ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIV, № 3, 1989 Математика

УДК 517. 547, 24

Р. А. АВЕТИСЯН, Н. У. АРАКЕЛЯН, А. А. ГОНЧАР

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Известная теорема Данжуа—Карлемана—Альфорса (см. [1] и [2], стр. 234) утверждает, что если целая функция f при некотором натуральном p удовлетворяет условию

$$\varliminf_{r\to\infty} r^{-p/2}\, T(r, f) = 0, \tag{1}$$

то число ее конечных асимптотических значений и, более того, число соответствующих асимптотических мест строго меньше p. В условии (1) неванлинновскую характеристику $T(r, f)$ можно заменить на $\log M(r, f)$, где

$$M(r, f) = \sup_{|z|=r} |f(z)|. \tag{2}$$

Отметим следствие указанного результата, известное под названием теоремы Данжуа—Карлемана—Альфорса: целая функция конечного порядка ρ имеет не более чем 2ρ конечных асимптотических значений. Более сильное следствие мы получим, заменяя в этом утверждении число ρ нижним порядком λ функции f.

Вопрос о количестве асимптотических значений *мероморфных* в C функций исследовался в ряде работ (см. обзор [3], стр. 52). Л. Альфорс доказал (см. [4], стр. 310—314), что условие (1) гарантирует, чтобы часть асимптотических значений функции f, состоящая из так называемых прямо критических точек обратной к f функции, содержала менее p точек. С другой стороны, было хорошо известно, что порядок мероморфной функции не лимитирует количество ее асимптотических значений (см. [5], пример на стр. 92—93, а также [2], стр. 161—163).

Из сказанного, казалось, напрашивается вывод, что для мероморфных функций трудно ожидать выполнения утверждений типа теоремы Данжуа-Карлемана-Альфорса. Пожалуй, единственным обнадеживающим результатом, относящимся, правда, к довольно узкому классу функций, является давний результат Валирона (см. [6]—[7]): если $T(r, f) = O(\log^2 r)$ при $r\to\infty$, то тогда мероморфная функция f может иметь не более одного (конечного или бесконечного) асимптотического значения. Это заключение впоследствии было распространено (Тумура, [8]) на мероморфные функции, удовлетворяющие условию

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{T(r, f)}{\log^2 r} < +\infty. \tag{3}$$

Основной целью настоящей работы является решение следующей задачи: каким ограничениям надо подчинить рост числа полюсов мероморфной функции (с учетом роста ее характеристики) для того, чтобы для количества всех ее конечных асимптотических значений выполнялись закономерности типа теоремы Данжуа-Карлемана-Альфорса? Ответ содержится в теореме 1 этой работы, охватывающей отмеченные выше результаты и ряд новых.

Доказательство теоремы 1 основано на мероморфном аналоге обобщенной теоремы Фрагмена-Линделёфа — теореме 2. Эта последняя, а также вытекающая из нее теорема 3, являющаяся аналогом другой известной теоремы Линделёфа, представляют, как нам кажется, самостоятельный интерес.

Одним из средств исследования рассматриваемых вопросов является математическое понятие емкости плоского конденсатора и ее свойства (см. [9] и [10]). Оно играет важную роль в вопросах наилучших рациональных приближений и их применений (см. работы [11]—[12] одного из авторов, содержащие также формулировки и доказательства ряда общих свойств этого понятия). Заключительная теорема 4 настоящей статьи, представляющая еще одно такое применение, обобщает на случай мероморфных функций и усиливает основные результаты работы [13] о скорости наилучшего рационального приближения целых функций на асимптотическом пути.

Не входя в детали отметим, что обсуждение рассматриваемых здесь вопросов стимулировалось также результатами [14] о наилучшем приближении мероморфными функциями.

Настоящая работа состоит из двух параграфов. В § 1 приводится формулировка теорем 1—4 с необходимыми определениями и комментариями, а § 2 посвящен доказательствам.

§ 1. Формулировка результатов

1°. Для мероморфной в C функции f величина $a \in \overline{C}$ называется *асимптотическим значением*, если существует такая уходящая в бесконечность непрерывная кривая $\Gamma = \Gamma(a, f)$, что

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \Gamma}} f(z) = a.$$

При этом, Γ будет называться *асимптотическим путем* (для функции f и значения a). Асимптотические пути $\Gamma_1 = \Gamma_1(a, f)$ и $\Gamma_2 = \Gamma_2(a, f)$ назовем *эквивалентными*, если $a_1 = a_2 = a$ и, кроме того, существует асимптотический путь $\Gamma_3 = \Gamma_3(a, f)$ такой, что оба множества $\Gamma_1 \cap \Gamma_3$ и $\Gamma_2 \cap \Gamma_3$ непусты и неограничены. *Кратностью* асимптотического значения a назовем (максимальное) число попарно неэквивалентных асимптотических путей $\{\Gamma_\alpha(a, f)\}$ (которых может быть бесконечное множество).

Перейдем к формулировке основного результата настоящей работы. Здесь и далее будем придерживаться общепринятых обозначений неванлинновской теории (см. [4] и [2]). В частности, $T(r, f)$ означает неванлинновскую характеристику мероморфной в $\mathbf{C}$ функции f, а $n(r, f) = n(r, \infty, f)$ — число ее полюсов, лежащих в круге $|z| \leqslant r$, с учетом кратности. Величина $M(r, f)$ определяется согласно (2), а порядок ρ и нижний порядок λ функции f — формулами

$$\rho = \overline{\lim} \frac{\log T(r, f)}{\log r}, \quad \lambda = \lim_{r \to \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

Теорема 1. *Пусть f — мероморфная (в C) функция и $p \geqslant 1$ — натуральное число. Предположим, что существует такая последовательность $r_k \uparrow \infty$, что*

$$\lim_{r = r_k \to \infty} r^{-p/2} \log^+ M(r, f) = 0, \tag{1.1}$$

$$n(r, f) = O\left(\log \frac{r^{p/2}}{1 + \log^+ M(r, f)}\right) \text{ при } r = r_k \to \infty. \tag{1.2}$$

Тогда при $p = 1$ функция f не имеет таких осимптотических значений a, что

$$|a| < \underline{\lim}_{r \to \infty} M(r, f), \tag{13}$$

а при $p > 1$ число конечных аситптотических значений f, с учетом их кратности, меньше p.

Замечания. 1) Если в теореме 1 при $p = 1$ дополнительно к условиям (1.1)—(1.2) предположить, что $M(r, f) \to \infty$ при $r \to \infty$ (это слабее предположения, что ∞ — асимптотическое значение для f), то тогда из (1.3) следует, что f не имеет конечных асимптотических значений.

2) Для вывода интересных следствий из теоремы 1 полезно заметить, что условия (1.1)—(1.2) вытекают из аналогичных условий, относящихся к более регулярной функции $T(r, f)$, а именно: *существует такая последовательность $R_k \uparrow +\infty$, что*

$$\lim_{r = R_k \to \infty} r^{-p/2}\, T(r, f) = 0, \tag{1.1'}$$

$$n(r, f) = O\left(\log \frac{r^{p/2}}{T(r, f)}\right) \text{ при } r = R_k \to \infty. \tag{1.2'}$$

В самом деле, из одной оценки Р. Неванлинны (см. [2], стр. 55. теорему 7.2) следует, что для любого $R > 0$ существует такое $r \in \left[\frac{1}{2} R, R\right]$, что $\log^+ M(r, f) \leqslant c\, T(r, f)$, где c — абсолютная константа, и достаточно для $R_k = R$ положить $r_k = r$.

Следствия. а) Для *целых* функций f теорема 1 по существу совпадает с приведенным в начале общим вариантом теоремы Данжуа-Карлемана-Альфорса, поскольку тогда $n(r, f) \equiv 0$. При этом в случае $p = 1$ необходимо сослаться также на теорему Лиувилля, из которой следует, что $M(r, f) \to \infty$ при $r \to \infty$.

б) При $p = 1$ теорема 1 содержит упомянутые выше результаты Валирона и Тумуры: если мероморфная функция f удовлетворяет условию (3), то она имеет не более одного асимптотического значения a.

В самом деле, полагая без ограничения общности $a=\infty$, покажем, что f не имеет конечных асимптотических значений. Из условия (3) следует, что $T(\rho_k, f)=O(\log^2\rho_k)$ для некоторой последовательности $\rho_k\uparrow+\infty$. Полагая $R_k=\rho_k^{1/2}$, заметим сначала, что $T(R_k f)=O(\log^2 R_k)$, и поскольку

$$n(R_k, f)\leqslant(\log R_k)^{-1}\int\limits_{R_k}^{\rho_k}\frac{n(t, f)}{t}dt\leqslant\frac{T(\rho_k, f)}{\log R_k}=$$

$$=O(\log R_k)=O\left(\log\frac{R_k^{1/2}}{T(R_k, f)}\right), \quad R_k\to\infty,$$

то условие (1.2′) соблюдено при $p=1$.

в) Пусть f — мероморфная функция конечного порядка ρ и

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{n(r, \infty, f)}{\log r}<+\infty. \tag{1.4}$$

В случае $2\rho<1$ дополнительно предполагаем, что ∞ является асимптотическим значением для f. Тогда из теоремы 1 непосредственно следует (выбирая $2\rho<p\leqslant2\rho+1$), что количество конечных асимптотических значений функции f, с учетом их кратности, не превосходит 2ρ. В случае, когда 2ρ—натуральное число, эту оценку, вообще говоря, нельзя усилить (см. ниже пример 1). Для такого усиления теорема 1 взамен (1.4) предлагает (при $p=2\rho$) более строгое ограничение (1.2).

г) Если в пункте в) условие (1.4) заменить на

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r, \infty, f)}{\log r}<+\infty \tag{1.5}$$

(эквивалентным условию $N(r, \infty, f)=O(\log^2 r)$, $r\to\infty$), то тогда там всюду число ρ можно заменить нижним порядком λ функции f.

Представляется интересным выяснить открытый вопрос о том, насколько существенно в утверждении в) (или г)) дополнительное при $2\rho<1$ ($2\lambda<1$) предположение, что ∞ является асимптотическим значением для f, т. е. не следует ли указанное предположение (или хотя бы условие $M(r, f)\to\infty$ при $r\to\infty$) из (1.4) ((1.5)) при $2\rho<1$ (2λ—1).

В заключение этого пункта рассмотрим вопрос о точности условий теоремы 1. Поскольку точность условия (1) теоремы Данжуа-Карлемана-Альфорса хорошо исследована, то заслуживает внимания проверка условия (1.2) или (1.2′). Утвердительный ответ об их точности дает построенный Ж. Валироном [6] пример: для произвольной сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ функции $\varphi:[0, +\infty)\to[0, +\infty)$ существует мероморфная функция f с бесконечним числом (и даже мощности континуума) асимптотических значений, удовлетворяющая условию

$$T(r, f)<\varphi(r)\log^2 r.$$

Таким образом, можно считать, что функция f удовлетворяет условию (1.1′) при $p=1$ и для любой последовательности $R_k\uparrow+\infty$, а вместо (1.2′) из приведенного условия следует оценка

$$n(r, f) < 4\varphi(r^2)\log r = O\left(\varphi(r^2)\log\frac{r^{1/2}}{T(r, f)}\right).$$

2°. Пусть D — произвольная неограниченная область в $\mathbf{C}$, ∂D — граница D в $\bar{\mathbf{C}}$, так что $\infty \in \partial D$. Положим

$$\gamma_r = l_r \cap D,\ l_r = \{z : |z| = r\} \text{ для } r > r' = \inf_{\zeta \in \partial D} |\zeta|,$$

и если $|\gamma_r|$ — линейная мера γ_r, то следуя М. Цудзи (см. [15], стр. 112) положим $r\theta(r) = |\gamma_r|$ при $\gamma_r \neq l_r$ и $r\theta(r) = \infty$, когда $\gamma_r = l_r$, либо $0 < r < r'$. Функция $\theta(r)$, представляющая угловую меру γ_r при $\gamma_r \neq l_r$, является полунепрерывной снизу функцией.

Пусть теперь f — мероморфная в D функция. Если f ограничена вблизи каждой граничной точки $\zeta \neq \infty$, то тогда в каждом круге $|z| \leqslant r$ содержится лишь конечное число ее плюсов. Обозначим это число, с учетом кратности полюсов, через $n(r, f) = n(r, \infty, f)$ и положим

$$M(r, f) = \sup_{z \in \gamma_r} f(z),\quad r > r'. \tag{1.6}$$

Следующая теорема является естественным аналогом для мероморфных функций обобщенного варианта теоремы Фрагмена-Линделёфа (см. [16], стр. 104, теорему 7. 6 при $u = \log|f|$, где f — голоморфная в D функция). Для простоты мы предполагаем, что D — односвязная неограниченная область в C с непустым дополнением. В этом случае $r\theta(r) = |\gamma_r|$ при $r > r'$.

Теорема 2. *Пусть f — мероморфная в области D функция такая, что*

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}} |f(z)| \leqslant M < +\infty \text{ для } \zeta \in \partial D \setminus \{\infty\}. \tag{1.7}$$

Предположим, что существуют две последовательности $(\rho_k)_1^\infty$ и $(r_k)_1^\infty$, $r' < \rho_k < r_k \to +\infty$ и $\rho_k = o(r_k)$ при $k \to \infty$, для которых

$$\lim_{k \to \infty} \exp\left(-\pi \int_{\rho_k}^{r_k} \frac{dt}{t\,\theta(t)}\right) \log^+ M(r_k, f) = 0, \tag{1.8}$$

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{n(r_k, f)}{\log^+ \rho_k} = A < +\infty. \tag{1.9}$$

Тогда

$$\underline{\lim_{r \to \infty}} M(r, f) < M e^{\pi^2 A}. \tag{1.10}$$

Замечания. 1) Для голоморфных в D функций f (когда $\rho_k = \text{const}$ и $A = 0$ в условии (1.9)) теорема 2 по существу совпадает с отмеченной выше обобщенной теоремой Фрагмена-Линделёфа.

2) Теорема 2 сохраняет силу и содержательность для произвольных неограниченных областей D с достаточно «массивной» границей; нужно предположить, что

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{t\theta(t)} = +\infty$$

(напомним, что $1/t\theta(t) = 0$, если $\gamma_t = l_t$). Необходимо только верхний предел r_k интеграла в (1.8) заменить на τr_k, где τ — фиксированное число, $0 < \tau < 1$, а в доказательстве вместо (2.2) воспользоваться оценкой Цудзи (2.1) (ср. с теоремой III. 68 Цудзи [15]).

3) Фигурирующая в (1.10) константа π^2 является, по-видимому, наилучшей.

Следствие. Если D — угол (возможно—криволинейный) раствора α, $0 < \alpha \leqslant 2\pi$ (так что $\theta(r) \equiv \alpha$), то тогда при оптимальном выборе ρ_k в зависимости от r_k, условия (1.8) и (1.9) теоремы 2 примут вид

$$\lim_{k\to\infty} r^{-\pi/\alpha} \log M(r_k, f) = 0, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}}\, n(r_k, f) \log^{-1} \frac{r_k}{[1 + \log^+ M(r_k, f)]^{\alpha/\pi}} \leqslant$$

$$\leqslant A < +\infty.$$

Следующее утверждение, вытекающее из теоремы 2, заслуживает быть представленным в виде отдельной теоремы, поскольку оно является «мероморфным» аналогом другой известной теоремы Линделёфа (см. [16], стр. 105, теорему 7.7). Рассмотрим для простоты односвязную область D, граница Γ которой состоит из жордановых дут Γ_1 и Γ_2 с общим началом ζ_0 и концом ∞. Γ_1 и Γ_2 могут иметь и другие общие точки и, в частности, могут совпадать. В последнем случае они как бы представляют собой достижимые из D с разных сторон «берега» границы ∂D.

Теорема 3. *Пусть f — мероморфная в D функция, допускающая непрерывное продолжение на $\Gamma_1 \setminus \{\infty\}$ и $\Gamma_2 \setminus \{\infty\}$ в отдельности и удовлетворяющая условию*

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\Gamma_1}} f(z) = a_1, \quad \lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\Gamma_2}} f(z) = a_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbf{C} \tag{1.11}$$

вместо (1.7), *а также остальным условиям* (1.8) *и* (1.9) *теоремы* 2. *Тогда $a_1 = a_2\ (= a)$ и, кроме того*

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\, M(r, f - a) = 0. \tag{1.12}$$

Замечания. 1) В терминах начала пункта 1 (с заменой $\mathbf{C}$ на $D \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$) заключение теоремы 3 означает, в частности, что асимтотические пути Γ_1 и Γ_2 эквивалентны.

2) Теорема 3 содержит следующее утверждение, принадлежащее Ж. Валирону (см. [6]—[7]). Пусть мероморфная в $\mathbf{C}$ функция f удовлетворяет условию $T(r, f) = O(\log^2 r)$ при $r \to \infty$ и имеет асимптотическое значение a. Тогда существует последовательность окружностей $|z| = r_n \to \infty$, на которых f равномерно стремится к a (т. е. выполнено условие (1.12), если без ограничения общности полагать, что $a \neq \infty$). Это означает, что f не может иметь других, отличных от a, асимптотических значений.

3°. Пусть Г — замкнутое множество в $\mathbf{C}$ со связным дополнением такое, что все окружности $|z|=r$, $r\geqslant 0$, пересекаются с Г. Назовем такое Г *асимптотическим множеством* для мероморфной в $\mathbf{C}$ функции f, если существует конечный предел

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\Gamma}} f(z) = a.$$

В этом случае функцию f можно равномерно на Г приблизить рациональными функциями. Рассмотрим *наилучшее приближение* f на Г рациональными функциями порядка не выше n:

$$\rho_n(f)=\rho_n(f,\ \Gamma) = \inf_{\{Q_n\}} \sup_{z\in\Gamma} |f(z) - Q_n(z)|, \tag{1.13}$$

где Q_n — всевозможные рациональные функции порядка не выше n (т. е. число полюсов Q_n в $\overline{\mathbf{C}}$, с учетом кратности, не больше n).

Сказанное выше означает, что $\rho_n(f)\to 0$ при $n\to\infty$, и представляет интерес вопрос о том, насколько быстро может $\rho_n(f)$ стремиться к нулю. В работе [17] показано, что в случае функции $f(z)=e^{-z}$ при $=[0,\ +\infty)$ возможно „геометрическое" убывание $\rho_n(f)$, т. е. $\rho_n(f)<c^n$, $0<c<1$. Обратный вопрос исследовался в работе [13] (см. там теоремы 1—3). Установлено, что не только для показательной функции, но и для широкого класса *целых* функций f конечного порядка, когда Г — неограниченный континуум со связным дополнением, $\rho_n(f)$ не может стремиться к нулю быстрее геометрической прогрессии. Если же подчинить рост функции f определенным условиям регулярности, то тогда $\rho_n^{1/n}(f)>c>0$.

Что касается *мероморфных* функций конечного порядка, то даже при весьма регулярном их росте величина $\rho_n(f)$ может стремиться к нулю сколь угодно быстро (см. приводимый ниже пример), в частности — быстрее геометрической прогрессии. Такой эффект может достигаться за счет того, что полюсы функции f аннулируются полюсами аппроксимирующих рациональных функций Q_n. Однако, если мерморфная функция имеет определенный «дефицит» полюсов, то тогда для нее величина $\rho_n(f)$ ведет себя как в случае целых функций. Нижеследующая теорема 4 обобщает и усиливает результаты теорем 1 и 2 работы [13].

Теорема 4. *Пусть f — трансцендентная мероморфная в C функция с асимптотическим множеством Г, для которой ∞ является дефектным значением в смысле Неванлинны с дефектом $\delta(\infty, f) = 1$, и пусть существует число $q>1$ и такая последовательность $r_j\to\infty$,* что

$$\varliminf_{j\to\infty} T(r_j,\ f)/T(qr_j,\ f)>0. \tag{1.14}$$

Тогда существует такая зависящая лишь от q константа $\delta_q>0$, что если $\delta\in(0,\ \delta_q]$ и n_j — целая часть числа $\delta T(r_j,\ f)$, то

$$\varliminf_{j\to\infty} \rho_{n_j}^{1/n_j}(f,\ \Gamma)>0. \tag{1.15}$$

Замечания. 1) Если условие (1.14) теоремы 4 заменить одним из условий

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, T(r, f)/T(qr, f) > 0, \tag{1.14'}$$

$$\underline{\lim}_{r\to\infty}\, T(r, f)/T(qr, f) > 0, \tag{1.14''}$$

то тогда из (1.15) соответственно следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \rho_n^{1/n}(f, \Gamma) > 0 \quad \text{и} \quad \underline{\lim}_{n\to\infty}\, \rho_n^{1/n}(f, \Gamma) > 0.$$

Отметим, что условие (1.14′) следует из предположения, что функция f имеет конечный *нижний* порядок λ. Наоборот, условие (1.14″) гарантирует конечность обычного порядка ρ функции f и является определенным условием регулярности ее роста.

2) Условие $\delta(\infty, f) = 1$ теоремы можно заменить условием $\delta(\infty, f) > 0$. Доказательство требует некоторой модификации леммы.

Следующий пример показывает, что от условия $\delta(\infty, f) > 0$ отказаться нельзя.

Пример. Пусть мероморфная функция f определена рядом

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z + h_k}, \tag{1.16}$$

где $1 \leqslant h_k \uparrow +\infty$ при $k \uparrow +\infty$ и $\sum |A_k| < +\infty$. Полагая

$$Q_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z + h_k}, \quad \varepsilon_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} |A_k|, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

очевидно, имеем

$$|f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{x+1} \to 0 \text{ при } x \to +\infty, \ x \in \Gamma = [0, +\infty),$$

$$|f(x) - Q_n(x)| \leqslant \varepsilon_n \text{ при } x \in \Gamma,$$

так что $\rho_n(f, \Gamma) \leqslant \varepsilon_n$. Здесь ε_n можно считать сколь угодно быстро убывающей к нулю и, в частности так, чтобы $\rho_n^{1/n}(f, \Gamma) \to 0$.

С другой стороны, для функций f вида (1.16) М. В. Келдыш доказал (см. [18] или [2], стр. 330), что

$$T(r, f) = N(r, f) + O(1) \text{ при } r \to \infty, \tag{1.17}$$

так что $\delta(\infty, f) = 0$. Если теперь для произвольного числа $\rho > 0$ фиксировать $h_k = k^{1/\rho}$, $k = 1, 2, \cdots$, то тогда $n(r, f) = r^\rho + O(1)$, $N(r, f) = r^\rho + O(\log r)(r \to \infty)$, так что, согласно (1.17), $T(r, f) = r^\rho + O(\log r)$. Таким образом, функция f имеет наперед заданный порядок ρ и удовлетворяет условию (1.14″), однако для нее $\rho_n^{1/n}(f, \Gamma) \to 0$.

§ 2. Доказательства

Нам будет удобнее доказывать теоремы 1—4 в следующей последовательности: сначала будет доказана теорема 2, затем — теоремы 3, 1 и 4. Далее мы придерживаемся обозначений, введенных в § 1.

1°. Для доказательства теорем 2 и 4 нам нужны определенные оценки гармонических мер и функций Грина. Начнем с первых. Рассмотрим неограниченную область $D \subset \mathbf{C}$. Для $r > r'$ рассмотрим (непустое) пересечение D_r области D с кругом $|z| \leqslant r$, $\omega_r(z)$ — гармоническая мера в точке z совокупности γ_r относительно D_r. Общие и достаточно хорошие оценки величины $\omega_r(z)$ в простых геометрических терминах были установлены М. Цудзи (см. [15], теорему III. 67 и Следствие):

$$\omega_r(z) \leqslant c_\tau \exp\left(-\pi \int_{2|z|}^{\tau r} \frac{dt}{t\theta(t)}\right) \text{ для } z \in D_r, \ |z| \leqslant \frac{\tau r}{2}, \tag{2.1}$$

где $0 < \tau < 1$ и $c_\tau > 0$ — определенная константа, зависящая лишь от τ.

Рассмотрим теперь более узкий класс неограниченных областей $D \subset \mathbf{C}$, которые односвязны и имеют непустое связное дополнение в $\mathbf{C}$. Для них $t\theta(t) = |\gamma_t|$ при $t > r'$. Для областей такого типа оценка Цудзи (2.1) несколько улучшена (при $z = 0 \in D$) П. Кусисом [19]:

$$\omega_r(0) \leqslant c_1 \exp\left(-\pi \int_0^r \frac{dt}{t\theta(t)}\right),$$

где $c_1 = 10$, но для нас достаточно, что c_1 не зависит от r.

Из этой оценки с помощью одного простого приема (см. [15], стр. 116) мы сейчас получим нужную нам оценку величины $\omega_r(z)$ при $z \neq 0$.

Пусть $z \in D_r$ и $\rho = 2|z| < r$. По принципу расширения Карлемана [4], гармоническая мера $\omega_r(z)$ только увеличится, если присоединить к D_r круг $|w| < \rho$. Применяя к этому кругу и функции $\omega_r(w)$ неравенство Гарнака для точки $w = z$, имеем, что $\omega_r(z) \leqslant 3\omega_r(0)$. Отсюда и из (2.1), учитывая, что D_r содержит круг $|w| < \rho$, получим

$$\omega_r(z) \leqslant c_2 \exp\left(-\pi \int_{2|z|}^{r} \frac{dt}{t\theta(t)}\right) \text{ при } z \in D_r, \ 2|z| \leqslant r. \tag{2.2}$$

Перейдем к оценке функции Грина и сформулируем соответствующее утверждение в виде леммы. Рассмотрим, как и в теореме 4, неограниченное замкнутое множество $\Gamma \subset \mathbf{C}$ с неограниченным связным дополнением D, и пусть при некотором $r' \geqslant 0$ все окружности $|z| = r$, $r \geqslant r'$ имеют непустое пересечение как с Γ, так и с D. Это условие несколько слабее сделанного в теореме 2 предположения, что дополнение D является неограниченным континуумом. Через $g(z, \zeta)$ будем обозначать функцию Грина области D.

Лемма. *Пусть $z_1, \cdots, z_n$ — точки из D, не обязательно попарно различные и пусть $I \subset (r', R]$ — компакт линейной меры λR, $0 < \lambda < 1$. Тогда существует $t \in I$ такое, что*

$$\sup_{z \in \gamma_t} \sum_{j=1}^{n} g(z, z_j) < n\pi^2 / \log \frac{1}{1-\lambda}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Положим

$$g(z) = \sum_{j=1}^{n} g(z, z_j)$$

и введем компакты E и F_0, где E — часть $\Gamma \cup \{\infty\}$, лежащая вне круга $|z| < r'$,

$$F_0 = \{z \in D : |z| \in I, \ g(z) = \sup_{\zeta \in \gamma_t} g(\zeta)\}.$$

Присоединяя к F_0 ограниченные компоненты его дополнения (если таковые имеются), мы получим компакт $F \supset F_0$. При этом компакты E и F не пересекаются и каждый из них имеет связное дополнение.

Рассмотрим теперь плоский конденсатор (E, F) и пусть $h(E, F)$ — его модуль $(= c^{-1}(E, F)$, где $c(E, F)$ — емкость конденсатора $(E, F))$. Согласно [10] (см. стр. 648, оценку (21)) имеем

$$\min_{z \in F} g(z) \leqslant nh(E, F).$$

Однако указанный минимум всегда достигается и на F_0: в случае $F \neq F_0$ это следует из гармоничности g на $F \setminus F_0$ и из принципа минимума гармонических функций. Поэтому существует $z_0 \in F_0$ такое, что $g(z_0) \leqslant nh(E, F)$. Полагая $|z_0| = t$ и учитывая определение множества F_0, имеем, что $t \in I$ и

$$\sup_{z \in \gamma_t} g(z) \leqslant nh(E, F). \tag{2.4}$$

Для оценки модуля $h(E, F)$ воспользуемся круговой симметризацией конденсатора (E, F). Положим

$$E^* = \{-|z| : z \in E\}, \ F^* = \{|z| : z \in F\}.$$

Хорошо известно (см., например, [11], стр. 648), что $h(E, F) \leqslant \leqslant h(E^*, F^*)$, и так как в нашем случае $E^* = I_\infty = [-\infty, -r']$ и $F^* = I$, то с учетом (2.4) оценка (2.3) и, следовательно, лемма будет доказана, если мы сумеем установить, что $h(I_\infty, I) < \pi^2 / \log \dfrac{1}{1-\lambda}$.

С этой целью докажем сначала следующий интуитивно очевидный факт: среди рассматриваемых компактов I фиксированной линейной меры λR минимум емкости конденсатора (I_∞, I) достигается в случае отрезка $\tilde{I} = [(1-\lambda) R, R]$, наиболее удаленного от I_∞, так что $h(I_\infty, I) \leqslant h(I_\infty, \tilde{I})$.

Достаточно обосновать этот факт в случае, когда компакт I регулярен, т. е. состоит из конечного числа отрезков. Рассмотрим функцию φ на $[0, +\infty)$, которая характеризуется следующими свойствами: φ непрерывна, $\varphi(x) = x$ при $x \geqslant R$, φ принимает постоянные значения на каждом интервале множества $[0, R] \setminus I$ и осуществляет сдвиги вправо вида $x \to x + d$, $d > 0$ отрезков — составляющих компонент I, притом так, чтобы имели $\varphi(I) = \tilde{I}$. Очевидно, функция φ уменьшает расстояния, т. е. $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|$ и двигает вправо все точки. т. е. $(\ x) \geqslant x$.

Для сравнения модулей конденсаторов (I_∞, I) и $(I_\infty, \tilde{I})$ воспользуемся теперь установленной в [11] (см. стр. 644, теорему 1) характеристикой модуля произвольного конденсатора (E, F):

$$h(E, F) = \lim_{m\to\infty} m^{-1} \log \sigma_m(E, F), \tag{2.5}$$

где

$$\sigma_m(E, F) = \sup_{\{r_m\}} \min_{z\in F} |r_m(z)| / \max_{z\in E} |r_m(z)|,$$

а верхняя грань берется в классе всех рациональных функций r_m порядка не выше m:

$$r_m(z) = a\,\frac{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_p)}{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_p)},\ p,\ q \leqslant m.$$

Сопоставим с r_m две новые рациональные функции порядка не выше m:

$$r_m^*(z) = a\,\frac{(z+|\alpha_1|)\cdots(z+|\alpha_p|)}{(z-|\beta_1|)\cdots(z-|\beta_q|)},$$

$$\tilde{r}_m(z) = a\,\frac{(z+|\alpha_1|)\cdots(z+|\alpha_p|)}{(z-\tilde{\beta}_1)\cdots(z-\tilde{\beta}_q)},\ \text{где}\ \tilde{\beta}_j = \varphi(|\beta_j|).$$

Очевидно, имеем

$$|r_m(x)| > |r_m^*(x)|\ \text{при}\ x<0,\ |r_m(x)| < |r_m^*(x)|\ \text{при}\ x>0.$$

С другой стороны, $|r_m^*(x)| \geqslant |\tilde{r}_m(x)|$ при $x<0$, так как $\tilde{\beta}_j \geqslant \beta_j$. Если же $\tilde{x}\in\tilde{I}$, то существует такая точка $x\in I$, что $\varphi(x)=\tilde{x}$. Тогда $x\leqslant\tilde{x}$ и $|\tilde{x}-\tilde{\beta}_j| < |x-|\beta_j||$, поэтому $|r_m^*(x)| \leqslant |\tilde{r}_m(\tilde{x})|$. Из отмеченных оценок следует, что

$$\max_{x\in I_\infty} |r_m(x)| \geqslant \max_{x\in I_\infty} |\tilde{r}_m(x)|,\ \min_{x\in I} |r_m(x)| \leqslant \min_{x\in \tilde{I}} |\tilde{r}_m(x)|,$$

так что $\sigma_m(I_\infty, I) \leqslant \sigma_m(I_\infty, \tilde{I})$, откуда согласно (2.5) следует требуемая оценка $h(I_\infty, I) \leqslant h(I_\infty, \tilde{I})$.

Осуществляя теперь линейное преобразование $L: z \to -\dfrac{z}{\lambda R} + \dfrac{1-\lambda}{\lambda}$ и полагая $h(\rho) = h([-1, 0], [\rho, +\infty])$, где $\rho = L(-r')$, получим, что $h(I_\infty, I) \leqslant h(\rho)$. Заметим далее (см. [20], стр. 53 и 75), что $\pi^{-1} h(\rho)$ и $\pi^{-1} h(\rho^{-1})$ являются взаимно сопряженными экстремальными расстояниями, соответственно, между отрезками $[-1, 0]$, $[\rho, +\infty]$ и $[-\infty, -1]$, $[0, \rho]$, поэтому выполняется тождество $h(\rho)\,h(\rho^{-1}) = \pi^2$. Полагая $q = \exp(-h(\rho^{-1}))$, имеем, что (см. [20], стр. 76, формулу (4.19))

$$16\rho^{-1} q = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n}}\right)^8 < 1-q,$$

откуда, учитывая, что $\rho\leqslant 2\lambda^{-1}(1-\lambda)$, получим оценку $h(\rho^{-1})>\log\frac{1}{1-\lambda}$.
Отсюда и из указанного выше тождества следует доказывающая лемму оценка.

2°. Доказательство теоремы 2. Пусть $z_1, z_2, \cdots, z_{n_k}$ — полюсы функции f, лежащие в D_{r_k} и $n_k=n(r_k, f)$, причем каждый полюс перечислен с учетом его кратности. Тогда имеем оценку

$$\log\frac{|f(z)|}{M}\leqslant \omega_{r_k}(z)\left[\log^+ M(r_k, f)+\log^+\frac{1}{M}\right]+\sum_{j=1}^{n_k} g(z, z_j),\ z\in D_{r_k},\quad (2.6)$$

которую легко проверить, перенеся все слагаемые в левую часть и применяя, с учетом (1.6) и (1.7), принцип максимума к образовавшейся субгармонической функции и к D_{r_k}.

Заметим теперь, что условия (1.8) и (1.9) сохраняются, если заменить $(\rho_k)_1^\infty$ и $(r_k)_1^\infty$ их подпоследовательностями $(\rho_{k_j})_1^\infty$ и $(r_{k_j})_1^\infty$. Поэтому можно считать, что ρ_k ограничена сверху, если ρ_k не стремится к $+\infty$. Однако, в этом случае очевидно, что вместо ρ_k существует $\tilde{\rho}_k=o(r_k)$, $\tilde{\rho}_k\to+\infty$, удовлетворяющая условиям (1.8) и (1.9) (даже с заменой A на 0). Поэтому без ограничения общности можем считать, что $\rho_k\to+\infty$ и $2\rho_k<r_k$ при $k\geqslant k_0$.

Оценим при $k\geqslant k_0$ функцию $\omega_{r_k}(z)$ в (2.6) для $z\in D_{r_k}$ и $|z|\leqslant\rho_k$ согласно (2.2), а для оценки последней суммы в (2.6) применим лемму, когда $n=n_k$ и $I=[\log\rho_k, \rho_k]$. В результате мы найдем такое $t_k\in I$, что функция f будет иметь одинаковую оценку для всех $z\in D_{r_k}$ и $|z|=t_k$, $k\geqslant k_0$, а именно:

$$\log\frac{M(t_k, f)}{M}<c_2\exp\left(-\pi\int_{\rho_k}^{r_k}\frac{dt}{t\,\theta(t)}\right)\left[\log^+ M(r_k, f)+\log^+\frac{1}{M}\right]+$$
$$+\frac{\pi^2 n_k}{\log(\rho_k/\log\rho_k)}.\qquad (2.7)$$

Первое слагаемое правой части (2.7) стремится к нулю при $k\to\infty$ согласно (1.8) и замечания, что $\exp(\ )<(\rho_k/r_k)^{1/2}$ (вследствие оценки $\theta(t)\leqslant 2\pi$). Второе слагаемое оценивается согласно (1.9), и поскольку в левой части $t_k\to+\infty$, то предельным переходом в (2.7) получим (1.10).

Доказательство теоремы 3. Проведем в $D\cup\{\infty\}$ замкнутую жорданову кусочно-линейную в D кривую Γ', состоящую, как и $\Gamma=\partial D=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, из двух жордановых дуг Γ_1' и Γ_2' с общим началом ζ_0' и концом ∞ и не имеющих других общих точек. Пусть Ω — подобласть D, ограниченная кривыми Γ и Γ', $t\varepsilon(t)$ — линейная мера множества $\{z\in\Omega:|z|=t\}$. Разрез L в Ω, соединяющий точку ζ_0' с началом ζ_0 дуг Γ_1 и Γ_2, делит Ω на две области Ω_i, $i=1, 2$; можно считать, что Ω_i ограничена кривой $L \cup \Gamma_i \cup \Gamma_i'$ и Γ_i' настолько быстро приближается к Γ_i в бесконечности, что выполняются условия

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \overline{\Omega}_i}} f(z) = a_i, \quad i = 1, 2, \tag{2.8}$$

$$\varepsilon(t) < \frac{1}{2} \theta(t) \text{ при } t > t', \int^{\infty} \frac{\varepsilon(t)}{t\theta^2(t)} dt < +\infty. \tag{2.9}$$

Теперь ясно, что достаточно доказать теорему для области $D' = D \setminus \Omega$, ограниченной замкнутой жордановой кривой Γ': при $a_1 = a_2 = a$, из утверждения (1.12) для области D' и из (2.8) следует (1.12) для области D. Для области D' условие (1.11) выполняется согласно (2.8), а оценка (1.9), очевидно, сохраняется. Выполнение (1.8) для D' следует из (1.8) и (2.9).

Итак, при доказательстве теоремы 3 без ограничения общности можем считать, что граница Γ области D является замкнутой жордановой кривой, а мероморфная в D функция f непрерывна вплоть до $\Gamma \setminus \{\infty\}$. Кроме того, как и при доказательстве теоремы 2, можем предположить, что $\rho_k \to +\infty$.

Рассмотрим теперь мероморфную в D и непрерывную вплоть до $\Gamma \setminus \{\infty\}$ функцию $z \to F(z) = P(f(z))$, $z \in D$, где

$$P(w) = c(w - a_1)(w - a_2), \quad c = (1 + |a_1|)^{-1}(1 + a_2)^{-1},$$

а пусть Q — произвольная рациональная функция с полюсами вне Γ и такая, что $Q(\infty) = 0$. Тогда, очевидно, что функция $F + Q$ удовлетворяет условию (1.11) при $a_1 = a_2 = 0$. Докажем, что она удовлетворяет и остальным условиям теоремы 3 при тех же (ρ_k) и (r_k), возможно, с заменой в (1.9) величины A на $2A$. Последнее, с учетом условия $\rho_k \to +\infty$, следует из (1.9) и оценки

$$n(r, F + Q) \leqslant 2n(r, f) + n_Q \text{ для } r > r',$$

где n_Q — порядок Q. Для проверки соблюдения условия (1.8) заметим, что

$$\log^+ |F + Q| \leqslant |Q| + \log^+ |F|,$$

$$\log^+ |P(w)| \leqslant 2 \log^+ |w| \text{ для } w \in \mathbf{C}.$$

Из этих оценок следует, что

$$\log^+ M(r, F + Q) \leqslant M(r, Q) + 2\log^+ M(r, f),$$

откуда, с учетом (1.8) и условия $M(r, Q) \to 0$ при $r \to \infty$, получим (1.8) для функции $F + Q$.

Полагая теперь $F(\infty) = 0$, воспользуемся тем, что сужение F на Γ непрерывно. Из аппроксимационной теоремы Уолша (см. [21], стр. 55) следует, что для наперед заданного $\varepsilon > 0$ рациональную функции Q, $Q(\infty) = 0$, можно подобрать так, чтобы

$$\sup_{z \in \Gamma} |F(z) + Q(z)| < \varepsilon.$$

При таком выборе Q функция $F+Q$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 (полагая в ней $M=\varepsilon$ и $2A$ вместо A), поэтому, согласно (1.10),

$$\varlimsup_{r\to\infty} M(r, F+Q)\leqslant \varepsilon e^{2\varkappa^2 A},$$

откуда, учитывая, что $M(r, Q)\to 0$ при $r\to\infty$, получим

$$\lim_{r\to\infty} M(r, F)\leqslant \varepsilon e^{2\varkappa^2 A},$$

и поскольку левая часть не зависит от ε, то

$$\varlimsup_{r\to\infty} M(r, F)=0. \tag{2.10}$$

Допустим теперь, что $a_1\neq a_2$. Тогда, очевидно, существуют *непересекающиеся* окрестности V_1 и V_2 этих точек и число $\delta>0$ такое, что из условия $|P(w)|<\delta$ следует, что $w\in V_1\cup V_2$. Согласно (2.10) существует $r_0>r'$ такое, что $M(r_0, F)<\delta$. На окружности $|z|=r_0$ существует дуга γ, лежащая в D, кроме своих концов $z_1\in\Gamma_1$, $z_2\in\Gamma_2$. Мы получаем, что $f(\gamma)\subset V_1\cup V_2$, причем $f(z_i)\in V_i\cap f(\gamma)\neq\varnothing$, $i=1$, 2. Однако это противоречит тому, что $f(\gamma)$ связно (как непрерывный образ дуги).

Таким образом, мы доказали, что $a_1=a_2(=a)$ и поскольку тогда

$$M(r, f-a)=c^{-1/2}M^{1/2}(r, F),\ r>r',$$

то заключение (1.12) следует из (2.10). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1. Допустим, что функция f имеет по крайней мере p конечных асимптотических значений $a_1,\dots, a_p$ (с учетом кратности), причем при $p=1$ значение $a=a_1$ удовлетворяет условию (1.3), $\Gamma_1,\dots,\Gamma_p$ — соответствующие попарно неэквивалентные (при $p>1$) асимптотические пути, являющиеся жордановыми дугами с началом 0 и концом ∞. При $p>1$ можем считать, что они попарно не имеют других общих точек.

Положим $D_1=\mathbf{C}\setminus\Gamma$ при $p=1$. Если же $p>1$, то кривые $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_p$ разбивают плоскость $\mathbf{C}$ на попарно непересекающиеся области $D_1,\cdots, D_p$, причем граница D_j состоит из Γ_j и $\Gamma_{j+1}(\Gamma_{p+1}=\Gamma_1)$. Если $r\theta_j(r)$ означает линейную меру множества $\{z\in D_j: |z|=r\}$, $r>0$, то очевидно

$$\sum_{j=1}^{p}\theta_j(r)\leqslant 2\pi. \tag{2.11}$$

Теперь вместе с $(r_k)_1^\infty$ рассмотрим последовательность $(\rho_k)_1^\infty$, $\rho_k=o(r_k)$, определяемую формулой

$$\rho_k=\left(\frac{r_k^{p/2}}{1+\log^+ M(r_k, f)}\right)^{1/p},\ k=1, 2,\cdots,$$

которая, с учетом (1.1) и (1.2), будет удовлетворять условиям

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\rho_k}{r_k}\right)^{p/2}\log^+ M(r_k; f)=0,\ n(r_k, f)=O(\log\rho_k),\ k\to\infty. \tag{2.12}$$

Для фиксированного j, $1 \leqslant j \leqslant p$ имеем, что

$$\log \frac{r_k}{\rho_k} = \int\limits_{\rho_k}^{r_k} \frac{dt}{t} \leqslant \left(\int\limits_{\rho_k}^{r_k} \frac{\theta_j(t)}{t}\, dt \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\rho_k}^{r_k} \frac{dt}{t\theta_j(t)} \right)^{1/2},$$

откуда, суммируя по j и еще раз применяя неравенство Коши-Буняковского, с учетом (2.11), получим

$$p \log \frac{r_k}{\rho_k} \leqslant \left(\int\limits_{\rho_k}^{r_k} \left(\sum_{j=1}^{p} \theta_j(t) \right) \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{p} \int\limits_{\rho_k}^{r_k} \frac{dt}{t\theta_j(t)} \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{1/2} \left(\log \frac{r_k}{\rho_k} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{p} \int\limits_{\rho_k}^{r_k} \frac{dt}{t\theta_j(t)} \right)^{1/2},$$

так что

$$\log \left(\frac{r_k}{\rho_k} \right)^{p/2} \leqslant \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} \pi \int\limits_{\rho_k}^{r_k} \frac{dt}{t\theta_j(t)}.$$

Отсюда следует, что существует такое $j = j(k)$, что

$$\log \left(\frac{r_k}{\rho_k} \right)^{p/2} \leqslant \pi \int\limits_{\rho_k}^{r_k} \frac{dt}{t\theta_j(t)}. \tag{2.13}$$

Однако, ввиду конечности числа индексов $j = j(k)$, существует такое j, скажем $j = 1$, что оценка (2.13) выполняется для бесконечной последовательности $k = k_m \to \infty$. Тогда

$$\exp \left(-\pi \int\limits_{\rho_{k_m}}^{r_{k_m}} \frac{dt}{t\vartheta_1(t)} \right) \leqslant \left(\frac{\rho_{k_m}}{r_{k_m}} \right)^{p/2}.$$

Отсюда и из (2.12) следует, что функция f в области D_1 удовлетворяет условиям (1.8) и (1.9) для последовательностей (ρ_{k_m}) и (r_{k_m}). Кроме того, она, очевидно, удовлетворяет также условию (1.11) теоремы 3 (полагая $a_2 = a_1 = a$ при $p = 1$). Поэтому, согласно теореме 3, при $p = 1$ функция f удовлетворяет условию (1.12), откуда следует оценка

$$\varliminf_{r \to \infty} M(r, f) \leqslant |a|,$$

противоречащая допущению (1.3). Если же $p > 1$, то мы имеем, что $a_1 = a_2$ и тогда (1.12) означает, вопреки нашему допущению, что асимптотические пути Γ_1 и Γ_2 эквивалентны. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы 4. Поскольку область $D = \mathbf{C} \setminus \Gamma$ не может быть ограниченной, выберем числа $r' > 0$ так, чтобы окружности $|z| = r$ при $r \geqslant r'$ пересекались с D. Можно также без ограничения общности считать, заменяя в случае надобности f на $f - Q_{n_0}$, что функция f не имеет полюсов на Γ и $|f(z)| \leqslant 3^{-1}$ для $z \in \Gamma$, откуда следует, что $\rho_n = \rho_n(f, \Gamma) \leqslant r^{-1}$ для $n = 1, 2, \cdots$.

Выберем теперь рациональную функцию Q_n порядка n так, чтобы

$$|f(z) - Q_n(z)| < 2\rho_n \text{ для } z \in \Gamma, \; n = 1, 2, \cdots. \tag{2.14}$$

Ясно, что Q_n не имеет полюсов на Γ и, кроме того, $|Q_n(z)| \leqslant 1$ для $z \in \Gamma$. Если $g(z, \zeta)$ — функция Грина области $D = \mathbf{C} \setminus \Gamma$ и $\zeta_1, \cdots, \zeta_n$ — полюсы функции Q_n, перечисленные с учетом их кратности, то по принципу максимума имеем

$$\log|Q_n(z)| \leqslant \sum_{m=1}^{n} g(z, \zeta_m) \text{ для } z \in D. \tag{2.15}$$

Для дальнейшего весьма полезна следующая известная оценка Р. Неванлинны (см. [2], стр. 55, теорему 7.2): для мероморфной функции f и числа $\mu > 1$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{r}\int_0^r \log^+ M(t, f)\, dt \leqslant k(\mu)\, T(\mu r, f),$$

где постоянная $k(\mu) > 1$ зависит только от μ. Отсюда, полагая $\mu = \sqrt[5]{q}$, $k_q = \mu^2(\mu - 1)^{-1} k(\mu)$ и заменяя r на $\mu^4 r$, мы получим, что линейная мера отрытого множества

$$G = \{t \in (0, \mu^3 r) : \log^+ M(t, f) > k_q\, T(qr, f)\}$$

меньше, чем $(\mu^3 - \mu^2)\, r$. Тогда существует такой компакт $I_r \subset [\mu^3 r, \mu^4 r] \setminus G$ линейной меры $|I_r| = (\mu^4 - \mu^3)\, r$, что

$$\log^+ M(t, f) < k_q\, T(qr, f) \text{ для } t \in I_r. \tag{2.16}$$

Для оценки правой части (2.15) применим установленную выше лемму в случае, когда $I = I_{r_j}$, $R = \mu^4 r_j$, $r_j > r'$, и, следовательно, $\lambda = 1 - \mu^{-1}$. С учетом (2.3) и (2.15) мы найдем такую точку $t_j \in I_{r_j}$, что

$$\log^+ M(t_j, Q_n) < c_q\, n, \tag{2.17}$$

где для нас достаточна информация, что константа c_q зависисит только от q.

Пусть теперь $z_1, z_2, \cdots, z_{p_j}$ — полюсы функции f, лежащие в круге $|z| \leqslant t_j$ и перечисленнные с учетом их кратности, так что $p_j = n(t_j, f)$ и $z_{p_j+1} = \zeta_1, \cdots, z_{p_j+n} = \zeta_n$. Рассмотрим пересечение D_{t_j} области D с кругом $|z| < t_j$ и оценим $f - Q_n$ в D_{t_j} сверху. Из (2.16) при $r = r_j$ и $t = t_j$ и из (2.17) следует, что

$$\log^+ M(t_j, f - Q_n) \leqslant k_q\, T(qr_j, f) + c_q n + 1,$$

и принцип максимума субгармонических функций с учетом (2.14) приводит нас к оценке

$$\log|f(z) - Q_n(z)| \leqslant \sum_{m=1}^{p_j+n} g(z, z_m) + \omega_j^*(z)\log\rho_n +$$

$$+ k_q T(qr_j, f) + c_q n + 2, \quad z \in D_{t_j}, \tag{2.18}$$

где ω_j^* — гармоническая мера относительно D_{t_j} части множества Γ, лежащей в круге $|z| \leqslant t_j$.

Первое слагаемое в правой части (2.18) мы опять можем оценить с помощью леммы, полагая на этот раз $I = [r_j, \mu r_j]$ и $R = \mu r_j$, так что опять $\lambda = |I| R^{-1} = 1 - \mu^{-1}$. Мы найдем такую точку $\tau_j \in [r_j, \mu r_j]$, что

$$\sup_{z \in \gamma_{\tau_j}} \sum_{m=1}^{p_j+n} g(z, z_m) < c_q(p_j + n). \tag{2.19}$$

Отсюда и из (2.15), между прочим, следует, что

$$\log^+ M(\tau_j, Q_n) < c_q(p_j + n). \tag{2.20}$$

Далее, поскольку $\rho_n < 1$, возникает необходимость оценить в (2.18) величину $\omega_j^*(z)$ снизу для тех же $z \in \gamma_{\tau_j}$. Пусть $D_{t_j}^*$ — компонента D_{t_j}, содержащая точку $z \in \gamma_{\tau_j}$, $\Gamma_{t_j}^* = \Gamma \cap \partial D_{t_j}^*$. По определению, $\omega_j^*(z)$ — это гармоническая мера $\Gamma_{t_j}^*$ в точке z относительно области $D_{t_j}^*$. Легко видеть, что $\Gamma_{t_j}^*$ пересекается со всеми окружностями $|z| = r$, $\theta \leqslant r \leqslant t_j$, так что для оценки $\omega_j^*(z)$ снизу применима оценка Карлемана-Мию (см. [4], гл. IV, § 5, стр. 104—109): точнее, можно утверждать (поскольку $t_j \geqslant \mu\tau_j$), что существует зависящая лишь от q константа $a_q \in (0, 1)$ такая, что $\omega_j^*(z) \geqslant a_q$ для $z \in \gamma_{\tau_j}$. Тогда из оценок (2.18) и (2.14) с учетом (2.19) следует, что

$$\log M(\tau_j, f - Q_n) \leqslant a_q \log\rho_n + k_q T(qr_j, f) + 2c_q p_j + c_q n + 2. \tag{2.21}$$

Заметив теперь, что $t_j \leqslant \mu^4 r_j$, с учетом условий $\delta(\infty, f) = 1$ и (1.14), имеем

$$p_j \leqslant (\log\mu)^{-1} \int_{\mu^4 r_j}^{qr_j} \frac{n(t, f)\,dt}{t} < (\log\mu)^{-1} N(qr_j, f) =$$

$$= o(T(qr_j, f) = o(T(r_j, f)) \text{ при } j \to \infty,$$

так что полагая $\delta_q = (3c_q)^{-1}$ и $n_j = [\delta T(r_j, f)]$, где $0 < \delta \leqslant \delta_q$, из (2.20) получим

$$M(\tau_j, Q_{n_j}) < \exp\left(\frac{1}{2} T(r_j, f)\right) \text{ при } j > j_0.$$

Аналогично из (2.21), с учетом (1.14), имеем

$$M(\tau_j, f - Q_{n_j}) < \rho_{n_j}^{a_q} \exp(O(T(r_j, f))) \text{ при } j \to \infty,$$

так что, с одной стороны

$$M(\tau_j, f) < \exp\left(\frac{1}{2} T(r_j, f)\right) + \rho_{n_j}^{-1} \exp(O(T(r_j, f))).$$

С другой стороны, из условия $\delta(\infty, f) = 1$ и из оценки $\tau_j \geqslant r_j$ следует, что

$$M(\tau_j, f) \geqslant \exp([1 - o(1)]\, T(\tau_j, f)) \geqslant \exp([1 - o(1)]\, T(r_j, f)).$$

Сопоставление полученных для $M(\tau_j, f)$ неравенств дает оценку

$$\rho_{n_j} \geqslant \exp(-O(T(r_j, f)),\ j \to \infty,$$

откуда, учитывая, что $n_j = \delta T(r_j, f) + O(1)$, приходим к (1.15). Теорема 4 доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР
МИАН СССР им. В. А. Стеклова

Поступила 4. XII. 1987

Ռ. Ա. Ավետիսյան, Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ, Ա. Ա. ԳՈՆՉԱՐ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների ասիմպտոտիկ հատկությունների մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքի հիմնական նպատակն է ամբողջ ֆունկցիաների ասիմպտոտական արժեքների քանակի վերաբերյալ Դանժուա-Կարլեմանի-Ալֆորսի հայտնի թեորեմի մերոմորֆ նմանակի ստացումը։ Հաստատված են նաև Ֆրագմեն-Հինդելյոֆի թեորեմի ընդհանրացված տարբերակների մերոմորֆ նմանակներ և արդյունքներ ասիմպտոտական ճանապարհի վրա մերոմորֆ ֆունկցիայի լավագույն ռացիոնալ մոտավորությունների արագության վերաբերյալ։

R. A. AVETISYAN, N. U. ARAKELYAN, A. A. GONCAR. *On asymptotic properties of meromorphic functions* (summary)

The main purpose of this work is the establishment of meromorphic analogues of the well known Denjoy—Carleman—Ahlfors' theorem. It is also established the meromorphic analogues of the generalized variants of Phragmen—Lindelöf theorem and the results on a speed of the best rational approximations of a meromorphic function on an asymptotic path.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Ahlfors.* Untersuchungen zur Theorie der konformen Abildung und ganzen Functionen, Acta Soc. Feen., 1, № 9, 1930, 1—40.
2. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский.* Распределение значений мероморфных функций, М., Наука, 1970.
3. *А. А. Гольдберг.* Мероморфные функции. Матем. анализ. т. 10, Итоги науки и техники, М., Наука, 1970.
4. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М.—Л., Гостехиздат, 1941.
5. *R. Nevanlinna.* Le théorème de Picard—Borel et la théorie des fonctions meromorphes, Paris, Gauthier—Villars, 1929.
6. *G. Valiron.* Sur les valeurs asymptotiques de quelques functions méromorphes Palermo Rend., 46, 1925.
7. *G. Valiron.* Sur le nombre des singularités des fonctions inverses dúne d'algebroides, C. R. Acad. sci. 200, 1935, 713—715.
8. *Y. Tumura.* Recherches sur la distribution des valuers des fonctions analytiques, Jap. J. Math., 18, № 4, 1943, 797—876.

9. *Г. Полиа и Г. Сеге.* Изопериметрические неравенства в математической физике, М., Физматгиз, 1962.

10. *G. Szegö.* On the capacity of a condenser, Bull. of Amer. Math. Soc., 51, 1945, 325—350.

11. *А. А. Гончар.* О задачах Е. И. Золотарёва, связанных с рациональными функциями, Мат. сборник, 78 (120), № 4, 1969, 640—654.

12. *А. А. Гончар.* Скорость рациональной аппроксимации и свойство однозначности аналитической функции в окрестности изолированной особой точки, Мат. сборник, 94 (136), № 2 (6), 1974, 265—282.

13. *W. H. J. Fuchs and A. A. Gončar.* Appoximation of entire functions on bounded continua, Canad. Math. Soc. Conf. Proceedings, v. 3, 1983, 171—184.

14. *Н. У. Аракелян, Р. А. Аветисян.* О наилучшем равномерном приближении мероморфными функциями на вещественной оси, ДАН СССР, 257, № 6, 1981, 1289—1292.

15. *M. Tsjuzi.* Potential theory in modern function theory, Maruzen, Tokyo, 1959.

16. *W. H. J. Fuchs.* Topics in theory of functions of one complex variable, Van Nostrand, Princeton, 1967.

17. *W. J. Cody, G. Meinardus and R. S. Varga.* Chebyshev rational approximations to e^{-x} in $[0, \infty)$ and applications to heat condition problems, J. Approx. Theory, 2, 1969, 50—65.

18. *М. В. Келдыш.* О рядах по рациональным дробям, ДАН СССР, 94, № 3, 1954, 377—380.

19. *P. Koosis.* Extremal length and harmonic measure of general sets on a Jordan curve (manuscript. Jan. 29, 1983).

20. *L. V. Ahlfors*, Conformal invariants, Mc. Graw—Hill, N. Y., 1973.

21. *Дж. Л. Уолш.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, ИЛ, М., 1961.