ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIV, № 2, 1989 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.984

А. БЕТТХЕР

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ Л. В. МИКАЕЛЯНА В ТЕОРИИ ДЕТЕРМИНАНТОВ ВИНЕРА-ХОПФА

1°. Пусть k—функция из $L^2(\mathbf{R})$, и $\widehat{k}\in L^2(\mathbf{R})$ — ее преобразование Фурье

$$\widehat{k}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t)\, e^{ixt}\, dt \ (x\in \mathbf{R}).$$

Положим $a=1+\widehat{k}$ и обозначим через $T_\tau(a)$ или $I+T_\tau(\widehat{k})$ усеченный оператор Винера-Хопфа, действующий в пространстве $L^2(0, \tau)(0<\tau<\infty)$ по правилу

$$(T_\tau(a)\,\varphi)(t)=\varphi(t)+\int\limits_0^\tau k(t-s)\,\varphi(s)\, ds \ (0<t<\tau).$$

Функция a называется символом семейства операторов $T_\tau(a)$ $(0<\tau<\infty)$. Если $\widehat{k}\in L^1(\mathbf{R})$, то операторы $T_\tau(\widehat{k})$ являются ядерными, и поэтому можно определить детерминанты $D_\tau(a):=\det(I+T_\tau(\widehat{k}))$ (см. [1]). В случае „регулярного" символа a асимптотика детерминантов $D_\tau(a)$ при $\tau\to\infty$ описана известной формулой Ахиезера—Каца (см. [2]). В недавней работе [3] Л. В. Микаеляна рассматривался один класс „сингулярных" символов, а именно, класс символов вида $a=\sigma_{\alpha_1}^{r_1}\cdots\sigma_{\alpha_N}^{r_N}\, b$, где

$$\sigma_\alpha^r(x):=\left|\frac{x-\alpha}{x-\alpha+i}\right|^{2r}=\frac{(x-\alpha)^{2r}}{((x-\alpha)^2+1)^r}\ (\alpha\in \mathrm{R},\ r>0)$$

и b—«регулярная» функция. Отметим, что символ a обращается в нуль в точках $\alpha_1,\dots,\alpha_N$, из-за чего формула Ахиезера-Каца не применима. В настоящей работе под «регулярной» функцией b будем понимать ограниченную рациональную функцию такую, что $b(\pm\infty)=1$, $b(x)\neq 0$ при всех $x\in\mathrm{R}$ и $\operatorname{ind} b=0$ ($\operatorname{ind} b$ обозначает число оборотов образа функции b относительно начала координат). В этом случае b допускает факторизацию Винера—Хопфа $b=b_-b_+$ (будем считать, что $b_\pm(\pm\infty)=1$), а формула Ахиезера—Каца дает $D_\tau(b)\sim G(b)^\tau E(b)$ $(\tau\to\infty)$ с некоторыми постоянными $G(b)$ и $E(b)$.

Л. В. Микаелян [3] выдвинул гипотезу, что

$$D_\tau(a) \sim Ce^{-(r_1+\cdots+r_N)\tau}\, G(b)^\tau \tau^{r_1^2+\cdots+r_N^2} \quad (\tau\to\infty), \tag{1}$$

где

$$C = cE(b)\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{b_+(\alpha_j+i)\, b_-(\alpha_j-i)}{b(\alpha_j)}\right)^{r_j}\prod_{l<j}\left(\frac{((\alpha_j-\alpha_l)^2+1)^2}{((\alpha_j-\alpha_l)^2+4)\,(\alpha_j-\alpha_l)^2}\right)^{r_l r_j} \tag{2}$$

и c—некоторая постоянная, зависящая только от $r_1,\dots, r_N$. Мы выдвигаем гипотезу, что для постоянной c можно указать вид

$$c=(1/2)^{r_1^2+\cdots+r_N^2}\prod_{j=1}^{N} G(r_j+1)^2/G(2r_j+1), \tag{3}$$

где $G(z)$—так называемая функция Барнса (см. [4]). Отметим, что $G(z)$ является целой функцией, удовлетворяющей соотношениям $G(z+1)=\Gamma(z)\,G(z)$ и $G(2)=G(1)=0$. В частности, если $m\geqslant 3$ — целое число, то $G(m)=(m-2)!\cdots 2!\,1!$.

Гипотеза Л. В. Микаеляна является континуальным аналогом одного результата Х. Уидома [4] и была доказана в [3] для некоторых частных случаев ($a=\sigma_\alpha^{r} b$, $a=\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}$ или $a=\sigma_\alpha^2$). В настоящей работе эта гипотеза доказываетя для случая, когда $r_1,\cdots, r_N$—целые числа.

2. Пусть a—ограниченная рациональная функция на $\mathbf{R}$ такая, что $a(\pm\infty)=1$. В таком случае операторы $T_\tau(\widehat{k})$ являются операторами Гильберта-Шмидта в $L^2\,(0,\,\tau)$ и, следовательно, можно определить регуляризованные детерминанты $\widetilde{D}_\tau(a):=\det_2(I+T_\tau(\widehat{k}))$ (см. [1]). Следующую теорему можно считать континуальным аналогом формулы К. М. Дей [5] для теплицевых определителей с рациональным символом.

Теорема 1. *Пусть*

$$a(x)=1+\widehat{k}(x)=\prod_{n=1}^{g+s}(x-\xi_n)\prod_{l=1}^{g}(x+i\lambda_l)^{-1}\prod_{m=1}^{s}(x-i\mu_m)^{-1}\ (x\in\mathbf{R}),$$

где $\operatorname{Re}\lambda_l>0$, $\operatorname{Re}\mu_m>0$, $g\geqslant 1$, $s\geqslant 1$ *и* $\xi_1,\cdots,\xi_{g+s}$ — *попарно различные комплексные числа. Тогда для всех* $\tau\in(0,\,\infty)$ *имеет место равенство*

$$\widetilde{D}_\tau(a)=e^{-\tau\left[k(0+0)+\sum\limits_{l=1}^{g}\lambda_l\right]}\sum_M W_M\, e^{w_M\tau}; \tag{4}$$

здесь M *пробегает все множества* $M\subset\{1,\,2,\cdots,\,g+s\}$, *такие, что* $\operatorname{card} M=s$, *и полагая* $\overline{M}=\{1,\cdots,\,g+s\}\setminus M$, $Q=\{1,\cdots,\,g\}$, $S=\{1,\cdots$ $\cdots,\,s\}$, *имеем*

$$w_M=\sum_{j\in\overline{M}} i\xi_j\ (i=\sqrt{-1}),$$

$$W_M=\prod_{\substack{j\in\overline{M}\\ m\in S}}(i\xi_j+\mu_m)\prod_{\substack{l\in S\\ k\in M}}(\lambda_l-i\xi_k)\prod_{\substack{m\in S\\ l\in Q}}(\mu_m+\lambda_l)^{-1}\prod_{\substack{j\in\overline{M}\\ k\in M}}(i\xi_j-i\xi_k)^{-1}.$$

Доказательство. Разлагая a на элементарные дроби, легко видеть, что ядро k является непрерывной функцией на $[-\tau, \tau]\setminus\{0\}$ и что (конечные) пределы $k(0\pm 0)$ существуют. Можно показать, что

$$\tilde{D}_\tau(a) = \lim_{n\to\infty} \det\left(I + \frac{\tau}{n}\, k\left((i-j)\frac{\tau}{n}\right)\right)_{i,j=0}^{n}, \tag{5}$$

если только в правой части (5) полагается $k(0)=0$. Символы теплицевых детерминантов, встречающихся в правой части (5), являются рациональными и поэтому они могут быть вычислены при помощи формулы Дэй [5]. Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем утверждение теоремы.

Предыдущая теорема решает проблему вычисления детерминантов $\tilde{D}_\tau(a)$ для рациональных символов a полностью. Отметим, что, совершая подходящие предельные переходы в (4), можно освободиться от требования, что $\xi_1,\dots, \xi_{g+s}$ должны быть попарно различными.

Легко убедиться в том, что $T_\tau(\hat{k})$ является ядерным тогда и только тогда, когда $k(0-0)=k(0+0)=k(0)$ (вспомним, что a — рациональная функция). В этом случае имеем

$$D_\tau(a) = \tilde{D}_\tau(a)\, e^{-\tau k(0)}. \tag{6}$$

Сочетая (6) и теорему 1 получим, например, следующие формулы:

$$D_\tau\left(\frac{x^2-\beta^2}{x^2+\beta^2}\right) = e^{-\beta\tau}\cos\beta\tau\ (\operatorname{Re}\beta>0),$$

$$D_\tau\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) = e^{-\tau}\left(\frac{\tau}{2}+1\right),$$

$$D_\tau\left(\frac{x^4}{(x^2+1)^2}\right) = e^{-2\tau}\frac{1}{12}\left[\left(\frac{\tau}{2}\right)^4 + 8\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 + 24\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 + 30\frac{\tau}{2} + 12\right].$$

Вторая формула была другими методами установлена Л. В. Микаеляном [3], который также доказал, что $D_\tau(x^4/(x^2+1)^2)\sim(1/12)\, e^{-2\tau}(\tau/2)^4$.

3°. Предположим теперь, что a имеет вид

$$a(x) = \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{x-\alpha_j}{x+i}\right)^{r_j}\left(\frac{x-\alpha_j}{x-i}\right)^{s_j} b(x)\ (x\in\mathbf{R}), \tag{7}$$

где $i=\sqrt{-1}$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ — попарно различные вещественные числа, r_j и s_j — натуральные числа такие, что $z_j=r_j+s_j>0$ и $r=\sum r_j\leqslant s=\sum s_j$ и где b — „регулярная" функция. Следующая теорема является континуальным аналогом основного результата работы [6].

Теорема 2. *Пусть a имеет вид* (7). *Полагаем*

$$\mathfrak{M} = \{(m_1,\cdots, m_N)\in\mathbf{Z}^N: 0\leqslant m_j\leqslant z_j,\ m_1+\cdots+m_N=r\},$$

$$Q=\max\left\{\sum_{j=1}^{N} m_j(z_j-m_j) : (m_1,\cdots,m_N)\in\mathfrak{M}\right\},$$

$$\mathfrak{M}^* = \left\{(m_1,\cdots, m_N)\in\mathfrak{M} : \sum_{j=1}^{N} m_j(z_j-m_j) = Q\right\},$$

и пусть $a = 1 + \widehat{k}_a$, $b = 1 + \widehat{k}_b$. *Тогда при* $\tau \to \infty$

$$\widetilde{D}_\tau(a) \sim e^{-\tau[k_a(0+0) - k_b(0+0) + r]}\, \widetilde{G}(b)^\tau \tau^Q \times$$

$$\times \left\{ \sum_{(m_1, \cdots, m_N) \in \mathfrak{M}^*} H_{m_1, \cdots, m_N} e^{i\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \alpha_j\right)\tau} + \Delta(\tau) \right\},$$

где $\Delta(\tau) = O(1/\tau)$ *при* $Q \geqslant 1$, $\Delta(\tau) = O(e^{-\delta\tau})$ *с некоторым* $\delta > 0$ *при* $Q = 0$, *и*

$$\widetilde{G}(b) = \exp\left\{ -\int_0^\infty k_b^-(-t)\, k_b^+(t)\, dt \right\} \quad (b_\pm =: 1 + \widehat{k}_b^\pm),$$

$$H_{m_1, \cdots, m_N} = \frac{1}{2^{rs}} \prod_{j=1}^{N} \frac{G(z_j - m_j + 1)\, G(m_j + 1)}{G(z_j + 1)} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{N} \left[(1 + i\alpha_j)^{m_j s} (1 - i\alpha_j)^{(z_j - m_j) r}\right] \prod_{j \neq k} (i\alpha_j - i\alpha_k)^{-m_j(z_k - m_k)} \times$$

$$\times E(b)\, b_-(-i)^r\, b_+(i)^s \prod_{j=1}^{N} b_-(\alpha_j)^{-m_j}\, b_+(\alpha_j)^{-(z_j - m_j)}.$$

Доказательство получается из теоремы 1 с помощью подходящих предельных переходов в (4) и из результатов работы [6]..

Отметим один интересный частный случай предыдущей теоремы (дискретный аналог см. [7]):

$$\widetilde{D}_\tau\left[\frac{x^{r+s}}{(x+i)^r (x-i)^s}\right] \sim \frac{G(r+1)\, G(s+1)}{G(r+s+1)}\, e^{-\tau[k(0+0)+r]} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{rs}, \quad (8)$$

где $k(0+0) = s - r - \frac{1}{2^r} \sum_{j=1}^{s} \binom{r+s}{s-j} \binom{r+j-2}{j-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^j$.

4°. Оператор $T_\tau[x^{r+s}(x-i)^{-r}(x-i)^{-s}] - I$ является ядерным тогда и только тогда, когда $r = s$. В этом случае из (8) и (6) вытекает, что при $r = 1, 2, 3, \cdots$

$$D_\tau\left[\frac{x^{2r}}{(x^2+1)^r}\right] \sim \frac{G(r+1)^2}{G(2r+1)}\, e^{-\tau r} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{r^2} \quad (\tau \to \infty). \quad (9)$$

Следующая теорема подтверждает гипотезу Л. В. Микаеляна в случае рациональных символов.

Теорема 3. *Пуст* $a = \sigma_{\alpha_1}^{r_1} \cdots \sigma_{\alpha_N}^{r_N} b$, *где* $r_1, \cdots, r_N$ — *натуральные числа и* b — *„регулярная" функция. Тогда справедливы* (1), (2) *и* (3).

Доказательство. Полагая в теореме 2 $r_j = s_j$, имеем $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^* = \{(r_1, \cdots, r_N)\}$ и $Q = \sum r_j^2$, откуда вместе с равенством (6) получаем утверждение.

5°. В заключение отметим, что гипотеза Л. В. Микаеляна может быть доказана методом работ [8], [9] для случая $0 < r_j < 1/2$ (или даже

$|\operatorname{Re} r_j| < 1/2$), *если* только установлена справедливость соотношения (9) для $0 < r < 1/2$ (или, соответственно, $|\operatorname{Re} r| < 1/2$). Итак, как первый шаг в доказательстве этой гипотезы в полной общности, предлагаем доказать (9) при нецелых r. Заметим, что все выражения в (9) являются аналитическими функциями от r.

Технический университет
Карл-Маркс-Штадт (ГДР)

Поступила 1. X. 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., Изд. «Наука», 1965.
2. *Н. И. Ахиезер.* Континуальный аналог некоторых теорем о теплицевых матрицах, УМН, XVI, № 4, 1964, 445—462.
3. *Л. В. Микаелян.* Асимптотика детерминантов усеченных операторов Винера-Хопфа в некотором сингулярном случае, ДАН Арм.ССР, 82, № 4, 1986, 151—155.
4. *H. Widom.* Toeplitz determinants with singular generating fiunctions, Amer. Journal of Math., v. 95, 1973, 333—383.
5. *K. M. Day.* Toeplitz matrices generated by the Laurent series expansion of an arbitrary rational functions, Trans. Amer. Math. Soc., v. 206, 1975, 224—245.
6. *A. Bottcher, B. Silbermann.* The asymptotic behaviour or Toeplitz determinants for generating functions with zeros of integral orders, Math. Nachr., 102, 1981, 79—105.
7. *A. Bottcher, B. Silbermann.* Toeplitz operators and determinants generated by symbols with one Fisher—Hartwig singularity, Math. Nachr., 127, 1986, 95—124.
8. *А. Бёттхер, Б. Зильберман.* Теплицевы определители с символами из класса Фишера-Хартвига, ДАН СССР, 278, № 1, 1984, 13—16.
9. *A. Bottcher, S. Silbermann.* Toeplitz matrices and determinants with Fisher—Hartwig symbols, J. Funct. Anal., 63, № 2, 1985, 178—214.