\,d\theta\right]dz=$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\frac{\partial}{\partial n^*}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|w-e^{i\theta}|\,d\theta\right]ds +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}n_0(z)\varphi'(z)\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|w-e^{i\theta}|\,d\theta\right]ds.$$

Применив к последним интегралам известное равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|w-e^{i\theta}|\,d\theta = \ln^+|w|$$

и поменяв $\frac{\partial}{\partial n^*}f$ на $-\frac{\partial f}{\partial n}$, $n_0(z)$ — на $-n(z)$, получим (16).

Естественен следующий вопрос. Какая величина выполняет при рассмотрениях величин $B_\varphi(D, a)$ роль, аналогичную роли альфорсовской характеристики $A(r) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|\leq r}\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,r\,dr\,d\varphi$ — сферической площади w-образа круга $|z|\leqslant r$, с учетом кратности покрытия. Из геометрической интерпретации усматриваем, что

$$A(r) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{C} n(r, a)\,d\mu(a), \text{ где } a = |a|e^{i\alpha},\ d\mu(a) = \frac{|a|\,d|a|\,d\alpha}{(1+|a|^2)^2}$$

— сферическая площадь элемента сферы. В качестве искомого аналога величины $A(r)$ рассмотрим величину $A_\varphi(D) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{C} B_\varphi(D, a)\,d\mu(a)$.

Связь между величинами $A_\varphi(D)$ и $C_\varphi(D)$ устанавливает следующая

Теорема 3. *Пусть $w(z)\in M(D)$. Тогда*

$$A_\varphi(D) = C_\varphi(D) + h\left(\frac{M_\varphi}{\pi}L(\partial D) + \frac{M_{\varphi'}}{2\pi}l(\partial D)\right). \tag{17}$$

Докажем равенство теоремы 3. Поскольку $\frac{1}{\pi}\iint\limits_{C} d\mu(a) = 1$, из теоремы о вычетах получим

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{C}\Big(B_\varphi(D, a) - B_\varphi(D, \infty)\Big)d\mu(a) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{C}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\frac{d}{dz}\ln(w-a)\,dz\right)d\mu(a). \tag{18}$$

Учитывая соотношения (12) и (15), перепишем последний интеграл в виде

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\frac{\partial}{\partial n^*}\left[\frac{1}{\pi}\iint\limits_{C}\ln\frac{1}{|w-a|}\,d\mu(a)\right]ds +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} n_0(z)\,\varphi'(z)\left[\frac{1}{\pi}\iint\limits_{C}\ln\frac{1}{|w-a|}\,d\mu(a)\right]ds. \tag{19}$$

Согласно [1], стр. 181 выполняется

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{C}\frac{1}{|w-a|}\,d\mu(a)=\ln\frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}},$$

так что выражение (19) можем переписать так

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\frac{\partial}{\partial n^*}\ln\frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}}\,ds+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}n_0(z)\,\varphi'(z)\ln\frac{ds}{\sqrt{1+|w|^2}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(0)}\varphi(z)\frac{\partial}{\partial n^*}\ln\sqrt{1+|w|^2}\,ds+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_2(0)}\varphi(z)\frac{\partial}{\partial n^*}\ln\frac{\sqrt{1+|w|^2}}{|w|}\,ds+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\frac{\partial}{\partial n^*}\ln^+|w|\,ds-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(0)}n_0(z)\,\varphi'(z)\ln\sqrt{1+|w|^2}\,ds-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_2(0)}n_0(z)\,\varphi'(z)\frac{\ln\sqrt{1+|w|^2}}{w}\,ds-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}n_0(z)\,\varphi'(z)\ln|w|\,ds. \tag{20}$$

Поскольку $\ln\sqrt{1+|w|^2}$ на $\Delta_1(0)$ меньше чем 1/2, а $\ln\dfrac{\sqrt{1+|w|^2}}{|w|}$ на $\Delta_2(0)$ меньше чем 1/2, то 4-й и 5-й интегралы последнего выражения окажутся по модулю не больше $\dfrac{M_{\varphi'}}{4\pi}\,l(\partial D)$. Далее

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(0)}\varphi(z)\frac{\partial}{\partial n^*}\ln\sqrt{1+|w|^2}\,ds\right|\leqslant\frac{M_\varphi}{4\pi}\int\limits_{\Delta_1(0)}\frac{2|w|\,|w|'_{n^*}}{1+|w|^2}\,ds\leqslant\frac{M_\varphi}{2\pi}L(\partial D).$$

Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta_2(0)}\varphi(z)\frac{\partial}{\partial n^*}\ln\frac{\sqrt{1+|w|^2}}{|w|}\,ds\leqslant\frac{M_\varphi}{2\pi}\int\limits_{\Delta_2(0)}|w|\,|w|'_{n^*}\left|\frac{1}{1+|w|^2}-\frac{1}{|w|^2}\right|ds\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M_\varphi}{2\pi}\int\limits_{\Delta_2(0)}\frac{1}{|w|}\cdot\frac{|w'|}{1+|w|^2}\,ds\leqslant\frac{M_\varphi}{2\pi}L(\partial D).$$

Из (18) — (20) и последних оценок следует (17).

Институт математики
АН Армянской ССР,
Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 13. VII. 1987

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ, Կ. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների a-կետերում անալիտիկ ֆունկցիաների արժեքների մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ներմուծվում են բնութագրիչ ֆունկցիաներ, որոնք կապում են $w(z)$ մերոմորֆ միակապ D տիրույթում a-կետերի գումարը, $w(z)$-ի ասիմպտոտիկ վարքի և համապատասխան բնութագրիչի վարքի հետ։

Այդ բնութագրիչների վարքը, բնականորեն, նկարագրում է a-կետերի արգումենտները և մոդուլները։

G. A. BARSEGIAN, K. N. MARTIROSIAN. *On the value of analytical functions on the set of a-points meromorphic in the given domain of the function* (summary)·

In this paper characteristic functions are introduced, which connect the behaviour of the sums of a-puints, meromorphic in the simply connected domain of D function, with asymptotic behaviour and the corresponding characteristics. This characteristic functions give the natural description of the arguments and modules of a-points.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитическиее функции.
2. *Г. А. Барсегян.* О распределени сумм a-точек мероморфных функций, ДАН СССР, 1977, 232, № 4, 741—744.
3. *Г. А. Барсегян.* О геометрической структуре образа круга при отображениях мероморфными функциями, Мат. сборник, 1978, 106, № 1, 35—43.
4. *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат.* Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», 1973.