

УДК 517.547

Н. В. ГРИГОРЯН

О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВАХ М. М. ДЖРБАШЯНА

1 (а). В работе [1] доказана следующая

Теорема 1. Пусть $\{f_k(z)\}_1^\infty \subset H_p$ ($1 < p < +\infty$), $\sup_{k \geq 1} \|f_k\|_p < +$

$+\infty$ и $\{f_k(\theta)\}_1^\infty$ ($\widehat{f_k}(\theta) \equiv f_k(e^{i\theta})$) сходится на множестве $E \subset [0, 2\pi]$ положительной меры. Тогда $\{f_k(z)\}_1^\infty$ слабо сходится в H_p (в смысле слабой сходимости последовательности элементов банахова пространства H_p).

H_p — это пространство Харди функций $f(z)$, голоморфных в круге $D: |z| < 1$ и таких, что

$$\|f\|_p = \sup_{0 < r < 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\} < +\infty.$$

Напомним (см., напр., [2]), что $f(z) \in H_p$, то почти всюду на окружности $|z| = 1$ существуют некасательные граничные значения $f(e^{i\theta}) = \widehat{f}(\theta)$, причем

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\widehat{f}(\theta)|^p d\theta \right\}^{1/p}.$$

Цель настоящей заметки — доказать теоремы типа теоремы 1 для последовательностей функций из пространств $H_p(\alpha)$ М. М. Джрбашяна.

(б) $H_p(\alpha)$ ($p \geq 0$, $\alpha > -1$) — это пространство функций $f(z)$, голоморфных в D и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{p, \alpha} \equiv \left\{ \frac{\alpha+1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2)^\alpha |f(re^{i\theta})|^p r dr d\theta \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (1)$$

Пространства $H_p(\alpha)$ были введены М. М. Джрбашяном в его работе [3] 1945 года. Им был установлен ряд важных свойств этих пространств. Одно из них следующее [3, 4]: если $f(z) \in H_p(\alpha)$ ($p \geq 1$, $\alpha > -1$), то

$$f(z) \equiv \frac{\alpha+1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2)^\alpha \frac{f(re^{i\theta})}{(1-zre^{i\theta})^{\alpha+1}} r dr d\theta, \quad z \in D. \quad (2)$$

Отсюда вытекает оценка

$$|f(z)| \leq \|f\|_{p, \alpha} (1 - |z|)^{-(\alpha+2)}, \quad z \in D, \quad (3)$$

и поэтому $H_p(\alpha)$ ($p \geq 1$, $\alpha > -1$) с нормой $\|f\|_{p, \alpha}$ — банахово пространство.

Заметим, что $H_p \subset H_p(\alpha)$ ($p > 0$, $\alpha > -1$). Кроме того, справедлива

Теорема II [4]. Если $0 < p < +\infty$, то голоморфная в D функция $f(z)$ принадлежит H_p тогда и только тогда, когда интегралы (1) равномерно ограничены при $\alpha \rightarrow -1$.

Замечание I. Если функция $f(z)$ голоморфна в D , то при всех $p \in (0, +\infty)$ существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} \|f\|_{p, \alpha} = \sup_{0 < r < 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}.$$

Замечание II. Последовательность $\{f_k(z)\}_1^\infty$ голоморфных в D функций лежит в H_p ($0 < p < +\infty$) и сходится в этом пространстве: тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$(i) \lim_{\alpha \rightarrow -1} \|f_k\|_{p, \alpha} < +\infty \quad (k = 1, 2, \dots);$$

(ii) для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} \|f_n - f_m\|_{p, \alpha} < \varepsilon \quad (n, m \geq N_\varepsilon).$$

(в) Последовательность $\{z_j\}_1^\infty \subset D$ будем называть множеством единственности для $H_p(\alpha)$, если не существует отличной от тождественного нуля функции из $H_p(\alpha)$, обращающейся в нуль на этой последовательности.

Пусть числа z_j ($z_j \neq 0$) пронумерованы в порядке неубывания модулей, $n(t)$ — количество этих чисел из круга $|z| \leq t$ и

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt.$$

Теорема III [4]. Если $p > 0$, $\alpha > -1$ и

$$\int_0^1 (1-r^2)^\alpha e^{pN(r)} dr = +\infty,$$

то $\{z_j\}_1^\infty$ — множество единственности для $H_p(\alpha)$.

Отметим, что в работе [4] установлены также другие достаточные условия, при которых $\{z_j\}_1^\infty$ — множество единственности для $H_p(\alpha)$.

2. Приведем основной результат заметки.

Теорема 1. Пусть $p \geq 1$, $\alpha > -1$, $\{f_k(z)\}_1^\infty \subset H_p(\alpha)$ и $\{z_j\}_1^\infty$ — множество единственности для $H_p(\alpha)$. Если существуют пределы

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(z_j) = c_j \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

и равномерно относительно k ($k=1, 2, \dots$)

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^{2\pi} \int_{1-\delta}^1 (1-r^2)^\alpha |f_k(re^{i\theta})|^\rho r dr d\theta = 0, \quad (5)$$

то последовательность $\{f_k(z)\}_1^\infty$ сходится в $H_p(\alpha)$.

Доказательство. В силу (5) для любого $\varepsilon > 0$ существует не зависящее от k ($k=1, 2, \dots$) число $\delta \in (0, 1)$ такое, что

$$\int_{1-\delta}^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)^\alpha |f_k(re^{i\theta})|^\rho r dr d\theta < \varepsilon \quad (k \geq 1). \quad (6)$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\int_{1-\delta/2}^{1-\delta/4} \int_0^{2\pi} (1-r^2)^\alpha |f_k(re^{i\theta})|^\rho r d\theta dr < \varepsilon \quad (k \geq 1).$$

Значит, при каждом $k \geq 1$ можно найти $r_k \in \left(1 - \frac{\delta}{2}, 1 - \frac{\delta}{4}\right)$ такое, что

$$\int_0^{2\pi} (1-r_k^2)^\alpha |f_k(r_k e^{i\theta})|^\rho r_k d\theta < \varepsilon (4/\delta) \quad (k \geq 1).$$

Поскольку эти неравенства можно переписать в виде

$$\int_0^{2\pi} |f_k(r_k e^{i\theta})|^\rho d\theta < 4\varepsilon / \{\delta r_k (1-r_k^2)^\alpha\} \quad (k \geq 1),$$

то существует не зависящее от k число $C > 0$ такое, что

$$\int_0^{2\pi} |f_k(r_k e^{i\theta})|^\rho d\theta < C \quad (k \geq 1).$$

Из формулы Коши

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_k} \frac{f_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (|z| \leq 1 - \delta),$$

пользуясь неравенством Гёльдера и оценкой (7), получим

$$\max \{|f_k(z)| : |z| \leq 1 - \delta\} \leq C_1 \quad (k \geq 1),$$

где $C_1 > 0$ не зависит от k . Отсюда и из (6) следует оценка

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\alpha+1} \|f_k\|_{p, \alpha}^p &= \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\delta} + \int_0^{2\pi} \int_{1-\delta}^1 \right\} (1-r^2)^\alpha |f_k(re^{i\theta})|^\rho r dr d\theta \leq \\ &\leq C_1^p \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\delta} (1-r^2)^\alpha r dr d\theta + \varepsilon \leq \frac{\pi}{\alpha+1} C_1^p + \varepsilon, \end{aligned}$$

так что

$$\sup_{k \geq 1} \|f_k\|_{p, \alpha} \equiv M < +\infty. \quad (9)$$

Пусть теперь $\{f_{k_n}(z)\}_1^\infty$ — произвольная подпоследовательность последовательности $\{f_k(z)\}_1^\infty$. Из (9) и (3) вытекает, что функции $f_{k_n}(z)$ равномерно ограничены внутри D . Следовательно, по теореме Монтеля из $\{f_{k_n}(z)\}_1^\infty$ можно извлечь равномерно сходящуюся внутри D подпоследовательность $\{f_{k_{n_j}}(z)\}_1^\infty$.

Предположим, что $\varepsilon > 0$ произвольно, а число $\delta \in (0, 1)$ выбрано так, что выполняются оценки (6). Выберем также не зависящее от j и m число $N > 0$ таким образом, чтобы

$$|f_{k_{n_j}}(z) - f_{k_{n_m}}(z)| < \varepsilon \quad (j, m > N; |z| \leq 1 - \delta) \quad (10)$$

Посредством выкладок, аналогичных (8), с использованием (6) и (10), получим

$$\|f_{k_{n_j}} - f_{k_{n_m}}\|_{p, \alpha}^p < (\varepsilon^{p-1} + 2(\alpha + 1)/\pi) \quad (j, m \geq N),$$

так что последовательность $\{f_{k_{n_j}}(z)\}_1^\infty$ сходится в $H_p(\alpha)$.

Таким образом, из условия (5) следует, что последовательность $\{f_k(z)\}_1^\infty$ компактна в $H_p(\alpha)$.

Чтобы завершить доказательство теоремы остается заметить, что если $\{f_{k_n}(z)\}_1^\infty$ и $\{\bar{f}_{k_n}(z)\}_1^\infty$ — две подпоследовательности последовательности $\{f_k(z)\}_1^\infty$, сходящиеся в $H_p(\alpha)$ к функциям $f(z)$ и $\bar{f}(z)$ соответственно, то $f(z) = \bar{f}(z)$, $z \in D$ (это следует из (4) и того, что $\{z_j\}_1^\infty$ — множество единственности для $H_p(\alpha)$).

Следствие 1. Если последовательность $\{f_k(z)\}_1^\infty \subset H_p$ ($p \geq 1$) слабо сходится в H_p , то она сходится в $H_p(\alpha)$ при всех $\alpha > -1$.

Действительно, если последовательность $\{f_k(z)\}_1^\infty$ слабо сходится в H_p , то $\sup_{k \in N} \|f_k\|_p < +\infty$ и эта последовательность поточечно сходится в D . Кроме того

$$\begin{aligned} \int_{1-\delta}^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)^\alpha |f_k(re^{i\theta})|^p r d\theta dr &\leq \left\{ \int_{1-\delta}^1 (1-r^2)^\alpha r dr \right\} \cdot 2\pi \sup_{k \in N} \|f_k\|_p^p = \\ &= [\delta(2-\delta)]^{\alpha+1} \frac{\pi}{\alpha+1} \sup_{k \in N} \|f_k\|_p^p. \end{aligned}$$

Значит для последовательности $\{f_k(z)\}_1^\infty$ выполнены условия теоремы 1 при всех $\alpha > -1$, так что она сходится в $H_p(\alpha)$.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, так как существуют последовательности $\{f_k(z)\}_1^\infty \subset H_p$, для которых $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f_k\|_{p, \alpha} = 0$ при всех $\alpha > -1$ и, вместе с тем, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f_k\|_p = +\infty$.

Докажем более общее

Предложение. Пусть $\{f_k(z)\}_1^\infty \subset H_p$ ($1 \leq p < +\infty$) — произвольная последовательность. Тогда существует последовательность $\{F_k(z)\}_1^\infty \subset H_p$, удовлетворяющая условиям

$$(i) \|F_k\|_p = \|f_k\|_p \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$(ii) \text{ при всех } \alpha > -1 \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|F_k\|_{p, \alpha} = 0.$$

Доказательство. Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ — убывающая последовательность действительных чисел, причем $\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = -1$, и пусть

$$M_{f_k}(r) = \int_0^{2\pi} |f_k(re^{i\theta})|^p d\theta \quad (0 \leq r < 1; k = 1, 2, \dots). \quad (11)$$

Поскольку при $k = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots; 0 \leq r < 1$

$$M_{f_k}(r) r^{mp} \leq M_{f_k}(r) < 2\pi \|f_k\|_p^p$$

и при фиксированном $k \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} M_{f_k}(r) r^{mp} = 0$, то в силу теоремы Лебега о мажорированной сходимости

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1-r^2)^{\alpha_k} [M_{f_k}(r) r^{mp}] r dr = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Поэтому при фиксированном $k = 1, 2, \dots$ существует число $m_k > 0$, такое, что

$$\int_0^1 (1-r^2)^{\alpha_k} [M_{f_k}(r) r^{m_k p}] r dr < 1/k. \quad (12)$$

Убедимся в том, что функции $F_k(z) \equiv z^{m_k} f_k(z)$, $k = 1, 2, \dots$ удовлетворяют условиям (i) и (ii).

Равенства $\|F_k\|_p = \|f_k\|_p$ ($k = 1, 2, \dots$) очевидны.

Пусть $\alpha > -1$ — фиксированное число. Поскольку $\alpha_k \downarrow -1$, то

$$-1 < \alpha_k < \alpha \quad \text{при } k \geq k(\alpha). \quad (13)$$

Поэтому при $k \geq k(\alpha)$ из (13), (11) и (12) получим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2)^{\alpha} |F_k(re^{i\theta})|^p r dr d\theta &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2)^{\alpha_k} |F_k(re^{i\theta})|^p r dr d\theta = \\ &= \int_0^1 (1-r^2)^{\alpha_k} M_{f_k}(r) r^{m_k p + 1} dr < 1/k, \end{aligned}$$

откуда следует (ii).

Следствие 2. Последовательность $\{f_k(z)\}_1^\infty$ голоморфных в D функций лежит в H_p ($p > 1$) и слабо сходится в H_p тогда и только тогда, когда

$$\sup_{k \geq 1} \lim_{\alpha \rightarrow -1} \|f_k\|_{p, \alpha} < +\infty, \quad (14)$$

$\{f_k(z)\}_1^\infty$ сходится в $H_p(\alpha)$ при некотором $\alpha > -1$. (15)

Доказательство. Если последовательность $\{f_k(z)\}_1^\infty$ лежит в H_p и слабо сходится в этом пространстве, то в силу следствия 1 имеем (15). Кроме того, $\sup_{k>1} \|f_k\|_p < +\infty$, так что с учетом замечания I верна оценка (14).

Обратно, пусть последовательность $\{f_k(z)\}_1^\infty$ голоморфных в D функций удовлетворяет условиям (14) и (15).

Из (14), с учетом замечания I, получаем: $\{f_k(z)\}_1^\infty \subset H_p$ и $\sup_{k>1} \|f_k\|_p < +\infty$. Поскольку H_p — рефлексивное пространство (см., напр., [1]), то из ограниченности последовательности норм $\{\|f_k\|_p\}$ в силу теоремы Банаха—Алаоглу вытекает слабая компактность последовательности $\{f_k(z)\}_1^\infty$ в H_p .

Пусть $\{f_{k_n}(z)\}_1^\infty$ и $\{\tilde{f}_{k_n}(z)\}_1^\infty$ — две подпоследовательности последовательности $\{f_k(z)\}_1^\infty$, слабо сходящиеся в $H_p(\alpha)$ к функциям $f(z)$ и $\tilde{f}(z)$ соответственно. Поскольку $H_p \subset H_p(\alpha)$, то $H_p(\alpha) \subset H_p$, поэтому последовательности $\{f_{k_n}(z)\}_1^\infty$ и $\{\tilde{f}_{k_n}(z)\}_1^\infty$ сходятся также слабо в $H_p(\alpha)$ к функциям $f(z)$ и $\tilde{f}(z)$ соответственно. Отсюда и из (15) заключаем, что $f(z) \equiv \tilde{f}(z)$. Следовательно, последовательность $\{f_k(z)\}_1^\infty$ слабо сходится в H_p .

В заключение заметим, что сопоставив замечание II и следствие 2, можем утверждать следующее.

Если $\{f_k(z)\}_1^\infty$ — ограниченная в $H_p(p > 1)$ последовательность функций, то ее слабая сходимостъ в H_p равносильна сходимости в $H_p(\alpha)$ при $\alpha > -1$, а её сходимостъ в H_p равносильна сходимости в $H_p(\alpha)$, равномерной по $\alpha > -1$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 13. XI. 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Reiznerman. Eine Funktionalanalytische Methode zur Formulierung von Konvergenzätzen der Funktionentheorie, Mathematika, vol. 12 (35), 2, CLUJ, 1970.
2. P. L. Duren. Theory of H^p -spaces, Academic Press, New York, 1970.
3. М. М. Джрбашян. О представимости некоторых классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН Арм.ССР, 3, № 1, 1945.
4. М. М. Джрбашян. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщения института математики и механики АН Арм.ССР, вып. 2, 1948.