ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIV, № 2, 1989 Математика

УДК 517.95

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. С. ГРИГОРЯН, А. Б. НЕРСЕСЯН

ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ-ГУРСА И КОШИ-ДАРБУ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1°. Теория задачи Коши для слабо гиперболического уравнения с вырождением на гладком многообразии продвинута достаточно далеко (см. [1]). Изучены также многие случаи вырождения на более общих множествах ([2]). Однако другие классические задачи для таких уравнений изучены очень мало. И это неудивительно, если учесть, что уже для простейших модельных слабо гиперболических уравнений второго порядка в плоском случае задачи типа Гурса и Дарбу оказываются некорректными, а попытка их изучения в более или менее общих случаях наталкивается на технические преграды, до сих пор не преодоленные. Заметим также, что упомянутая некорректность может иметь место, когда задача Коши заведомо корректна, а уравнение вырождается лишь на некоторой гладкой линии (см. [3]).

В связи с этим определенный интерес представляет случай «минимального» вырождения, то есть вырождения лишь в одной точке.

Ниже будут изучены некоторые краевые задачи для определенного класса модельных уравнений, вырождающихся в одной точке на границе области.

2°. Рассмотрим уравнения

$$\partial_+ ((t + \varphi(\operatorname{arctg}(x + t) - t))\, \partial_- U - U) = 0, \tag{1}$$

$$\partial_- ((t + \varphi(\rho(x, t)))\, \partial_+ U - U) = 0, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция $\partial_\pm = \dfrac{\partial}{\partial t} \pm (x + t)^2 \dfrac{\partial}{\partial x}$ и

$$\rho(x, t) = [\exp(\ln[(1 + x + t)(1 - x - t)^{-1}] - 2t) - 1] \times$$
$$\times [\exp(\ln[(1 + x + t)(1 - x - t)^{-1}] - 2t) + 1]^{-1}.$$

Характеристики этих уравнений определяются функцией $\lambda(x, t) = (x + t)^2$ и, таким образом, вырождение происходит на прямой $x + t = 0$. В данных случаях семейства характеристик выписываются, соответственно, явно посредством формул

$$x = \operatorname{tg}(t + \text{const}) - t,$$

$$x = [\exp(2t + \text{const}) - 1][\exp(2t + \text{const}) + 1]^{-1} - t$$

и нетрудно видеть, что речь идет о модельных уравнениях типа предложенных в [3].

Задачи будут рассматриваться в характеристическом треугольнике G, опирающемся на отрезок $[0, 1/2]$. Обозначим координаты его вершины B, лежащей в полуплоскости $t>0$, через (p, q).

Таким образом, уравнение (1), рассматриваемое в G, вырождается лишь при приближении к точке $(0, 0)$.

3° Задачи Коши с начальными данными

$$U(x, 0) = \alpha(x), \quad U_t(x, 0) = \beta(x) \tag{3}$$

заведомо корректна при соответствующих ограничениях на φ—достаточно применить один из известных критериев (напр., [1]). Однако для дальнейшего понадобятся более точные условия и явные формулы.

Пронитегрировав уравнения (1), (2) по соответствующим характеристикам и учитывая (3), получим

$$U(x, t) = \left[\alpha(z(0, x, t)) - \sum_{l=1}^{N} \frac{\alpha_{(0)}^{(l)}}{l!} z^l(0, x, t)\right] \exp\left\{\int_0^t (\tau +\right.$$

$$\left. + \varphi(\operatorname{arctg} z(\tau, x, t))^{-1}\right\} d\tau + \int_0^t \left\{\left| \varphi(\operatorname{arctg} z(\eta, x, t))(\beta(z(\eta, x, t)) -\right.\right.$$

$$- z^2(\eta, x, t)\,\alpha'(z(\eta, x, t))) - \left(\alpha(z(\eta, x, t)) - \sum_{l=1}^{N} \frac{\alpha_{(0)}^{(l)}}{l!} z^l(\eta, x, t)\right)\Bigg| \times$$

$$\times (\eta + \varphi(\operatorname{arctg} z(\eta, x, t)))^{-1} - \sum_{l=0}^{N} \frac{\alpha_{(0)}^{(l)}}{l!} z_\eta^l(\eta, x, t)\Bigg\} \exp\left\{\int_\eta^t (\tau +\right.$$

$$\left. + \varphi(\operatorname{arctg} z(\tau, x, t)))^{-1} d\tau\right\} d\eta + \sum_{l=1}^{N} \frac{\alpha_{(0)}^{(l)}}{l!} z^l(t, x, t), \tag{4}$$

где

$$z(\eta, x, t) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}[(\exp\{2\eta - 2t + \ln[(1 + x + t)(1 - x - t)^{-1}]\} - 1)\times$$

$$\times (\exp\{2\eta - 2t + \ln[(1 + x + t)(1 - x - t)^{-1}]\} + 1)^{-1}] - \eta),$$

$$U(x, t) = \left[\alpha(\delta(0, \varepsilon, t)) - \sum_{l=0}^{N} \frac{\alpha^{(l)}(0)}{l!} \delta^l(0, \varepsilon, t)\right] \exp\left\{\int_0^t (\tau +\right.$$

$$\left. + \varphi(\delta(\tau, \varepsilon, t)))^{-1} d\tau\right\} + \int_0^t \left\{\left| \varphi(\delta(\eta, x, t)(\beta(\delta(\eta, x, t)) +\right.\right. \tag{5}$$

$$+ \delta^2(\eta, x, t)\,\alpha'(\delta(\eta, x, t))) - \left(\alpha(\delta(\eta, x, t)) - \sum_{l=1}^{N} \frac{\alpha^{(l)}(0)}{l!} \delta^l(\eta, \varepsilon, t)\right)\Bigg] \times$$

$$\times \exp\left\{\int_\eta^t (\tau + \varphi(\delta(\tau, \varepsilon, t)))^{-1} d\tau\right\}(\eta + \varphi(\delta(\eta, \varepsilon, t))^{-1} -$$

$$- \sum_{l=0}^{N} \frac{\alpha^{(l)}(0)}{l!} \delta_\eta^l(\eta, \varepsilon, t) \exp\left\{\int_\eta^t (\tau + \varphi(\delta(\tau, \varepsilon, t)))^{-1} d\tau\right\} d\eta + \sum_{l=0}^{N} \frac{\alpha^{(l)}(0)}{l!} \delta^l(t, \varepsilon, t),$$

а $x+t=\varepsilon+\operatorname{tg} t$ и

$$\vartheta(\eta, x, t)=[\exp(\ln[(1+\operatorname{tg}(\eta+\operatorname{arctg}(x+t)-t))(1-\operatorname{tg}(\eta+ \\ +\operatorname{arctg}(x+t)-t))^{-1}]-2\eta)-1][\exp(\ln[(1+\operatorname{tg}(\eta+ \\ +\operatorname{arctg}(x+t)-t))(1-\operatorname{tg}(\eta+\operatorname{arctg}(x+t)-t))^{-1}]-2\eta)+1]^{-1}.$$

Из (4) и (5) следует

Теорема 1. *Решение задачи Коши* (1), (2) *и* ((2), (2) *в классе* $C^2(G)\cap C(\overline{G})$ *существует и единственно при условии*

$$\left|\alpha(z)-\sum_{i=0}^{N}\frac{\alpha^{(i)}(0)}{i!}z^i\right|\leqslant L\cdot\varphi(z),\ L=\text{const}>0. \tag{6}$$

4°. Задача Дарбу

$$U(x, 0)=\alpha(x),\ U(x^-(t), t)=\nu(t), \tag{7}$$

где $x^-(t)$ — соответствующая из характеристик, исходящих из точки (1/2, 0).

Интегрируя уравнение (1) и подставляя $t\to 0$ ($t\,\partial\,u\to 0$), получим

$$\alpha(x)=\varphi(\operatorname{arctg} x)(\beta(x)-x^2\alpha'(x))+\nu(p-x\sin^{-2}p)- \\ -(p-x\sin^{-2}p+\varphi(\operatorname{arctg} x))\nu'(p-x\sin^{-2}p).$$

Это соотношение, связывающее α, β, ν—ключевое.

Проведя второе интегрирование, получим

$$U(x, t)=\left[\alpha(z(0, x, t))-\sum_{i=0}^{N}\frac{\alpha^{(i)}(0)}{i!}z^i(0, x, t)\right]Q(0, x, t)+ \\ +\int_0^t\left\{\left[\theta(\eta, x, t)+\varphi(\operatorname{arctg} z(\eta, x, t))\right)\nu'(\theta(\eta, x, t))- \\ -\nu(\theta(\eta, x, t))+\sum_{i=0}^{N}\frac{\alpha^{(i)}(0)}{i!}z^i(\eta, x, t)\right](\eta+\varphi(\operatorname{arctg} z(\eta, x, t)))^{-1}- \\ -\sum_{i=0}^{N}\frac{\alpha^{(i)}(0)}{i!}z^i_\eta(\eta, x, t)\right\}Q(\eta, x, t)\,d\eta+\sum_{i=0}^{N}\frac{\alpha^{(i)}(0)}{i!}z^i(t, x, t),$$

где

$$\theta(\eta, x, t)=p-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} z(\eta, x, t)-\operatorname{tg}\eta)\sin^{-2}p,$$

$$Q(\eta, x, t)=\exp\left\{\int_\eta^t(\tau+\varphi(\operatorname{arctg} z(\tau, x, t)))^{-1}d\tau\right\}.$$

Отсюда следует

Теорема 2. *Решение задачи Дарбу* (1), (7) *в классе* $C^2(G)\cap C(\overline{G})$ *существует и единственно при условии* (6), *если дополнительно потребовать, что*

$$(p\,\nu'(p)-\nu(p))^{(i)}+\alpha^{(i)}(0)=0,\ i=1, 2, \cdots, n.$$

5°. Задача Коши—Дарбу

$$U_t(x, 0)=\beta(x),\ U(x^-(t), t)=\nu(t) \tag{8}$$

сводится, как нетрудно убедиться, к интегральному уравнению

$$U(x, t) = \nu(p - (x + t - \operatorname{tg} t)\sin^{-2}p)\, W_1(0, x, t) +$$

$$+ \int\limits_{p-(x+t-\operatorname{tg} t)\sin^{-2}p}^{t} \{\varphi(\delta(\eta, x, t)) \times (\beta(\delta(\eta, x, t)) +$$

$$+ \delta^2(\eta, x, t)\, U'(\delta(\eta, x, 0), 0)) - U(\delta(\eta, x, 0), 0)] \times$$

$$\times W_2(\eta, x, t)(\eta + \varphi(\delta(\eta, x, t)))^{-1}]\, d\eta,$$

где

$$W_1(0, x, t) = \exp\left\{ \int\limits_{t}^{p-(x+t-\operatorname{tg} t)\sin^{-2}p} (\tau + \varphi(\delta(\tau, x, t)))^{-1}\, d\tau \right\},$$

$$W_2(\eta, x, t) = \exp\left\{ \int\limits_{\eta}^{t} (\tau + \varphi(\delta(\tau, x, t)))^{-1}\, d\tau \right\}.$$

При $t=0$ приходим к интегральному уравнению типа Вольтерра:

$$U(x, 0) = \Phi(x) + R(x, p)\, U(\delta(p - x\sin^{-2}p, x, 0), 0) -$$

$$- 2 \int\limits_{0}^{p-x\sin^{-2}p} K(\eta, p, x)\, U(\delta(\eta, x, 0), 0)\, d\eta,$$

которое однозначно разрешимо, если $|R(x, p)| < 1$ и

$$\left| \int\limits_{0}^{p-x\sin^{-2}p} |K(\eta, x, p)|\, d\eta \right| \to 0, \text{ где } p \to 0 \text{ при}$$

$$R(x, p) = 2\varphi(\delta(p - x\sin^{-2}p, x, 0))\, \delta^2(p - x\sin^{-2}p, x, 0) \exp\Bigg\{ -$$

$$- \int\limits_{0}^{p-x\sin^{-2}p} (\tau + \varphi(\delta(\tau, x, 0)))^{-1}\, d\tau \Bigg\} [p - x\sin^{-2}p +$$

$$+ \varphi(\delta(-x\sin^{-2}p, x, 0))\, \delta'(p - x\sin^{-2}p, x, 0)]^{-1},$$

$$K(\eta, x, p) = \exp\left\{ - \int\limits_{0}^{\eta} (\tau + \varphi(\delta(\tau, x, 0)))^{-1}\, d\tau \right\} (\eta + \varphi(\delta(\eta, x, 0)))^{-1} -$$

$$- \frac{d}{d\eta} \Bigg[\varphi(\delta(\eta, x, 0))\, \delta^2(\eta, x, 0) \times$$

$$\times \exp\left\{ - \int\limits_{0}^{\eta} (\tau + \varphi(\delta(\tau, x, 0)))^{-1}\, d\tau \right\} [\eta + \varphi(\delta(\eta, x, 0))\, \delta_\eta(\eta, x, 0)]^{-1} \Bigg].$$

Чтобы обеспечить эти условия заметим, что если $q = p - x\sin^{-2}p$, $0 < q < p$

$$2\,\delta^2(q, x, 0)(\delta'(q, x, 0))^{-1} < 1 + 1/9\cdot(q+x)^4 + 2/3\cdot(q+x)^2,$$

$$\exp\left\{-\int_0^q (\tau + \varphi(\delta(\tau, x, 0)))^{-1}\,d\tau\right\} < \exp\{-q(\varphi(x) + (1+2x^2\varphi'(x))\,q)^{-1}\} < 1,$$

то $|R(x, p)| < 1$.

Для доказательства второго неравенства заметим, что

$$\max_{0<\eta<p} |K(\eta, x, p)| = N(x, p) < +\infty \text{ при } x > 0.$$

Обозначим найденное решение через $V(x, t)$ и $\varepsilon = x + t - \operatorname{tg} t$. В итоге получим

$$U(x, t) = \left(\nu(p - \varepsilon \sin^{-2} p) - \sum_{l=0}^{N} \frac{\nu^{(l)}(p)}{l!}(p - \varepsilon \sin^{-2} p)^l\right)\Omega_1(\varepsilon, t) +$$

$$+ \int\limits_{p-\varepsilon\sin^{-2}p}^{t} \left\{\left[\varphi(\delta(\eta, \varepsilon, 0))(\beta(\delta(\eta, \varepsilon, 0)) + \delta^2(\eta, \varepsilon, 0)\,V'(\delta(\eta, \varepsilon, 0), t) -\right.\right.$$

$$\left.- \left(V(\delta(\eta, \varepsilon, 0), t) - \sum_{l=0}^{N} \frac{\nu^{(l)}(p)}{l!}\eta^l\right)\right](\eta + \varphi(\delta(\eta, \varepsilon, 0)))^{-1} -$$

$$\left.- \sum_{l=0}^{N} \frac{\nu^{(l)}(p)}{l!}(\eta^l)'\right\}\Omega_2(\eta, t, \varepsilon)\,d\eta + \sum_{l=0}^{N} \frac{\nu^{(l)}(p)}{l!}t^l,$$

где

$$\Omega_1(\varepsilon, t) = \exp\left\{\int\limits_{p-\varepsilon\sin^{-2}p}^{t} (\tau + \varphi(\delta(\tau, \varepsilon, 0)))^{-1}\,d\tau\right\},$$

$$\Omega_2(\eta, t, \varepsilon) = \exp\left\{\int_\eta^t (\tau + \varphi(\delta(\tau, \varepsilon, 0)))^{-1}\,d\tau\right\}.$$

Отсюда следует

Теорема 3. *Решение задачи Коши—Дарбу (2), (8) существует и единственно в классе $C^2(G) \cap C(\overline{G})$ при выполнении оценки*

$$\left|\nu(z) - \sum_{l=0}^{N} \frac{\nu^{(l)}(p)}{l!} z^l\right| \leqslant L\,\varphi(z),\ L = \text{const} > 0.$$

6°. Задача Гурса с граничными данными

$$U(x^+(t), t) = \Psi_0(t),\ U(x^-(t), t) = \Psi_1(t), \tag{9}$$

ггде $x^-(t)$, $x^+(t)$—пара характеристик, исходящих из точки (0, 0).

Проинтегрировав уравнение (1) по соответствующим характеристикам, получим

$$U(x, t) = \left[\Psi_0(c_2 t)(c_2 t + \varphi(c_3 t))^{-1} + \int_{c_3 t}^{t} (c_1 \tau \Psi_1'(c_1\tau) -\right.$$

$$\left.- \Psi_1(c_1\tau)(\tau + \varphi(t^3))^{-2}\,d\tau\right][t + \varphi(t^3)]^{-1}.$$

После упрощения этого интеграла получим

$$U(x,\ t)=(t+\varphi(t^3))\,[\Psi_0(c_2 t)(c_2 t+\varphi(c_3 t))^{-1}+$$
$$+(c_4 t\,\Psi_1'(c_4 t)-\Psi_1(c_4 t)(c_2 t+\varphi(t^3))^{-1}]-$$
$$-c_1 t\,\Psi_1'(c_1 t)+\Psi_1(c_1 t)+c_5\int\limits_{c_4 t}^{t}\tau^2\,\Psi_1''(\tau\cdot c_1)(\tau+\varphi(t^3))^{-1}\,dt,$$

где $c_2=3^{1/3}$, $c_3=c_2-1$, $c_4=c_1\cdot c_2$, $c_5=c_1^2$.

В итоге получаем следующий результат:

Теорема 4. *Решение задачи Гурса* (1), (9) *существует и единственно в* $C^2(\bar{G})$, *если* $\Psi_1(t_1)\in C^2[0,\ 1/2]$ *и*

$$|\Psi_0(c_2 t)(c_2 t+\varphi(c_3 t))^{-1}+(c_4 t\,\Psi_1'(c_4 t)-$$
$$-\Psi_1(c_4 t)(c_2 t+\varphi(t^3))^{-1}|\leqslant L(t+\varphi(t^3))^{-1},\ L=\mathrm{const}>0.$$

7°. Из приведенных результатов следует, что наличие одной (угловой) точки вырождения гиперболичности, как правило, приводит к условиям согласования в этой точке (или даже в других точках, см. теоремы 2 и 3), если изучаются классические задачи для гиперболических уравнений.

Институт математики
АН Армянской ССР,
Научно-производственное объединение «АНИ»
министерства микроэлектроники СССР

Поступила 14. I. 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Б. Нерсесян, А. О. Оганесян, Г. Р. Оганесян.* Об одном методе исследования задачи Коши для слабо гиперболических уравнений, Труды всесоюзной конфер. по уравнениям с частными производными Изд. МГУ, 1978.
2. *О. А. Олейник, Е. В. Радкевич.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой, «Итоги науки», М., 1971.
3. *Л. Ш. Агабабян, А. Б. Нерсесян.* О некоторых задачах для одного модельного слабо гиперболического уравнения, Изв. АН Арм.ССР, Математика, XVI, № 5, 1981, 397—407.
4. *А. Б. Нерсесян.* О некоторых новых модельных слабо гиперболических уравнениях второго порядка, УМН, 40, вып. 5 (245), 1985.