

УДК 517.986.6

С. А. ГРИГОРЯН

ОБОБЩЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПЮ АРЕНСУ—ЗИНГЕРУ ФУНКЦИИ

Введение

В начале 60-ых годов Р. Аренс и И. Зингер начали изучение специального вида алгебр функций, порожденных полугруппой характеров локально компактной абелевой группы. Этим функциям присущи многие свойства аналитичности, отсюда и их название — обобщенные аналитические функции. К алгебрам обобщенных аналитических функций можно отнести равномерную алгебру на компактной группе, инвариантную относительно сдвигов. Приведем наиболее характерный пример такой равномерной алгебры.

Пусть G — компактная абелева группа, характеры которой образуют аддитивную подгруппу Γ группы вещественных чисел $\mathbb{R}$, наделенную дискретной топологией. Тогда равномерная алгебра A на G , порожденная характеристиками из $\Gamma_+ = \{x \in \Gamma; x \geq 0\}$, является алгеброй обобщенных аналитических функций. Интерес к такой алгебре обусловлен тем, что в случае, когда Γ изоморфна $\mathbb{Z}$ ($\Gamma = \mathbb{Z}$), A — диск-алгебра, а в случае $\Gamma = \mathbb{R}$ A изоморфна алгебре равномерно почти-периодических аналитических функций в верхней полуплоскости. Это, в частности, позволяет с единой точки зрения взглянуть на многие вопросы теории функций одного комплексного переменного и теории почти-периодических функций (см., например, [1]—[6]).

В настоящей работе продолжается изучение таких обобщенных аналитических функций: описываются аналитические свойства этих функций, вводится понятие производной, устанавливается формула Иенсена, дается новая трактовка известных теорем теории почти-периодических аналитических функций (Г. Бора, А. Безиковича, Б. Я. Левина, Дж. Фаварда и др., ср. [8], [9]).

Содержание статьи распределено по параграфам. В § 1 приведены определение обобщенной аналитической функции, примеры и результаты, необходимые для дальнейшего. В §§ 2—6 формулируются и доказываются теоремы, в которых явно прослеживается специфика обобщенных аналитических функций.

Часть результатов ранее была анонсирована в [14]—[16].

§ 1. Обобщенные аналитические функции

Пусть G — такая компактная абелева группа, группа характеров которой изоморфна некоторой аддитивной подгруппе Γ группы веществен-

ных чисел R , наделенной дискретной топологией. Поэтому можно считать, что Γ — группа характеров G . Заметим, что по теореме двойственности Понтрягина верно и обратное — группа G есть группа характеров группы Γ . На локально компактном пространстве Ω , полученном из декартова произведения $G \times [0, \infty)$, путем отождествления слоя $G \times \{0\}$, в точку для каждого $\alpha \in \Gamma_+ = \{\alpha \in \Gamma, \alpha \geq 0\}$ рассмотрим функцию φ^α , полагая для $s = \alpha \cdot r \in \Omega$ $\varphi^\alpha(s) = \alpha(\alpha) \cdot r^\alpha$. Можно проверить, что φ^α — непрерывная на Ω функция и семейство $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha \in \Gamma_+}$ разделяет точки Ω .

Определение 1.1. Пусть D — открытое множество в Ω и f — непрерывная функция на D . Будем говорить, что f — обобщенно аналитическая или просто аналитическая функция на D , если она локально в некоторой окрестности каждой точки из D аппроксимируется линейными комбинациями функций из $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha \in \Gamma_+}$.

Аналитическую на всем Ω функцию будем называть целой, конечную комбинацию функций из $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha \in \Gamma_+}$ — полиномами, а отношение двух полиномов — рациональной функцией.

В зависимости от выбора Γ получаются различные пространства Ω .

Пример [5]. Пусть $G = T^2$ — двумерный тор $\mathbb{C}^2$ и α — положительное иррациональное число. Рассмотрим отображение τ из $Z_2 = Z \oplus Z$ в R : $\tau(m, n) = m + \alpha n$. Положим $\Gamma = \{m + \alpha n, (m, n) \in Z_2\}$ и $\Gamma_+ = \Gamma \cap R_+$. Для каждого $\alpha = m + \alpha n \in \Gamma_+$ определим на пространстве $\Omega = G \times [0, \infty) / G \times \{0\}$ функцию φ^α , полагая для $s \in \Omega$, $s = (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \cdot r$, $\varphi^\alpha(s) = e^{i(m\theta_1 + n\theta_2)} \cdot r^\alpha$. Очевидно, в этом примере множество $\Omega \setminus \{*\}$, $* = G \times \{0\}$ — вещественное многообразие размерности 3.

В дальнейшем для $s \in \Omega$, $s = \alpha \cdot r$, число r будем называть модулем элемента s и обозначать $|s|$.

Отметим, что на пространстве Ω можно определить действие как группы G , так и R_+ , если $s = \alpha \cdot r_0 \in \Omega$, $\beta \cdot s = (\alpha \cdot \beta) \cdot r_0$, $s \cdot r = \alpha \cdot (r \cdot r_0)$, где $\beta \in G$, $r \in R_+$.

Пусть A — равномерная алгебра на некотором компакте X , т. е. содержащая константы и разделяющая точки, замкнутая в равномерной норме подалгебра $C(X)$ алгебры всех непрерывных комплекснозначных функций на X . Говорят, что алгебра A — максимальная алгебра Дирихле, если $Re A = C_R(X)$ — пространству всех вещественнозначных функций на X , и любая равномерная алгебра на X , строго содержащая A , совпадает с $C(X)$. Известным примером максимальной алгебры Дирихле служит след-диск алгебры на единичный круг.

Другой пример строится следующим образом.

Предложение 1.2 Пусть $\Omega_1 = \{s \in \mathbb{D}; |s| \leq 1\}$ и A — пространство всех обобщенно аналитических в $\text{int } \Omega_1$ и непрерывных вплоть до $T_1 = \{s \in \Omega; |s| = 1\}$ функций. Тогда

- i) A — равномерная алгебра на Ω_1 ;
- ii) пространство максимальных идеалов алгебры A есть Ω_1 ;
- iii) граница Шилова алгебры A совпадает с T_1 , а сужение A на T_1 является максимальной алгеброй Дирихле;
- iv) полиномы плотны в A .

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из работы [5].

Пусть μ — мера Хаара группы G . Так как обобщенная окружность $T_r = G \times \{r\}$ естественным образом наделяется структурой группы G , можно считать, что μ — мера Хаара на T_r . Поскольку характеры из Γ образуют ортонормированный базис в $L^2(G, d\mu)$, для любого $f \in C(T_r)$ существует формальный ряд $f \simeq \sum_{a \in \Gamma} c(a) \varphi^a$, $\varphi^a = \overline{\varphi^{-a}}$, где

$$c(a) = \int_{T_r} f / \varphi^a d\mu. \text{ В частности } f \in A|_{T_r} \text{ тогда и только тогда, когда}$$

$$c(a) = 0 \text{ для всех } a \in \Gamma \setminus \Gamma_+.$$

Пусть теперь функция $f \in L^2(T_1, d\mu)$, $f \sim \sum_{a \in \Gamma} c(a) \varphi^a$. Преобразование Гильберта H этой функции представляется в виде ряда

$$Hf = \sum_{a \in \Gamma} c(a) \operatorname{sign}(a) \cdot \varphi^a \in L^2(T_1, d\mu).$$

Оператор H , в силу теоремы Парсеваля, непрерывен и $\|Hf\| = \|f\|$, а так как оператор вложения $C_R(T_1)$ в $L^2(T_1, d\mu)$ также непрерывен, H является непрерывным отображением из $C_R(T_1)$ в $L^2(T_1, d\mu)$. И поскольку $\operatorname{Re} A|_{T_r}$ плотно в $C_R(T_1)$ каждую функцию $u \in C_R(T_1)$ можно расширить до некоторой функции $\hat{u} \in \overline{\operatorname{Re} A}$ на $\mathcal{Q}_1$.

В случае, когда $\Gamma = \mathbb{Z}$, найдется такая аналитическая в $\operatorname{int} \mathcal{Q}_1$ функция f , что $\hat{u} = \operatorname{Re} f$. Дж. Милашевич в [12] показал, что в общем случае этот факт неверен (пример Х. Бора и Дж. Фоварда для аналитических почти-периодических функций см. [8]). Здесь приведем простое доказательство этого результата, заметив, что если f — обобщенная аналитическая функция в $\operatorname{int} \mathcal{Q}_1$, для любого $r > 0$, $f_r(s) = f(r \cdot s)$ принадлежит алгебре A .

Предложение 1.3. Пусть $\Gamma \neq \mathbb{Z}$, тогда существует такая функция $u \in C_R(T_1)$, что соответствующая ей функция $\hat{u}$ не является вещественной частью аналитической в $\operatorname{int} \mathcal{Q}_1$ функции.

◀ Доказательство проведем от противного. Зафиксируем r , $0 < r < 1$. Тогда, в силу допущения, для всякого $u \in C_R(T_1)$ найдется $f \in A$ такая, что $\operatorname{Im} f(*) = 0$ и $\operatorname{Re} f = \hat{u}_r$, где $\hat{u}_r(s) = \hat{u}(s \cdot r)$. А так как отображение $u \rightarrow \hat{u}_r$, $u \in C_R(T)$, непрерывно в равномерной топологии см. предложение 1.2 iii)) и равномерная норма сильнее, чем L^2 -норма, применив теорему о замкнутом графике, получим, что непрерывный в L^2 норме оператор $H_r: u \rightarrow H(\hat{u}_r)$, отображающий $C_R(T_1)$ в $\operatorname{Im} A$, также непрерывен в равномерной топологии.

Пусть $\|H_r\| = \sup_{\|u\| \leq 1} |H(\hat{u}_r)| = c$. Рассмотрим в единичном круге D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ такую аналитическую функцию g , $\operatorname{Im} g(0) = 0$,

что функция $u = \operatorname{Re} g$ непрерывно продолжается вплоть до границы, $|u| < 1$, а $v = \operatorname{Im} g$ неограничена в D . Поэтому для некоторого $z \in D$, $|v(z)| > c$. Выберем $a \in \Gamma_+$ так, что $z \notin \varphi^a(\mathcal{Q}_1 \setminus \mathcal{Q}_r)$. Тогда функция $f = g \circ \varphi^a \in A$ и $|\operatorname{Re} f| = |u \circ \varphi^a| < 1$, а $\|H(\operatorname{Re} f_r)\| = \sup_{\mathcal{Q}_r} |v \circ \varphi^a| > |v(z)| > c$.

Пришли к противоречию. ►

Теперь перейдем к описанию локальной структуры пространства Ω . Следуя Р. Аренсу и И. Зингеру [1], рассмотрим непрерывный гомоморфизм $h: R \rightarrow G$, $h(x) = a_x \in G$, полагая $a_x(a) = e^{iax}$, $a \in \Gamma$. В случае, когда Γ не изоморфна группе целых чисел, h взаимно однозначно отображает R на всюду плотную подгруппу группы G . Действительно, в противном случае из известных фактов теорий абелевых компактных групп нашлось бы $a \in \Gamma$, $a \neq 0$ такое, что $a_x(a) = 1$ для всех $x \in R$, т. е. $e^{iax} = 1$. А это невозможно. Следовательно $\overline{h(R)} = G$.

Заметим, что в случае $\Gamma = \mathbb{Z}$, $h(R) = G$.

Зададим теперь отображение χ из C в $\mathcal{Q}$, полагая для $z = x + iy$

$$\chi(x + iy) = a_x \cdot e^{-y}. \quad (1.1)$$

Из вышесказанного следует, что в случае $\Gamma \neq \mathbb{Z}$ χ непрерывно взаимно однозначно отображает C на C_Γ — всюду плотное подмножество в $\mathcal{Q}$. Кроме того, так как

$$\varphi^a \circ \chi(z) = e^{iaz}, \quad (1.2)$$

сужение целой обобщенно аналитической функции f на C_Γ является целой (даже почти-периодической) функцией. Множество $\chi(R) = R_\Gamma$ совпадает с $C_\Gamma \cap T_1$ и, в случае $\Gamma \neq \mathbb{Z}$ является всюду плотной подгруппой группы T_1 .

Пусть W — компакт в C и $P(W)$ — равномерная алгебра на W , порожденная полиномами. Для фиксированного $a \in \Gamma$, $G_a = \{a \in G, a(a) = 1\}$ — подгруппа группы G .

Через B обозначим пространство всех целых функций на Ω .

Предложение 1.4. Для каждой точки пространства $\mathcal{Q} \setminus \{*\}$ существует замкнутая окрестность F , гомеоморфная декартову произведению $W \times G_a$ (W — некоторое замкнутое подмножество в C), так что равномерная алгебра B_F , полученная из равномерного замыкания сужения B на F , изометрически изоморфна равномерной алгебре на $W \times G_a$, порожденной функциями вида $f \cdot g$, где $f \in P(W)$, $g \in C(G_a)$.

► Пусть $w = |e^{i\theta}$, $|\theta| \leq \pi/2$ — дуга на единичной окружности. Зафиксируем $a \in \Gamma_+$ и рассмотрим два множества: $K = \{a \in G; \pi(a) \in w\}$ и $l = \{x \in R; |x| \leq \pi/2a\}$. Определим отображение h° из $l \times G_a$ на K , полагая $h^\circ(x \cdot a) = h(x) \cdot a$. Покажем, что h° — гомеоморфизм. Пусть $a_0 \in K$, т. е. $a_0(a) = e^{i\theta}$, $|\theta| \leq \pi/2$. Из построения h следует, что найдется $x \in l$ такое, что $h(x) = e^{-i\theta}$. Поэтому $h(x) \cdot a_0 \in G_a$. Следовательно, $a_0 \in h(l) \cdot G_a$. Пусть теперь $s \in \mathcal{Q} \setminus \{*\}$, $s = \beta \cdot r$ и $F = \beta K \times [r_1, r_2]$, $0 < r_1 < r < r_2$ — некоторая окрестность точки s . Полагая $W = \{z \in C; \operatorname{Re} z \in l, \operatorname{Im} z \in [-\log r_2, -\log r_1]\}$, определим отображение χ_0 из $W \times G_a$ на F : $\chi_0(z, a) = \beta \cdot a \cdot \chi(z)$. Так как $a(a) = 1$, $a \in G_a$, функция $\varphi^a \chi_0(z, a) = \beta(a) e^{iaz}$ не зависит от a , аналитична по z и разделяет точки W .

Поэтому в силу теоремы Мергеляна любая непрерывная на W и аналитическая в $\text{int } W$ функция аппроксимируется полиномами от e^{ibz} . Следовательно, $P(W)$ содержится в $B_{F^0\chi_0}$ — равномерной алгебре на $W \times G_a$. Покажем теперь, что $C(G_a) \subset B_{F^0\chi_0}$. Согласно (1.2) $\varphi^b \chi(z, \alpha) = \alpha(b) \beta(b) e^{ibz}$ для $b \in \Gamma_+$. Пусть $f \in P(W)$ такое, что $f(z) = e^{ibz}$. Из полиномиальности выпуклости W имеем $f^{-1}(z) \in P(W)$, т. е. $g_b = f^{-1} \cdot (\varphi^b \chi_0) \in B_{F^0\chi_0}$. Так как $|g_b(z, \alpha)| = |\beta(b) \cdot \alpha(b)| = 1$ и пространство максимальных идеалов алгебры B_F есть F , g_b^{-1} принадлежит $B_{F^0\chi_0}$. Теперь заметив, что система функций $\{g_b\}_{b \in \Gamma_+}$ разделяет точки G_a , получим $C(G_a) \subset B_{F^0\chi_0}$ (теорема Стоуна—Вейерштрасса). Пусть теперь $g \in B_F$. Тогда функция $g^0 \chi_0(z, \alpha)$ при каждом фиксированном $\alpha \in G_a$ принадлежит $P(W)$. Следовательно, в силу теоремы Бишопа—Шилова $g^0 \chi_a$ принадлежит равномерной алгебре $\overline{P(W) \cdot C(G_a)}$. ►

Следствие Пусть $s \in \mathbb{Q}$, $s \neq *$ и V — такое компактное подмножество в C_Γ , что $W = \varphi^s(V)$ является окрестностью точки $\varphi^s(s)$ в C . Тогда множество $V \cdot G_a$ — окрестность точки s , и $V \cdot G_a$ гомеоморфно $W \times G_a$.

Предложение 1.5. Пусть μ и γ — нормированные меры Хаара групп G и G_a , соответственно, а K — множество, фигурирующее в доказательстве предыдущего утверждения. Тогда сужение μ на K совпадает с $\frac{2a}{\pi} dx \times d\gamma$.

◀ Поскольку $K = I \times G_a$, для доказательства достаточно показать, что для любого $b \in \Gamma_+$

$$\int_K b(\alpha) d\mu(\alpha) = \frac{a}{2\pi} \int_I \int_{G_a} b(x \cdot \beta) dx \cdot d\gamma(\beta).$$

Легко проверить, что $\int_K d\mu = 1/2$ и $\frac{a}{2\pi} \int_I \int_{G_a} dx d\gamma = 1/2$. Пусть

$b \in \Gamma_+ \setminus \{0\}$ не является степенью a . Тогда сужение b на G_a — нетривиальный характер группы G_a . Следовательно

$$\int_I \int_{G_a} b(x \cdot \beta) dx \times d\gamma(\beta) = \int_I \int_{G_a} e^{ixb} b(\beta) dx d\gamma(\beta) = 0,$$

так как $\int_{G_a} b(\beta) d\gamma(\beta) = 0$.

С другой стороны, поскольку $\beta \cdot K = K$ для любого $\beta \in G_a$ и μ — инвариантная мера, имеем

$$\int_K b(z) d\mu(\alpha) = \int_K b(\beta\alpha) d\mu(\alpha) = b(\beta) \int_K b(z) d\mu = 0.$$

Для подсчета $\int_K a(z) d\mu(z)$ заметим, что характер $a \in \Gamma_+$ порождает отображение G на единичный круг, причем полный прообраз дуги $w = \{e^{i\theta}; -\pi/2\}$ есть K . Поэтому $\int_K a(z) d\mu = 1/2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\theta} d\theta = \frac{i}{\pi}$.

Аналогично $\frac{a}{2\pi} \int_i \int_{\sigma_a} a(x \cdot \beta) dx d\gamma(\beta) = \frac{i}{\pi} \triangleright$

§ 2. Голоморфные отображения

Пусть $\mathcal{Q}(r_1, r_2) = \{s \in \mathcal{Q}; r_1 \leq |s| \leq r_2\}$ и $B(r_1, r_2)$ — алгебра всех обобщенных аналитических функций в $\text{int } \mathcal{Q}(r_1, r_2)$, непрерывных вплоть до $T_{r_1} \cup T_{r_2}$. Для каждой функции $f \in B(r_1, r_2)$ существует формальный ряд

$$f \sim \sum_{a \in \Gamma} c(a) \varphi^a, \quad \varphi^{-a} = (\varphi^a)^{-1}, \quad (2.1)$$

где $c(a) = \int_{T_r} f \varphi^a d\mu$ не зависит от выбора r , $r_1 \leq r \leq r_2$ [7].

Дальнейшее утверждение является аналогом следующей теоремы Бора—ван Кампена: пусть G — связная компактная абелева группа и $f \in C(G)$ не обращается в нуль на G . Тогда существует характер φ группы G и функция $g \in C(G)$ такая, что $f = \varphi \cdot \exp g$ (см. [10]).

Лемма 2.1. Пусть функция $f \in B(r_1, r_2)$ не обращается в нуль на $\mathcal{Q}(r_1, r_2)$. Тогда найдутся $a \in \Gamma$ и $g \in B(r_1, r_2)$ такие, что $f = \varphi^a \cdot \exp g$.

◀ По теореме Бора—ван Кампена для фиксированного r_0 , $r_1 \leq r_0 \leq r_2$, существуют $a_0 \in \Gamma$ и $\Psi_{r_0} \in C(T_{r_0})$ такие, что $f(a \cdot r_0) = a(a_0) \cdot \exp \Psi_{r_0}(z)$. Поэтому для любого r , $r_1 \leq r \leq r_2$ такого, что $|f(a \cdot r) - f(a \cdot r)| < M$, $M = \int_{\mathcal{Q}(r_1, r_2)} |f|$, имеем $f(a \cdot r) = a(a_0) \cdot \exp \Psi_r(z)$. Отсюда,

так как f — непрерывная по r функция, для всех $a \cdot r \in \mathcal{Q}(r_1, r_2)$, $f(a \cdot r) = a(a_0) \cdot \exp \Psi_r(a)$, где $\Psi_r(a)$ непрерывна, вообще говоря, только по a . А поскольку $f(e \cdot r) = f(r)$ не обращается в нуль на отрезке $[r_1, r_2]$, функция $g(a \cdot r) = \Psi_r(z) - \Psi_r(e) + \log f(r) - a_0 \log r$ непрерывна на $\mathcal{Q}(r_1, r_2)$ и $f = \varphi^{a_0} \cdot \exp g$. Но пространство максимальных идеалов алгебры $B(r_1, r_2)$ есть $\mathcal{Q}(r_1, r_2)$ (см. [7]). Поэтому $g \in B(r_1, r_2)$ ▶

Следующая лемма является некоторым вариантом принципа Фратти-на-Линделёфа для обобщенных аналитических функций.

Лемма 2.2. Пусть f — обобщенная аналитическая функция на $\mathcal{Q}_1 \setminus \{*\}$, $* = G \times \{0\}$ такая, что $\text{Re } f(s) \leq c \log |s|$ для всех $s \in \mathcal{Q}_1 \setminus \{*\}$. Тогда f расширяется до функции из A .

◀ Отметим, что утверждение тривиально для функции одного комплексного переменного. Действительно, если функция $f(z)$ аналитична в единичном круге с выколотым нулем и удовлетворяет условию леммы,

нуль является устранимой особенностью. Доказывается это следующим образом.

Имеем

$$|\exp f(z)| \leq |z|^c < \frac{1}{|z|^n}, \quad n > c.$$

Отсюда функция $g(z) = z^n \exp f(z)$ аналитически продолжается на весь диск. Поэтому $g(z) = z^m \exp k(z)$, где $k(z)$ — аналитическая в единичном круге функция. Применяя принцип аргумента, имеем $m = n$ и $f(z) - k(z) = \text{const.}$

Доказательство в общем случае производится по следующей схеме. Поскольку f — аналитическая на $\Omega_1 \setminus \{*\}$ функция, то она представима в виде ряда $\sum_{a \in \Gamma} c(a) \varphi^a$. Покажем, что для $a \in \Gamma$, $-a \in \Gamma_+$, $c(a) = 0$. Это и будет означать, что $f \in A$.

Допустим противное. Пусть для некоторого $a \in -\Gamma_+$, $c(a) \neq 0$. Тогда функция

$$g(a \cdot r) = \int_{\sigma_a} f(a \cdot \beta \cdot r) d\gamma(\beta) \quad (\gamma \text{ — мера Хаара } G_a)$$

также обобщенно аналитическая функция и ее ряд имеет вид $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c(na) \cdot \varphi^{na}$, $c(a) \neq 0$. Поэтому g можно рассматривать как аналитическую от φ^a функцию. Кроме того $\text{Re } g(s) < c \log |s|$. Следовательно, в силу вышесказанного, $g(s)$ аналитически продолжается на все Ω_1 , т. е. $c(a) = 0$. ►

Теорема 2.3. Пусть для $f \in A$ существует такое $r > 1$, что f не обращается в нуль на $\Omega_r \setminus \{*\}$, $\Omega_r = \{s \in \Omega; |s| \leq r\}$. Тогда найдутся $a \in \Gamma_+$ и $g \in A$, $g(*) \neq 0$ такие, что $f = \varphi^a g$.

◀ Если $f(*) \neq 0$, то теорема тривиальна. Достаточно взять $a = 0$, $g = f$. Пусть $f(*) = 0$. Тогда по лемме 2.1 найдутся обобщенно аналитическая на $\Omega_r \setminus \{*\}$ функция Ψ и $a \in \Gamma$ такие, что на $\Omega_r \setminus \{*\}$ справедливо

$$f = \varphi^a \cdot \exp \Psi. \quad (2.2)$$

Поэтому $\text{Re } \Psi(s) < c \log |s|$ для всех $s \in \Omega_r \setminus \{*\}$ и некоторого фиксированного $c > 0$. По лемме 2.2 функция f/φ^a ограничена на $\Omega_r \setminus \{*\}$ и, следовательно, ее можно расширить до некоторого $g \in A$ (см. теорему 4.2). ►

Следствие. В разложении (2.2) $a \in \Gamma_+$.

В работе [2] Р. Аренс описал автоморфизмы алгебры A . В случае, когда $\Gamma = \mathbb{Z}$, эти автоморфизмы порождаются преобразованиями Мёбиуса. В остальных случаях каждый автоморфизм на алгебре A порождается некоторым сдвигом группы G и сохраняющим порядок автоморфизмом группы Γ . Напомним, что автоморфизм τ на Γ сохраняет порядок, если $\tau(\Gamma_+) = \Gamma$. Например, в случае $\Gamma = R$ группа автоморфизмов на R , сохраняющих порядок, совпадает с $R_+ \setminus \{0\}$ — группой относительно умножения. Гомоморфизмы же, действующие на ал-

гребре A , определяются несколько иначе. Прежде чем описать эти гомоморфизмы, приведем одно понятие.

Определение 2.4. Будем говорить, что отображение $H: \mathcal{Q}_1 \rightarrow \mathcal{Q}_1$ голоморфно, если для любого $f \in A$ функция $f \circ H$ принадлежит A .

Следующее утверждение является аналогом леммы Шварца.

Теорема 2.5. Пусть H — голоморфное отображение и $H(*) = *$. Тогда найдется такое $b \in \Gamma_+$, что

$$|H(s)| \leq |s|^b.$$

◀ В случае, когда Γ изоморфна $\mathbb{Z}$, утверждение леммы есть лемма Шварца.

Пусть Γ не изоморфна $\mathbb{Z}$, т. е. Γ_+ плотно в R_+ .

Покажем, что если $s \neq *$, $|s| < 1$, $H(s) \neq *$. Из предложения 1.4 следует: функция $\varphi^a \circ H$ аналитична как функция одного переменного на некотором множестве $F \subset \mathcal{Q}_1$, содержащем s . Поэтому $H(s) = *$ означало бы, что $\varphi^a \circ H(s) = 0$ для всех $a \in \Gamma_+$. И поскольку для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ найдутся $b_1, \dots, b_n \in \Gamma$ такие, что $a = \sum_1^n b_i$, то $\varphi^a \circ H = \prod_1^n (\varphi^{b_i} \circ H)$ и, следовательно, функция $\varphi^a \circ H$ на F имеет нуль бесконечной кратности, а это невозможно. Таким образом, $H(s) \neq *$.

Рассмотрим теперь функцию $f(s) = \varphi^a \circ H(s)$. Так как $f(*) = 0$ и $f \neq 0$ на $\mathcal{Q}_1 \setminus \{*\}$, $r < 1$, применив теорему 2.3, получим $f = \varphi^a \circ g$, $d \in \Gamma_+$, $g \in A$, $\sup_{\mathcal{Q}_1} |g| < 1$. Поэтому $|\varphi^a(H(s))| \leq |\varphi^d(s)| = |s|^d$, т. е. $|H(s)|^a \leq |s|^d$. Взяв $b < \frac{d}{a}$, $b \in \Gamma_+$, получим утверждение теоремы. ▶

Перейдем теперь к гомоморфизмам, действующим на алгебре. Заметим, что существует взаимно однозначное соответствие между гомоморфизмами и голоморфными отображениями.

Теорема 2.6. Пусть $\Gamma \neq \mathbb{Z}$, тогда каждый гомоморфизм на алгебре A задается тройкой (σ, V_σ, k) , где σ (возможно и тривиальный) — сохраняющий порядок гомоморфизм на Γ , V_σ — оператор сдвига на $a \in G$, а k — обобщенная аналитическая в $\text{int } \mathcal{Q}_1$ функция, $\text{Re } k(s) \leq 0$ и $f(s) = \exp k(s) \in A$. Верно и обратное, каждая такая тройка (σ, V_σ, k) определяет гомоморфизм на A .

◀ Пусть H^0 — гомоморфизм на A , и H — соответствующее ей голоморфное отображение. Предположим сначала $H(*) = *$. Так как $H(s) \neq *$ для $s \in \mathcal{Q}_1$, $0 < |s| < 1$ (см. доказательство предыдущей теоремы), по теореме 2.3 имеем

$$H^0 \varphi^a = \varphi^{\sigma(a)} g_a, \quad a \in \Gamma_+, \quad (2.3)$$

где σ — гомоморфизм на Γ_+ , продолжающийся до сохраняющего порядок гомоморфизма из Γ в Γ , g_a — обобщенно аналитическая функция, не обращающаяся в нуль на $\text{int } \mathcal{Q}_1$, $g_{a+b} = g_a \cdot g_b$. При каждом фиксированном $s \in \mathcal{Q}_1$, $g_a(s)$ определяет характер на полугруппе Γ_+ , поэтому найдутся $\alpha \in G$ и $r > 0$ такие, что $g_a(*) = \alpha(a) \cdot r^a$ для всех $a \in \Gamma_+$.

Пусть $f_a = \alpha(a) \cdot g_a$. Тогда существует k -обобщенно аналитическая в $\text{int } \Omega_1$ функция такая, что

$$f_a(s) = \exp \alpha \cdot k(s).$$

Таким образом

$$H^0 \varphi^a = \varphi^{\sigma(a)} \cdot \alpha(a) \cdot \exp \alpha \cdot k.$$

Следовательно, гомоморфизм H^0 определяется тройкой (σ, V_α, k) . Пусть $H(*) \neq *$, тогда в (2.3) $\sigma = 0$ и поэтому H^0 задается тройкой $(0, V_\alpha, k)$. Пусть теперь дана тройка (σ, V_α, k) . Определим при каждом фиксированном $s \in \Omega$ характер τ_s на Γ_+ : $\tau_s(a) = \sigma(a) \cdot \alpha(a) \exp \alpha \cdot k(s)$. Так как $\text{Re } k(s) < 0$, то найдутся $\beta_s \in G$ и $r_s \in [0, 1]$ такие, что $\tau_s(a) = \beta_s(a) \cdot r_s(a)$. Определим отображение $H: \Omega \rightarrow \Omega_1$, полагая $H(s) = \beta_s \cdot r_s$. Так как $\varphi^a H(s) = \beta_s(a) r_s(a) = \sigma(a) \alpha(a) \exp \alpha \cdot k(s)$, $\varphi^a H(s)$ — обобщенная аналитическая функция на Ω_1 . Поэтому H — голоморфное отображение, следовательно, соответствующее ей отображение H^0 — гомоморфизм. ►

Следствие [2]. Пусть $\Gamma \neq \mathbb{Z}$, тогда каждый автоморфизм на A определяется парой (σ, V_α) , где σ — сохраняющий порядок автоморфизм на Γ , а V_α — оператор сдвига.

◄ Пусть H^0 — автоморфизм. Тогда $H(T_1) = T_1$. Поэтому $k(s) = 0$ и σ — автоморфизм. ►

Заметим, что существуют такие подгруппы группы R , на которых нет нетождественного, сохраняющего порядок, автоморфизма. Примером служит группа Γ (§ 1, пример).

§ 3. Теоремы единственности

Каждая аналитическая функция, заданная на связном открытом множестве D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяет условию единственности, т. е. если аналитическая функция f равна нулю на некотором открытом подмножестве множества D , то $f \equiv 0$ на D . Естественно поставить вопрос: верно ли аналогичное утверждение в пространстве Ω в случае, когда $\Gamma \neq \mathbb{Z}$ (что и предполагается везде в этом параграфе). Прежде, чем ответить на этот вопрос, напомним: линейные комбинации функций из $\{\varphi^a\}_{a \in \Gamma_+}$ — полиномы, а отношение двух полиномов — рациональная функция. Семейство полиномов будем обозначать через P .

Определение 3.1. Пусть K — компакт в Ω . Полиномиально выпуклой оболочкой K назовем множество $K^0 = \{s \in \Omega; |p(s)| \leq \sup_K |p|, p \in P\}$,

а рационально выпуклой оболочкой — множество $K_0 = \left\{s \in \Omega,$

$\left| \frac{p_1(s)}{p_2(s)} \right| \leq \sup_K \left| \frac{p_1}{p_2} \right|, p_1, p_2 \in P\right\}$, при этом предполагая, что p_2 не имеет нулей на K . Очевидно

$$K \subset K_0 \subset K^0. \quad (3.1)$$

Предложение 3.2. Пусть K — компакт в Ω . Тогда

i) K^0 совпадает с пространством максимальных идеалов равномерной алгебры $P(K)$ на K , порожденной полиномами.

ii) K_0 совпадает с пространством максимальных идеалов равномерной алгебры $R(K)$ на K , порожденной рациональными функциями вида p_1/p_2 , где нули p_2 лежат вне K .

Доказательство этого факта следует из предложения 1.2.

Возникает естественный вопрос: всегда ли компакт K рационально выпукл? Например, хорошо известно, что если $\Gamma = \mathbb{Z}$, K — рационально выпукл. С другой стороны, с помощью предложения 1.4 можно построить различные примеры, зависящие от выбора Γ , нерационально выпуклых компактов.

Предложение 3.3. Пусть Γ изоморфно некоторой подгруппе группы рациональных чисел. Тогда каждый компакт в Ω рационально выпукл.

◀ Пусть K — компакт в Ω и $s_0 \in \Omega \setminus K$. Выберем $a_1, \dots, a_n \in \Gamma_+$ и $\varepsilon > 0$ так, чтобы пересечение $U = \{s \in \Omega; |\varphi^{a_i}(s) - \varphi^{a_i}(s_0)| < \varepsilon\}, i=1, \dots, n$ и K было бы пустым множеством. Так как Γ изоморфна подгруппе рациональных чисел, то найдется такое $a_0 \in \Gamma_+$, что каждое $a_i = m_i \cdot a_0$, где m_i — положительное целое число. Поэтому множество $V = \{s \in \Omega; |\varphi^{a_0}(s) - \varphi^{a_0}(s_0)| < \varepsilon/N\}$, где $N = \left(\sum_1^n m_i\right) \max_U |\varphi^{a_i}(s)|$ содержится в U , и следовательно, функция $\frac{1}{\varphi^{a_0}(s) - \varphi^{a_0}(s_0)}$ принадлежит $R(K)$, т. е. $K_0 = K$. ▶

Для дальнейшего приведем следующий факт.

Пусть U — открытое множество в G и $h: R \rightarrow G$ — гомеоморфизм, определенный в § 1. Тогда множество $U_n = h^{-1}(U)$ — относительно плотное подмножество в R , т. е. существует число l такое, что пересечение любого отрезка на R длины l с U_n не пусто. Действительно, в противном случае найдутся семейства отрезков $\{F_i\}_i^{\infty}$ такие, что $d(F_i)$ — длина множества F_i — равна i и $h(F_i) \cap U = \emptyset$. Пусть x_i — центр множества F_i . Тогда $h(F_i - x_i) \cap [h(-x_i) \cdot U] = \emptyset$.

Поскольку $\bigcup_1^{\infty} (F_i - x_i) = R$ и $\{h(x_i)\}_i^{\infty}$ предкомпактно в G , найдется

$\beta \in G$ такое, что $h(R) \cap (U \cdot \beta) = \emptyset$. А это невозможно, так как $\overline{h(R)} = G$.

Заметим, что теми же рассуждениями можно показать, что если V — открытое множество в G , $\overline{V} \neq G$, то $V_n = \bigcup_1^{\infty} V_i$, где каждое V_i связно, $V_i \cap V_j = \emptyset, i \neq j$, и $\sup d(V_i) < \infty$.

Лемма 3.4. Пусть D — полиномиально выпуклый компакт в Ω , $\chi \in \overline{D}$ и $D_{\chi} = \chi^{-1}(D)$ — подмножества в $\mathbb{C}$ (χ — отображение, фигурирующее в § 1). Тогда $D_{\chi} = \bigcup_1^{\infty} D_i$, где каждое D_i — связный полиномиально выпуклый компакт в $\mathbb{C}$ и $D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j$.

◀ Из непрерывности отображения χ следует, что D_x — замкнутое в $\mathbb{C}$ множество. Пусть D_i — одна из компонент связности множества D_x . Покажем сначала, что D_i — ограниченное в $\mathbb{C}$ множество, т. е. компакт. Допустим противное. Так как $* \in D_i$, то найдутся $r_2 > r_1 > 0$ такие, что $D \subset G \times [r_1, r_2]$. Поэтому (см. (1.1)) D_i содержится в $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \in [-\log r_2, -\log r_1]\}$. Из неограниченности D_i в $\mathbb{C}$ (см. рассуждения, изложенные перед леммой) непосредственно следует, что $\operatorname{Re} D_i = \mathbb{R}$.

Пусть W — та неограниченная компонента связности $\mathbb{C} \setminus D_i$, пересечение которой с прямой $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z = 1 - \log r_1\}$ не пусто. Пусть f — обобщенная аналитическая функция на Ω . Тогда, так как $W \subset \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > -\log r_2\}$ и $f \circ \chi$ — целая функция на $\mathbb{C}$, ограниченная в $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > -\log r_2\}$, то имеем: $f \circ \chi$ ограничена на W . По принципу Фрагмена—Линделёфа

$$\sup_W |f \circ \chi| = \sup_{\partial W} |f \circ \chi|,$$

где ∂W — топологическая граница W в $\mathbb{C}$. Но $\partial W \subset D_i$, и так как $* = \lim_{\substack{z \in W \\ \operatorname{Im} z \rightarrow -\infty}} \chi(z)$, имеем: $|f(*)| \leq \sup_{D_i} |f \circ \chi| \leq \sup_D |f|$. Поэтому $* \in D$. При-

шли к противоречию. Таким образом, каждая компонента связности D_x является компактом (полиномиальная выпуклость D_i очевидна). ▶

Теорема 3.5. Пусть D — открытое ограниченное множество в Ω . Для того, чтобы D было множеством единственности, необходимо, чтобы точка $* \in \Omega$ принадлежала множеству D^0 .

◀ Доказательство проведем от противного. Пусть $* \notin D^0$, и $p \in \mathbb{P}$ — такой полином, что $|p(*)| > \sup_D |p| = \delta$. Множество $U = \left\{s \in \Omega; |p(s)| < \frac{|p(*)| + \delta}{2}\right\}$ является полиномиально выпуклой замкнутой окрестностью множества D^0 . Так как $* \notin U$, то по лемме 3.4 $U_x = \bigcup_1 U_i$, где U_i — связный полиномиально выпуклый компакт $\mathbb{C}$. За-

фиксируем U_i так, что $U_i \cap D_x \neq \emptyset$.

Так как U_i — компактное подмножество в $\mathbb{C}$, функция $\varphi^a \circ \chi$ разделяет точки U_i для некоторого $a \in \Gamma_+$. Тогда для любой открытой окрестности V — единичного элемента группы G_a ($V \subset G_a$) и $z \in U_i \setminus \partial U_i$, где ∂U_i — топологическая граница U_i , множество $\chi(U_i) \cdot V$ — окрестность точки $\chi(z)$ (см. предложение 1.4 и его следствие). Так как $\partial U_i \cap D_x = \emptyset$, найдется V -окрестность единицы в G_a такая, что $\chi^{-1}(\chi(\partial U_i) \cdot V) \cap D_x = \emptyset$. Очевидно, $\chi(\partial U_i) \subset \chi(\partial U_i) \cdot V$.

Пусть V_1 — другая окрестность единицы в G_a такая, что $\overline{V_1} \subset V$ и $f \in C(G_a)$, $f \neq 0$ такая, что $f|_{V_1 \setminus V_1} = 0$. Тогда функция

$$g(s) = \begin{cases} 0; & s \in D \setminus (\chi(U_i) \cdot V_1) \\ f(s); & s \in \chi(U_i) \cdot V_1, \end{cases}$$

в силу предложения 1.4 — обобщенно аналитическая. ▶

Заметим, что условие $* \in D$, вообще говоря, не достаточно для единственности обобщенно аналитической функции.

Определение 3.6. Множество $D \subset \Omega$ назовем звездным, если для любого $s \in D$, $s = \alpha \cdot r$, прямая $l(s) = \{\alpha \cdot r, 0 \leq r < \rho\}$ также принадлежит D .

Теорема 3.7. Пусть D — звездное открытое ограниченное множество в Ω . Тогда D — множество единственности.

◀ Отметим, что из условия теоремы следует: множество $D_1 = \chi^{-1}(D)$ открыто и связно и, кроме того, $\Omega_r \subset D$ для некоторого $r > 0$. Поэтому, если f — обобщенно аналитическая функция на D , обращающаяся в нуль на некотором открытом подмножестве D , она, так как $f \notin \chi$ аналитична на D_1 , обращается в нуль на всем D , следовательно, и на Ω_r . Отсюда, $f = 0$ ▶

§ 4. Особенности обобщенных аналитических функций

В этом параграфе рассматривается поведение обобщенных аналитических функций вблизи особых точек в случае, когда группа Γ не изоморфна $\mathbb{Z}$. Естественно ожидать, что тогда обобщенно аналитические функции ведут себя несколько иначе, чем функции одного комплексного переменного. Следующее утверждение как раз и устанавливает одно из таких различий.

Теорема 4.1. Пусть D — открытое в Ω множество и $s \in D$, $s \neq *$. Тогда каждая аналитическая на $D \setminus \{s\}$ функция аналитически продолжается на все D .

◀ Пусть $U = W \times V$, $U \subset D$ — замкнутая окрестность точки $s = (z_0, \alpha_0)$, ($W \subset \mathbb{C}$, $V \subset G_\alpha$), и f — аналитическая на $D \setminus \{s\}$ функция. Тогда она непрерывна на ∂U и, в силу принципа максимума, для $\alpha \in V$, $\alpha \neq \alpha_0$

$$\sup_{W \times \{\alpha\}} |f| < \sup_{\partial W \times \{\alpha\}} |f| \leq \sup_{\partial W \times V} |f| = M < \infty.$$

Поскольку G_α — совершенное множество для любых $z \neq z_0$ и $\varepsilon > 0$, то найдется $\alpha \in V$ такое, что

$$|f(z, \alpha_0) - f(z, \alpha)| < \varepsilon. \quad (4.1)$$

Отсюда $|f(z, \alpha_0)| < M$, $z \neq z_0$. Поэтому f — ограниченная аналитическая на $(W \times \{\alpha_0\}) \setminus \{s\}$ функция и, следовательно, ее можно расширить на все $W \times \{\alpha_0\}$ с сохранением аналитичности. Применив теперь 4.1, получим, что f непрерывна на D ▶

Теорема 4.2. Пусть f — ограниченная аналитическая на $D \setminus \{*\}$ функция. Тогда f продолжается на все D .

◀ Пусть $\Omega_r \subset D$ при некотором $r_0 > 0$. Тогда на $\Omega_r \setminus \{*\}$ функция f представима в виде формального ряда $\sum_{\alpha \in \Gamma} c(\alpha) \varphi^\alpha$, где $c(\alpha) =$

$$= \int_{T_r} f \cdot \varphi^{-\alpha} d\mu, \quad r < r_0. \text{ Поэтому, если бы для некоторого } \alpha \in \Gamma, \alpha < 0,$$

$$c(\alpha) \neq 0, \text{ имеем } 0 < |c(\alpha)| < \int_{T_r} |f| \cdot r^\alpha d\mu. \text{ Следовательно, } \limsup_{r \rightarrow 0} |f| = \infty.$$

А это противоречит условию теоремы. Поэтому f расширяется до аналитической на всем Ω_{r_0} функции и, следовательно, аналитична на всем D .

Определение 4.3. Пусть D — открытое множество в Ω , и F — подмножество множества D . Будем говорить, что F — тонкое множество, если для любого $s \in F$ существует окрестность U и аналитическая на U функция f такая, что $F \cap U = E(f)$, где $E(f)$ — множество нулей функции f .

Очевидно, конечное объединение тонких множеств также является тонким, а вот пересечение, вообще говоря, не тонкое множество. Из теоремы 4.1 следует, что единственным одноточечным тонким множеством является $\ast \in \Omega$. Заметим также, что тонкое множество не обязано быть множеством нулей аналитической функции.

Теорема 4.4. Пусть f — ограниченная аналитическая функция на $D \setminus E$, где E — тонкое множество D . Тогда f аналитически продолжается на все D .

◀ Пусть $s \in E$ и $U = W \times V$, $U \subset D$ — такая замкнутая окрестность точки s , что $\partial U \cap E = \emptyset$. Тогда из определения 4.3 следует, что при фиксированном $\alpha \in V$ множество $(W \times \{\alpha\}) \cap E$ конечно. Поэтому функцию f можно аналитически продолжить на $W \times \{\alpha\}$. В силу принципа максимума для любых $\alpha, \beta \in V$

$$|f(z, \alpha) - f(z, \beta)| \leq \sup_{\partial W} |f(z, \alpha) - f(z, \beta)|.$$

Отсюда функция f , так как она непрерывна на $\partial W \times V$, аналитически продолжается на D .

Следующее утверждение является усиленным вариантом теоремы 4.1, хотя и доказывается аналогичными рассуждениями. Поэтому доказательство не приводится.

Теорема 4.5. Пусть D — открытое множество в Ω и F — такое подмножество тонкого в D множества, никакое подмножество которого не является тонким. Тогда любая функция, аналитическая на $D \setminus F$, аналитически продолжается на все D .

Теорема 4.6. Пусть E — тонкое множество и f — аналитическая на $D \setminus E$ функция. Тогда поведение f в окрестности каждой точки $s_0 \in E$ может быть одним из следующих:

- i) $f(s_n)$ стремится к конечному пределу для любого $s_n \rightarrow s_0$;
- ii) $|f(s_n)|$ стремится к ∞ для любого $s_n \rightarrow s_0$;
- iii) в каждой окрестности точки $s_0 \in E$ функция f принимает все значения, близкие к каждому числу.

◀ Пусть U — такая замкнутая окрестность точки s_0 , содержащаяся в D , что $U = W \times V$ для некоторых $W \subset \mathbb{C}$ и $V \subset G_u$. Так как F — тонкое множество, то при каждом фиксированном $\alpha \in V$ множество $(W \times \{\alpha\}) \cap F$ конечно. Поэтому W можно выбрать таким, что $(W \times \{z_0\}) \cap F = \{s_0\}$, $s_0 = (z_0, \alpha_0)$. Пусть в окрестности s_0 для функции f не выполняются условия i) и ii). Тогда, если на слое $W \times \{z_0\}$ точка z_0 является существенно особой для функции $\Psi_{\alpha_0}(z) = f(z_0, \alpha_0)$, в силу теоремы Пикара, справедливо условие iii). Очевидно также,

что если s_0 является предельной точкой для некоторого множества существенно особых (послойно) точек, то в окрестности точки s_0 снова справедливо iii).

Пусть теперь W и V такие окрестности точек z_0 и a_0 , соответственно, что для любого $a \in V$ функция $\Psi_a(z)$ не имеет существенно особой точки на W . Не теряя общности, можно предположить, что z_0 является полюсом для функции $\Psi_{a_0}(z)$. Покажем, что для a , близких к a_0 , $\inf_W |\Psi_a(z)| = 0$.

Действительно, в противном случае функция $1/f(z, a)$ была бы ограничена на $W \times V_1$, где V_1 — некоторая открытая окрестность a_0 , содержащаяся в V . Поэтому (см. теорему 4.4) функция $1/f(z, a_0)$ имеет аналитическое продолжение на $W \times V$. Следовательно, для функции f в окрестности s_0 выполняются условия либо i), либо ii). Пришли к противоречию.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что $\sup_W |\Psi_a(z)| = \infty$. Поэтому для любого $d \in \mathbb{C}$ функция $\frac{1}{f-d}$ неограничена в некоторой окрестности точки s_0 ►

В дальнейшем точки вида i), ii), iii) будем называть, соответственно, устранимой особенностью, полюсом и существенно особой точкой.

В качестве примера рассмотрим отношение двух целых обобщенно аналитических функций f и g . Пусть $E(f)$ и $E(g)$ — множества нулей этих функций. Из вышеуказанного следует, что если $E(f) \cap E(g) \neq \emptyset$, то функция $\Psi = f/g$ имеет только полюсы. В противном случае у Ψ могут быть существенно особые точки. Можно также показать, что если $* \in E(f) \cap E(g)$, то существенно особые точки функции Ψ образуют нигде не плотное множество.

Пусть f — аналитическая на $\Omega_1 \setminus \{*\}$ функция. Тогда она разложима в ряд $\sum_{\alpha \in \Gamma} c(\alpha) \varphi^\alpha$. Множество тех $a \in \Gamma$, для которых $c(a) \neq 0$, обозначим через $S(f)$ и назовем спектром функции f . Оказывается, что поведение функции f в окрестности $\{*\}$ характеризуется свойством спектра. Точнее справедлива

Теорема 4.7. Пусть $a_0 \in \inf S(f)$, тогда

- i) если $a_0 \geq 0$. $\{*\}$ — устранимая особенность;
- ii) если $a_0 < 0$ и $a \in S(f)$, то $\{*\}$ — полюс;
- iii) если $a_0 < 0$. $a_0 \notin S(f)$, то $\{*\}$ — существенно особая точка.

◀ Доказательство i) очевидно (см. § 3). Пусть выполняется условие ii). Тогда для функции $g = f/\varphi^{a_0}$, $\inf S(g) = 0$, $0 \in S(g)$. Следовательно, применив i) для функции g , получим: $*$ является устранимой особенностью для g и $g(*) = c(a_0)$. Поэтому $*$ — полюс для функции f . Пусть теперь $a_0 < 0$ и $a_0 \notin S(f)$. Покажем, что в этом случае $*$ — существенно особая точка. Допустим противное. Пусть $z_0 \in f(\Omega_r \setminus \{*\})$, $0 < r < 1$. Тогда функция $1/f - z_0$ ограничена на $\Omega_r \setminus \{*\}$ и не равна нулю на этом множестве. Поэтому она расширяет-

ся на все Ω_r и имеет вид $\varphi^b g$, $g(s) = 0$, для $s \in \Omega_r$ (см. теорему 4.2). Отсюда, $g(s) = \exp k(s)$, где $k(s)$ — обобщенно аналитическая на Ω_r функция. Поэтому $f - z_0 = 1/\varphi^b \cdot \exp(-k)$. И поскольку $\inf S(\exp - k) = 0 \in S(\exp - k)$, а $a_0 < 0$, то имеем $b = a_0 \in S(f)$. Пришли к противоречию.

Нижеследующая теорема характеризует поведение целой функции в окрестности бесконечно удаленной точки.

Теорема 4.8. Пусть f — целая функция на Ω и $a_0 \in \sup S(f)$. Тогда

- i) если $a_0 \in S(f)$, $a_0 \neq 0$, ∞ — полюс для функции f ;
- ii) если $a_0 \notin S(f)$, ∞ — существенно особая точка.

Для доказательства достаточно рассмотреть гомеоморфизм τ на $\Omega \setminus \{*\}$; $\tau(a \cdot r) = a^{-1}/r$ и применить теорему 4.7.

§ 5.. Дифференцирование

В данном параграфе дается описание всех непрерывных дифференцирований на пространстве целых функций.

Пространство целых функций B на Ω можно естественным образом превратить в алгебру Фреше, задав на ней систему полунорм $\|f\|_n$

$$\|f\|_n = \sup_{T_n} |f|, \quad f \in B, \quad T_n = \{s \in \Omega; |s| = n\}$$

Определение 5.1. Непрерывный линейный функционал D_s на B называется точечным дифференцированием в точке $s \in \Omega$, если для любых $f, g \in B$

$$D_s(f \cdot g) = f(s) \cdot D_s(g) + g(s) \cdot D_s(f).$$

Линейный непрерывный оператор D на B называется дифференцированием, если

$$D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f).$$

Очевидно, пространство всех дифференцирований на B является B -модулем. Следующим результатом устанавливается размерность этого модуля.

Теорема 5.2. Существует такое дифференцирование D на B , что каждое другое дифференцирование D на B представимо в виде

$$D = g \cdot D^0, \quad g \in B.$$

◀ Сначала отметим, что в любой точке $s \in \Omega$, $s \neq *$, существует нетривиальное точечное дифференцирование. Действительно, пусть $F = W \times G_a$ — замкнутая окрестность точки s . Тогда оператор сужения B на F непрерывен и отображает B в равномерную алгебру B_F . Из предложения 1.4 непосредственно следует существование в точке $s \in F$ непрерывного точечного дифференцирования D_s на алгебре B_F . Поэтому D_s также определяет непрерывное точечное дифференциро-

вание и на B . С помощью точечного дифференцирования D_s на B можно определить аддитивную на Γ_+ функцию $k(a) = \frac{D_s(\varphi^a)}{\varphi^a(s)}$, $a \in \Gamma_+$.

Так как Γ_+ порождает Γ , то $k(a)$ можно расширить до аддитивной на Γ функции. Из непрерывности D_s следует

$$|k(a)| \leq \frac{c \|\varphi^a\|_1}{|s|^a} = c \left(\frac{n}{|s|} \right)^a, \quad n > n_0.$$

Повтому, если на Γ задать естественную топологию, индуцированную с R , то $k(a)$ будет непрерывной аддитивной на Γ функцией, а каждая такая функция линейна. Повтому существует $z \in \mathbb{C}$ такое, что $k(z) = z \cdot a$. Таким образом, между пространством E_s точечных дифференцирований в $s \in \Omega$ и линейными функционалами на Γ существует взаимно однозначное соответствие. Следовательно, $\dim E_s = 1$.

Пусть P — алгебра полиномов. Если а) $\Gamma = \mathbb{Z}$ для $p \in P$, $p = \sum_{k=1}^n c_k \varphi^k$, то полином $D^0(p) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot k \cdot \varphi^{k-1}$. Хорошо известно, что D^0 расширяется до некоторого дифференцирования на всем B . Пусть D — другое дифференцирование. Так как $\dim E_s = 1$, то для каждого $s \in \Omega$ имеем

$$D(f)(s) = g(s) \cdot D^0(f)(s),$$

а так как $D^0 \varphi^1 = 1$, то получим $g(s) = D(\varphi)(s) \in B$.

Если же б) Γ не изоморфна $\mathbb{Z}$, для $p \in P$, $p = \sum_{a \in \Gamma_+} c(a) \varphi^a$ определим $D^0 p = \sum_{a \in \Gamma_+} a \cdot c(a) \cdot \varphi^a$. Так как $D^0 p \in P$ и $D^0(p)(s) = D_s^0 p$ при фиксированном $s \in \Omega$ является непрерывным точечным дифференцированием, D^0 можно расширить до непрерывного на B дифференцирования. Пусть теперь D — другое дифференцирование. Так как $D_s^0 \neq 0$ на $\Omega \setminus \{0\}$ и $\dim E_s = 1$, то имеем

$$D(\varphi^a)(s) = D_s \varphi^a = g(s) D_s^0 \varphi^a = g(s) \cdot D^0(\varphi^a)(s) = a \cdot g(s) \cdot \varphi^a(s).$$

Следовательно, $g(s)$ — обобщенная аналитическая на $\Omega \setminus \{*\}$ функция. А так как $D \varphi^b \in B$, для $b \in \Gamma_+$ имеем $\inf S(g) > 0$.

Отсюда, по теореме 4.7, $*$ — устранимая особенность для g , т. е. $g \in B$. ►

Отметим, что в случае, когда $\Gamma \neq \mathbb{Z}$, в точке $*$ $\in \Omega$ нет нетривиального дифференцирования. Неизвестно, есть ли в этой точке разрывное дифференцирование?

Определение 5.3. Производной целой функции $f \in B$ назовем функцию $D^0 f$.

Из построения оператора D^0 непосредственно следует

Предложение 5.4. Пусть $\sum_{a \in \Gamma_+} c(a) \varphi^a$ — ряд некоторой функции $f \in B$. Тогда ряд ее производной имеет вид

i) если $\Gamma = \mathbb{Z}$, $\sum_{a \in \Gamma_+} c(a) \cdot a \cdot \varphi^{a-1}$;

ii) если $\Gamma \neq \mathbb{Z}$, $\sum_{a \in \Gamma_+} c(a) \cdot a \cdot \varphi^a$.

Отметим, что в случае, когда $\Gamma \neq \mathbb{Z}$, оператор D^0 не является сюръективным отображением. Для доказательства этого факта выберем последовательность $\{a_n\}_1^\infty \subset \Gamma_+$ такую, что $a_n \cdot 2^n < \frac{1}{2^n}$. Тогда функция $f = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} \varphi^n$ принадлежит B . Но операторное уравнение $D^0 g = f$ неразрешимо в B .

§ 6. Формула Иенсена

Пусть A — равномерная алгебра на X и μ — представляющая мера точки $x \in X$, сосредоточенная на ∂A — границе Шилова алгебры A . Говорят, что μ — мера Иенсена, если для $f \in A$ справедливо неравенство

$$\log |f(x)| \leq \int_X \log |f| d\mu.$$

Каждой точке $x \in X$ может соответствовать несколько представляющих мер Иенсена, но среди них всегда найдется такая мера μ , сосредоточенная на ∂A , что для любой другой представляющей меры γ точки $x \in X$, не обязательно сосредоточенной на ∂A , справедливо неравенство

$$\int_X \log |f| d\gamma \leq \int_X \log |f| d\mu \quad (\text{см. [3]}).$$

Рассмотрим теперь алгебру $A = B_{\mathbb{D}_1}$ — равномерное замыкание на $\mathbb{D}_1 = \{s \in \mathbb{D}; |s| \leq 1\}$ алгебры обобщенных целых функций из B . По предложению 1.2 граница Шилова алгебры A есть $T_1 = G \times \{1\}$, а пространство максимальных идеалов — $\mathbb{D}_1$. Мера μ на T_1 , индуцированная мерой Хаара группы G , является представляющей для точки $* \in \mathbb{D}_1$. Так как A_{T_1} — алгебра Дирихле, μ — единственная представляющая мера точки $* \in \mathbb{D}_1$, сосредоточенная на T_1 и, в силу вышесказанного, любая другая представляющая мера γ точки $* \in \mathbb{D}_1$, сосредоточенная на $\mathbb{D}_1$, удовлетворяет неравенству

$$\int_{\mathbb{D}_1} \log |f| d\gamma \leq \int_{T_1} \log |f| d\mu, \quad f \in A. \quad (6.1)$$

Правое выражение, в случае $f = 0$, строго больше $-\infty$ (см. [3], [6]). Аналогичный факт верен и для других представляющих мер. Точнее, справедливо

Предложение 6.1. Пусть $f \in A$, $f \neq 0$ и m_s — представляющая мера $s \in \mathbb{D}_1$, $|s| < 1$, сосредоточенная на T_1 . Тогда

$$\int_{T_1} \log |f| dm_s > -\infty.$$

◀ Поскольку $\overline{\operatorname{Re} A}|_{T_1} = C(T_1)$, m_s — единственная представляющая мера точки $s \in \Omega$. Пусть $F = W \times G_a$ — замкнутая окрестность точки s , $s = (z_0, a_0)$. Тогда $f(z, a)$ при фиксированном $a \in G_a$ является аналитической по f функцией (см. предложение 1.4). Взяв такую полиномиально выпуклую окрестность W_1 точки z_0 , $W_1 \subset W$, что на $\partial W_1 \times \{a_0\}$ функция f не обращается в нуль, имеем

$$f(z_0, a_0) = \int_{\partial W_1 \times \{a_0\}} f(z, a_0) dm,$$

где m — представляющая мера точки $s = (z_0, a_0)$, сосредоточенная на $\partial W_1 \times \{a_0\}$. Но $\int_{\partial W_1 \times \{a_0\}} \log |f| dm > -\infty$, поэтому

$$(\text{см. (6.1)}) \int_{T_1} \log |f| dm_s > -\infty.$$

Пусть $B(r_1, r_2)$ — равномерная алгебра на $\Omega(r_1, r_2) = \{s \in \Omega; r_1 < |s| < r_2\}$, порожденная семейством $\{\varphi^a\}_{a \in \Gamma_+}$. Граница Шилова этой алгебры совпадает с $F = T_{r_1} \cup T_{r_2}$, а $\Omega(r_1, r_2)$ — с ее пространством максимальных идеалов и, кроме того (см [17]),

$$\operatorname{codim}_{C_R(F)} \overline{\operatorname{Re} B(r_1, r_2)}|_F = 1. \quad (6.2)$$

Из этого равенства непосредственно следует, что размерность выпуклого компакта M_s представляющих мер алгебры $B(r_1, r_2)$ в точке $s \in \Omega(r_1, r_2)$ не превосходит 2. Более того, воспользовавшись описанием долей Глисона алгебры $B(r_1, r_2)$, можно показать, что в случае, когда $\Gamma = \mathbb{Z}$, для $s \in \Omega(r_1, r_2) \setminus F$ $\dim M_s = 2$. В остальных случаях $\dim M_s = 1$.

Теорема 6.2. Пусть f — целая функция на Ω . Тогда $\Phi(z) = \int_{T_r} \log |f| d\mu$ является выпуклой функцией от $\log r$.

◀ Зафиксируем $r_0 > 0$ и пусть $0 < r_1 < r_2$ такие, что $r_0^2 = r_1 \cdot r_2$. Определим гомеоморфизм τ на пространстве $\Omega(r_1, r_2)$, полагая для $s = a \cdot r$, $\tau(s) = a^{-1} \cdot \frac{r_0^2}{r}$. Тогда $\varphi^a \circ \tau(s) = r_0^{-a} \cdot \varphi^{-a}(s)$ и, поскольку

$B(r_1, r_2)$ порождается семейством функций $\{\varphi^a\}_{a \in \Gamma}$, то τ индуцирует автоморфизм на $B(r_1, r_2)$. Точка $s_0 = e \cdot r_0$ (e — единица группы G) — единственная неподвижная точка гомеоморфизма τ . Пусть m_{s_0} — представляющая мера точки s_0 , сосредоточенная на $F = T_1 \cup T_2$. Тогда $m_{s_0} \circ \tau$ также будет представляющей мерой точки s_0 . Поэтому мера

$\tilde{m} = \frac{m_{s_0} + m_{s_0} \circ \tau}{2}$ — представляющая мера точки s_0 , инвариантная от-

носительно τ . Следовательно, $\|\tilde{m}|_{T_{r_1}}\| = \|\tilde{m}|_{T_{r_2}}\| = 1/2$.

Покажем, что $\tilde{m}$ — единственная логарифмическая представляющая мера точки $s_0 = l \cdot r_0$. Заметим сначала, что для всех φ^a , $a \in \Gamma$, справедливо

$$\begin{aligned} \int_F \log |\varphi^a| d\tilde{m} &= \int_{T_{r_1}} \log |\varphi^a| d\tilde{m} + \int_{T_{r_2}} \log |\varphi^a| d\tilde{m} = \frac{a}{2} \log r_1 + \frac{a}{2} \log r_2 = \\ &= a \cdot \log r_0 = \log |\varphi^a(s_0)|. \end{aligned}$$

Из равенства (6.2) следует, что все вещественные меры, ортогональные к алгебре $B(r_1, r_2)$ и сосредоточенные на F , кратны мере $n = \mu_1 - \mu_2$, где μ_i обозначает меру μ , заданную на T_i , $i = 1, 2$. Поэтому, если

m — некоторая логарифмическая мера точки s_0 , $m = c \cdot n + \tilde{m}$, $c \in \mathbb{R}$. А так как $\varphi^a \in B^{-1}(r_1, r_2)$, то имеем

$$a \log r_0 = \int_F \log |\varphi^a| dm = a \cdot c \cdot (\log r_1 - \log r_2) + a \log r_0.$$

Отсюда $c = 0$, т. е. $m = \tilde{m}$. Поэтому для $f \in B(r_1, r_2)$ справедливо неравенство

$$\log |f(l \cdot r_0)| \leq \int_F \log |f(s)| d\tilde{m}(s).$$

Таким образом,

$$\log |f(\beta \cdot r_0)| \leq \int_F \log |f(\beta \cdot s)| d\tilde{m}(s). \quad (6.3)$$

Поэтому, применив теорему Фубини, имеем

$$\Phi(r_0) = \int_0 \log |f_r| d\mu \leq \frac{1}{2} \Phi(r_1) + \frac{1}{2} \Phi(r_2).$$

Но $\log r_0 = \frac{1}{2} \log r_1 + \frac{1}{2} \log r_2$, следовательно, $\Phi(r)$ — выпуклая от $\log r$ функция. ►

Следствие. Пусть $f(s) = 0$, $f \neq 0$. Тогда для $0 < r_1 < r_2$ таких, что $r_1 \cdot r_2 = |s|^2$, имеем

$$\Phi(|s|) < \frac{1}{2} \Phi(r_1) + \frac{1}{2} \Phi(r_2).$$

Доказательство непосредственно следует из (6.3).

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 6.3. Пусть f — целая на Ω функция, $f \neq 0$. Тогда

i) $\Phi(r)$ — монотонно неубывающая выпуклая от $\log r$ функция;

ii) если $\Phi(r) = \text{const}$, то $f = \exp g$, $g \in B$;

iii) $\log |f(*)| \leq \Phi(r)$.

◀ Условия i) и iii) непосредственно следуют из теоремы 6.2.
 ii) Так как $\Phi(r) = \text{const}$, f не обращается в нуль на Ω (см. предыдущее следствие). Поэтому, в силу теоремы 2.3 и леммы 2.1, найдется g такое, что $f = \exp g$. ▶

Пусть f — целая функция. Тогда, так как функция $\Phi(r) = \int_{T_r} \log |f| d\mu$ выпукла от $\log r$, существует такая положительная функция $n(r, f)$, что

$$\Phi(r_2) - \Phi(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{n(r, f)}{r} dr.$$

Определение 6.4. Число $n(r, f) = r \cdot \Phi'(r + 0)$ будем называть мерой множества нулей функции f на Ω_r .

Опишем основные свойства числа $n(r, f)$.

Теорема 6.5. Пусть $f \in B$. Тогда

- i) $n(r, f)$ — неубывающая положительная функция;
- ii) если $n(r, f) = \text{const}$, то $a = n(r, f) \in \Gamma_+$ и найдется $g \in B$ такое, что $f = \varphi^a \cdot \exp g$;
- iii) если f и g такие функции из B , что на T_r , $|f| > |g|$, то $n(r, f + g) = n(r, f)$.

◀ i) очевидно. ii). Пусть $n(r, f) = \text{const}$, тогда $\Phi(r) = a \log r + c$, где $a = n(r, f)$. Поэтому (см. следствие теоремы 6.2) f нигде на $\Omega \setminus \{*\}$ не обращается в нуль. Следовательно, по теореме 2.3 и лемме 2.1, найдутся $b \in \Gamma_+$ и $g \in B$ такие, что $f = \varphi^b \cdot \exp g$. А так как

$$\Phi(r, f) = b \cdot \log r + \int_{T_r} \text{Re } g d\mu,$$

то получим $b = a$.

iii). Так как $|f| > |g|$ на T_r , то для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется обобщенная аналитическая на $\Omega(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ функция h такая, что $1 + \frac{g}{f} = \exp h$. Поэтому, если $|r_1 - r| < \varepsilon$, то $\Phi(r_1, f + g) = \Phi(r_1, f) + \int_{T_{r_1}} \text{Re } h d\mu$. Правый интеграл постоянен на отрезке $[r - \varepsilon, r + \varepsilon]$.

Следовательно, $n(r, f + g) = n(r, f)$. ▶

Теперь можно доказать формулу Иенсена для обобщенных аналитических функций.

Пусть f — обобщенная аналитическая функция. Формула Иенсена позволяет подсчитывать модуль первого коэффициента функции f . Поэтому естественно предположить, что $a = \inf S(f) \in S(f)$. Пусть $n(r, f)$ — мера нулей функции f на Ω_r . Положим

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - a}{t} dt.$$

Теорема 6.6. Пусть $f \in B$ и $a = \inf S(f) \in S(f)$. Тогда

$$\log |c(a)| = \int_{r_0}^r \log |f| d\mu - N(r, f) - a \log r.$$

◀ Так как $a \in S(f)$, то найдется $r_0 > 0$ такое, что функция f на Ω_{r_0} равна $c(a) \cdot \varphi^a \cdot \exp g$, где g — обобщенно аналитическая на Ω_{r_0} функция и $g(*) = 0$. Поэтому $\Phi(r_0, f) = \log |c(a)| + a \log r_0$. Теперь для завершения доказательства достаточно заметить, что

$$N(r, f) = \Phi(r, f) - \Phi(r_0, f) - a \int_{r_0}^r \frac{dt}{t} \blacktriangleright$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 8. IV. 1987

Ս. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Արեն-Ջինգերի իմաստով ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիաներ (ամփոփում)

Աշխատանքում շարունակվում է Ռ. Արենսի և Ի. Ջինգերի ներմուծված ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիաների հանրահաշվի ուսումնասիրությունը, նկարագրված է այդ ֆունկցիաների անալիտիկ հատկությունները, մտցված է ածանցյալի գաղափարը, ստացված է Ցենսենի բանաձևը, Տրված է անալիտիկ համարյա պարբերական ֆունկցիաների տեսության բնութմաների նոր մեկնարանություն:

S. A. GRIGORIAN. *Generalized analytic functions by Arens—Singer (summary)*

The paper investigates the algebra of generalized analytic functions introduced by R. Arens and I. Singer. The analytic properties of such functions, the notion of derivative is introduced and the Jensen's formula is established. A new interpretation of some theorems of the theory of almost periodic analytic functions is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Arens, I. Singer. Generalized analytic functions, T. A. M. S., 81, 1956, 379—393.
2. R. Arens. A Banach algebra generalization of conformal mappings of the disc.
3. R. Arens. The boundary integral of $\log |F|$ for generalized analytic functions, T. A. M. S., 86, 1957, 57—69.
4. K. Hoffman. Boundary behavior of generalized analytic functions, T. A. M. S., 87, 1958, 447—466.
5. K. Hoffman, I. Singer. Maximal subalgebras of $C(\Gamma)$, Amer. J. Math., 79, 1957, 295—305.
6. H. Helson, D. Lowdenslager. Prediction theory and Fourier series in several variables, II, Acta Math., 106, 1961, 175—213.
7. С. А. Григорян. Максимальные алгебры обобщенных аналитических функций, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVI, № 5, 1981, 258—264.
8. Б. М. Левитан. Почти-периодические функции, М., ГИГТЛ, 1953.
9. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956.
10. Е. А. Горин. Функционально-алгебраический вариант теоремы Бора-ван Кампена, Мат. сборник, 82, № 2, 124, 1970, 260—272.
11. Т. Гамелин. Равномерные алгебры, «Мир», 1973.
12. J. P. Milasewits. Gleason parts and certain counterexamples in the big disc context, Amer. Math. Soc., 45, 1, 1974, 217—227.

13. С. А. Григорян, Т. В. Тонев. Одна характеристика алгебры обобщенных функций, Докл. БАН, 33, № 1, 1980, 25—26.
14. С. А. Григорян. Об алгебрах, порожденных аналитическими по Аренсу-Зингеру функциями, ДАН Арм.ССР, LXVIII, № 3, 1979, 146—149.
15. С. А. Григорян. Об особенностях обобщенных аналитических функций, ДАН Арм.ССР, LXXI, № 2, 1980, 65—68.
16. С. А. Григорян. О распределении значений обобщенных аналитических функций, ДАН СССР, 296, № 6, 1987, 1293—1295.