ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 2, 1989 Математика

УДК 517.51

С. С. АКБАРОВ

О СТЕПЕННЫХ РЯДАХ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В НЕНОРМИРУЕМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Как известно, область сходимости всякого степенного ряда

$$\sum_n \lambda^n x_n, \ \lambda \in \mathbf{C} \tag{1}$$

является кругом на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ (возможно, нулевого или бесконечного радиуса) с точностью до точек на границе. Этот факт являетя следствием леммы Абеля, согласно которой область сходимости ряда (1) (с числовыми коэффициентами) вместе с любой своей точкой λ_0 содержит и все точки, по модулю меньшие λ_0.

Легко проверить, что лемма Абеля выполняется и в случае, когда коэффициенты $\{x_n\}$ степенного ряда (1) являются векторами какого-нибудь банахова пространства, а сходимость понимается в метрике этого пространства. С другой стороны, как показал В. Желязко [1] в пространстве S измеримых по Лебегу функций на отрезке [0, 1] с топологией сходимости по мере можно указать последовательность векторов $\{x_n\}$ такую, что область сходимости ряда (1) совпадает с любым наперед заданным конечным множеством в $\mathbf{C}$, содержащим нуль. В связи с этим возникают следующие впросы:

1) какие вообще множества на комплексной плоскости могут быть областями сходимости степенных рядов с коэффициентами из различных топологических векторных пространств (ТВП)?

2) каким требованиям нужно подчинить ТВП, чтобы исключить возможность появления в нем степенных рядов с аномальной областью сходимости?

Их рассмтрению и посвящена настоящая работа.

1. Степенные ряды в пространстве S

В этом пункте мы коснемся вопроса о том, какой может быть область сходимости степенного ряда в уже упомянутом пространстве S (см., напр., [2], стр. 63). Первому содержательному утверждению мы предпошлем две несложные числовые леммы.

Лемма 1. *Существует стремящаяся к бесконечнсти последовательность натуральных чисел $\{h_k\}$, обладающая свойствами:*

$$\forall R \geqslant 0 \sum_{k=1}^{\infty} R^{h_k}/k^2 < \infty, \tag{2}$$

$$\forall R > 0 \ k^2 R^{h_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty. \tag{3}$$

Доказательство. Нам достаточно просто выбрать монотонную последовательность $\{f_l\}$ со свойствами $f_{l-1} \geqslant \sqrt{l!}$, $\sum\limits_{k > f_{l-1}} 1/k^2 \leqslant 1/l!$ и положить $h_k = l \longleftrightarrow f_{l-1} \leqslant k < f_l$. Мы получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} R^{h_k}/k^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{f_{l-1}<k<f_l} R^{h_k}/k^2 = \sum_{l=1}^{\infty} R^l \sum_{f_{l-1}<k<f_l} 1/k^2 \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} R^l/l! < \infty,$$

$$k^2 R^{h_k} \geqslant (f_{n_k-1})^2 R^{h_k} \geqslant h_k!\, R^{h_k} \underset{n\to\infty}{\to} \infty,\ \forall R > 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\{f_l\}$ и $\{g_l\}$—произвольные последовательности натуральных чисел, причем $\{f_l\}$ стремится к бесконечности. Существует последовательность $\{a_k\}$ положительных чисел. обладающая свойствами:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty, \tag{4}$$

$$\sum_{f_l<k<g_l} a_k \underset{l\to\infty}{\to} 0. \tag{5}$$

Доказательство. Совершенно очевидно, что нам достаточно рассмотреть случай, когда $\{f_l\}$ и $\{g_l\}$ монотонны и $f_l \leqslant g_l$. Выберем последовательность индексов $m_n : g_{m_n} < f_{m_{n+1}}$ и положим $a_k = 1/n(g_{m_n} - g_{m_{n-1}})$ при $g_{m_{n-1}} < k \leqslant g_{m_n}$ (мы считаем, что $g_0 = m_0 = 0$). Легко проверить, что последовательность $\{a_k\}$ будет искомой. Лемма 2 доказана.

Отметим попутно, что построенная нами последовательность обладает следующими дополнительными свойствами: для любого k

$$0 < a_k \leqslant 1, \tag{6}$$

$$a_k \underset{k\to\infty}{\to} 0. \tag{7}$$

Лемма 3. *Для всякой последовательности полиномов $\{p_k\}$ существует степенной ряд (1) в пространстве S с областью сходимости D, удовлетворяющей ограничениям:*

$$\{\lambda \in \mathbf{C} : \overline{\lim_k} |p_k(\lambda)| < 1\} \cup \{0\} \subseteq D \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} : \underline{\lim_k} |p_k(\lambda)| \leqslant 1\} \cup \{0\}.$$

Доказательство. 1. Обозначим $E = \{\lambda : \overline{\lim} |p_k(\lambda)| < 1\}$, $F = \{\lambda : \underline{\lim} |p_k(\lambda)| \leqslant 1\}$ и отметим следующие очевидные свойства этих множеств:

$$\forall \lambda \in E\ k^2 \Big|\prod_{k<l<2k} p_l(\lambda)\Big| \underset{k\to\infty}{\to} 0, \tag{8}$$

$$\forall \lambda \overline{\in} F\ \frac{1}{k^2} \Big|\prod_{k<l<2k} p_l(\lambda)\Big| \underset{k\to\infty}{\to} \infty. \tag{9}$$

2. Рассмотрим последовательность $\{h_k\}$ с описанными в лемме 1 свойствами и положим

$$q_k(\lambda) = \lambda^{h_k} \prod_{k<l<2k} p_l(\lambda).$$

Обозначим через b_k^n коэффициент при n-й степени аргумента в полиноме q_k и выберем строго растущую последовательность $\{d_k\}$ такую, что

$$q_k(\lambda) \sum_{0<n<d_k} \lambda^n b_k^n.$$

Вспомним, что $\{h_k\}$ стремится к бесконечности, поэтому при всяком фиксированном n лишь конечное множество чисел $\{b_k^n;\ k\in N\}$ отлично от нуля. Выберем монотонную последовательность $\{g_n\}$, обладающую свойством:

$$\forall n\ \forall k > g_n\ b_k^n = 0. \tag{10}$$

3. Положим $f_l = k \leftrightarrow d_{k-1} \leqslant l < d_k$ и применим лемму 2 к последовательностям $\{f_l\}$ и $\{g_l\}$. Пусть $\{a_k\}$ — последовательность, обладающая свойствами (4)—(7). Положим $m_0 = 0$, $m_l = \max\{l\in N :$ $: \sum_{m_{l-1}<k<l} a_k < 1\}$, тогда

$$\forall i\in N \sum_{m_{l-1}<k<m_l} a_k \leqslant 1. \tag{11}$$

4. Каждому индексу $i\in N$ поставим в соответствие полуинтервал на действительной оси $M_l = [0, \sum_{m_{l-1}<k<m_l} a_k [$. В силу (11) все $\{M_l\}$ являются подмножествами отрезка [0, 1], причем из условия (7) немедленно следует, что

$$\mu(M_l) = \sum_{m_{l-1}<k<m_l} a_k \underset{l\to\infty}{\to} 1.$$

5. Разобьем каждый полуинтервал M_l на полуинтервалы $\{I_k;$ $m_{l-1} < k \leqslant m_l\}$ с длинами $\{a_k;\ m_{l-1} < k \leqslant m_l\}$. Пусть $\{y_k\}$ — индикаторные функции множеств $\{I_k\}$:

$$y_k(t) = \begin{cases} 0, & t\in[0,1]\setminus I_k \\ 1, & t\in I_k. \end{cases}$$

Каждому $\lambda\in\mathbf{C}$ поставим в соответствие ряд $\sum_k q_k(\lambda)\, y_k$ в пространстве S (эта конструкция еще не будет степенным рядом) и рассмотрим множество

$$D = \{\lambda\in\mathbf{C} : \text{ряд } \sum_k q_k(\lambda)\, y_k \text{ сходится в } S\}.$$

Покажем, что $E\cup\{0\} \subseteq D \subseteq F\cup\{0\}$.

а) Если $\lambda\in E$, то из (8) получим: $\exists l\ \forall k > l\ |q_k(\lambda)| \leqslant |\lambda|^{h_k}/k$, откуда, с учетом (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |q_k(\lambda)| \leqslant \sum_{k<l} |q_k(\lambda)| + \sum_{k>l} |\lambda|^{h_k}/k^2 < \infty.$$

Это означает, что ряд $\sum_k q_k(\lambda)\, y_k$ сходится поточечно, а поэтому и в S.

б) Пусть $\lambda \overline{\in} F\cup\{0\}$, тогда из (9) получим: $\exists l\ \forall k > l\ |q_k(\lambda)| \geqslant$ $\geqslant k^2 |\lambda|^{h_k}$, откуда, с учетом (3),

$$|q_k(\lambda)| \underset{k\to\infty}{\to} \infty.$$

Зафиксируем индекс $i_0 : \forall k > m_{i_0-1}\ |q_k(\lambda)| \geqslant 1$. Для всякого $i \in N$ полуинтервалы $\{I_k;\ m_{i-1} < k \leqslant m_i\}$ не пересекаются, поэтому

$$\forall i \geqslant i_0\ \forall t \in M_i\ \Big|\sum_{m_{i-1}< k \leqslant m_i} q_k(\lambda)\, y_k(t) \geqslant 1.$$

Это означает что

$$\mu\,\{t \in [0,1] : |\sum_{m_{l-1}<k<m_l} q_k(\lambda)\, y_k(t)| \geqslant 1\} = \mu(M_l) \underset{l\to\infty}{\to} 1 \neq 0$$

и, следовательно, ряд $\sum\limits_k q_k(\lambda)\, y_k$ расходится в S.

6. Положим теперь

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^n y_k = \sum_{k<g_n} b_k^n y_k. \qquad \text{(см. 10)}$$

Покажем что множество D является областью сходимости степенного ряда $\sum\limits_n \lambda^n x_n$. Для этого зафиксируем $\lambda \in \mathbf{C}$ и рассмотрим частичные суммы

$$\sum_{n<l} \lambda^n x_n = \sum_{n<l} \lambda^n \sum_{k<g_n} b_k^n y_k = \sum_{n<l} \lambda^n \sum_{k<g_l} b_k^n y_k = \sum_{k<g_l}\Big(\sum_{n<l} \lambda^n b_k^n\Big) y_k$$

(здесь мы использовали (10) и свойство монотонности $\{g_j\}$). Так как $\forall k < f_l\ d_k \leqslant d_{f_l-1} \leqslant l$ (из определения $\{f_l\}$),

$$\sum_{k<f_l}\Big(\sum_{n<l} \lambda^n b_k^n\Big) y_k = \sum_{k<f_l} q_k(\lambda)\, y_k, \text{ поэтому}$$

$$\sum_{n<l} \lambda^n x_n - \sum_{k<f_l} q_k(\lambda)\, y_k = \sum_{f_l<k<g_l}\Big(\sum_{n<l} \lambda^n b_k^n\Big) y_k$$

(легко заметить, что эта формула распространяется и на случай, когда $f_l > g_l$). Однако, в силу (5)

$$\mu\Big(\operatorname{supp} \sum_{f_l<k<g_l}\Big(\sum_{n<l} \lambda^n b_k^n\Big) y_k\Big) \leqslant \sum_{f_l<k<g_l} \mu\big(\operatorname{supp} y_k\big) = \sum_{f_l<k<g_l} a_k \underset{l\to\infty}{\to} 0.$$

Таким образом

$$\sum_{n<l} \lambda^n x_n - \sum_{k<f_l} q_k(\lambda)\, y_k \overset{S}{\underset{l\to\infty}{\to}} 0. \qquad (12)$$

Последовательность $\{d_k\}$ мы выбирали строго растущей, поэтому $\{f_l\}$ монотонно стремится к бесконечности, причем $\forall l\ f_{l+1} \leqslant f_l + 1$, то есть $\{f_l\}$ пробегает все натуральные числа, начиная с f_1. Поэтому (12) как раз и означает, что ряды $\sum\limits_n \lambda^n x_n$ и $\sum\limits_k q_k(\lambda)\, y_k$ сходятся или расходятся одновременно. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пересечение $\bigcap\limits_{l=1}^{\infty} D_l$ всякой счетной системы множеств $\{D_l\}$, являющихся областями сходимости степенных рядов в пространстве S, само является областью сходимости степенного ряда в S.*

Доказательство. Обозначим через S_l подпространство в S, состоящее из функций, носители которых сосредоточены в полуинтервале $I_l = \Big]\frac{1}{l+1}, \frac{1}{l}\Big]$. Для всякого $l \in N$ пространства S и S_l изоморфны;

пусть $\varphi_l: S \to S_l$ — какой-нибудь их изоморфизм. Если теперь ряд $\sum_n \lambda^n x_n^l$ имеет область сходимости D_l, то ряд $\sum_n \lambda^n \varphi_l(x_n^l)$ будет иметь ту же область сходимости D_l. Положим

$$x_n = \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_l(x_n^l) \quad (\operatorname{supp} \varphi_l(x_n^l) \subseteq I_l).$$

Степенной ряд $\sum_n \lambda^n x_n$ будет сходиться в S тогда и только тогда, когда он будет сходиться по мере на каждом интервале I_l. Это означает что он имеет областью сходимости множество $\bigcap_{l=1}^{\infty} D_l$. Лемма 4 доказана.

Объединяя два последних утверждения, сформулируем основную лемму данного пункта.

Лемма 5. *Для всякой последовательности полиномов $\{p_k\}$ и всякого числа $R \geqslant 0$, существует степенной ряд (1) в пространстве S с областью сходимости D, удовлетворяющей ограничениям:*

$$\{\lambda \in \mathbf{C} : \overline{\lim_k} |p_k(\lambda)| \leqslant R\} \cup \{0\} \subseteq D \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} : \underline{\lim_k} |p_k(\lambda)| \leqslant R\} \cap \{0\}.$$

Доказательство. Фиксируя число $l \in N$ и применяя лемму 3 к полиномам $\left\{\left(R + \frac{1}{l}\right)^{-1} p_k;\ k \in N\right\}$, мы получим степенной ряд с областью сходимости D_l:

$$\left\{\lambda : \overline{\lim}\, p_k(\lambda)| < R + \frac{1}{l}\right\} \cup \left\{0\right\} \subseteq D_l \subseteq \left\{\lambda : \underline{\lim} |p_k(\lambda)| \leqslant R + \frac{1}{l}\right\} \cap \{0\}.$$

Применяя теперь лемму 4 к множествам $\{D_l;\ l \in N\}$, мы получим искомый степенной ряд. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Существует последовательность полиномов $\{q_k\}$, поточечно на множестве $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ сходящихся к функции $\lambda \to 1/\lambda$, а в точке $\lambda = 0$ стремящаяся к бесконечности:*

$$\forall \lambda \neq 0 \ q_k(\lambda) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 1/\lambda, \ |q_k(0)| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Доказательство. Каждому $k \in N$ поставим в соответствие луч L_k на комплексной плоскости с началом в нуле, проходящий через точку $\exp(i\pi/2k)$. Обозначим через A_k невыпуклое замкнутое множество в $\mathbf{C}$, ограниченное лучами L_k и $\{\lambda : \operatorname{Im} \lambda = 0,\ \operatorname{Re} \lambda \geqslant 0\}$. Полижим

$$B_k = \{\lambda \in A_k : 1/k \leqslant |\lambda| \leqslant k\}.$$

Последовательность компактов $\{B_k\}$ покрывает множество $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Каждый компакт b_k содержится в области голоморфности функции $\lambda \to 1/\lambda$ и имеет связное дополнение. Поэтому, пользуясь теоремой Рунге о равномерной полиномиальной аппроксимации голоморфных функций (см. [4]), мы можем подобрать полином p_k, для которого

$$\sup_{\lambda \in B_k} |p_k(\lambda) - 1/\lambda| < 1/k.$$

Положив теперь $q_k(\lambda) = p_k(\lambda - 1/k)$, мы получим искомую последовательность. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть U—произвольный открытый круг на комплексной плоскости* $\mathbf{C}$. *В пространстве S существует степенной ряд (1) с областью сходимости*

$$D = \mathbf{C} \setminus U) \cup \{0\}.$$

Доказательство. Обозначим через α центр круга U, а через ε—его радиус. Рассмотрим последовательность полиномов $\{q_k\}$ с описанными в лемме 6 свойствами и положим $p_k(\lambda) = q_k(\lambda - \alpha)$. Применим теперь лемму 5 к полиномам $\{p_k\}$ при $R = 1/\varepsilon$, мы получим степенной ряд с областью сходимости D, удовлетворяющей ограничениями: $(\mathbf{C} \setminus U) \cup \{0\} \subseteq D \subseteq (\mathbf{C} \setminus U) \cup \{0\}$. Лемма 7 доказана.

Теорема 1. *Всякое замкнутое множество A на комплексной плоскости* $\mathbf{C}$, *содержащее нуль, является областью сходимости некоторого степенного ряда (1) в пространстве S.*

Доказательство. Дополнение $\mathbf{C} \setminus A$ к множеству А будет открытом и поэтому его можно представить в виде объединения счетной системы $\{U_l\}$ открытых кругов: $\mathbf{C} \setminus A = \bigcup_{l=1}^{\infty} U_l$. Пользуясь леммой 7, каждому $l \in N$ поставим в соответствие степенной ряд с областью сходимости $D_l = \mathbf{C} \setminus U_l$. Пересечение $\bigcap_{l=1}^{\infty} D_l = A$ множеств $\{D_l\}$, в силу леммы 4, также будет областью сходимости степенного ряда в S. Теорема 1 доказана.

Докажем еще одно следствие из леммы 5.

Предложение. *В пространстве S существует степенной ряд* (1), *область сходимоти которого D являетя плотным в* $\mathbf{C}$ *множеством, имеющие нулевую лебеговскую меру:* $\bar{D} = \mathbf{C}$, $\mu(D) = 0$.

Доказательство. 1. Зафиксируем следующие две числовые последовательности:

$$p_k = k\,(k+1)/2 = k + p_{k-1}, \quad \theta_k = 1/2^{p_k}.$$

Обозначим через E_k множество точек плоскости $\mathbf{C}$ вида $(m + il)\,\theta_k$, где m и l — целые числа. Объединение E множеств $\{E_k\}$ является (счетным) плотным в $\mathbf{C}$ множеством:

$$\bar{E} = \mathbf{C}. \tag{13}$$

2. Каждому $k \in N$ поставим в соответствие множество

$$F_k = \bigcup_{\alpha \in E_k} U_{\theta_{k+1}},$$

где $U_\varepsilon(\alpha)$ есть ε-окрестность точки α, и покажем, что верхний предел $F = \bigcap_n \bigcup_{k>n} F_k$ этой последовательности имеет нулевую меру. Зафиксируем произвольный квадрат Q со сторонами параллельными осям координат, и оценим меру множества $F_k \cap Q$:

$$\mu(F_k \cap Q) \leqslant \pi\theta_{k+1}^2 \operatorname{card}(E_k \cap Q) + \pi\,\theta_{k+1}^2\, 4\sqrt{\mu(Q)}/\theta_k =$$

$$= \pi\left(\frac{\theta_{k+1}}{\theta_k}\right)^2 \theta_k^2 \operatorname{card}(E_k \cap Q) + 4\pi\sqrt{\mu(Q)}\,\theta_{k+1}\frac{\theta_{k+1}}{\theta_k} =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \theta_k^2 \operatorname{card}(E_k \cap Q) + 4\pi \sqrt{\mu(Q)}\, \theta_{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

Заметим теперь, что если каждой точке $\alpha \in E_k \cap Q$ поставить в соответствие квадрат со стороной θ_k, имеющий α своим центром симметрии, то число $\theta_k^2 \operatorname{card}(E_k \cap Q)$, то есть суммарная площадь таких квадратов, будет сколь угодно мало отличаться от площади Q; точнее

$$\theta_k^2 \operatorname{card}(E_k (E_k \cap Q) \underset{k\to\infty}{\to} \mu(Q).$$

Поэтому $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k \cap Q) < \infty$, и, следовательно, $\mu(F \cap Q) = \mu(\overline{\lim_k} F_k \cap \cap Q = 0$. Так как это верно для любого квадрата Q, то

$$\mu(F) = 0. \tag{14}$$

3. Рассмотрим теперь последовательность $\{Q_k\}$ вложенных друг в друга квадратов, покрывающих $\mathbf{C}$, и положим

$$p_k(\lambda) = \left(\frac{1}{\theta_{k+1}}\right)^{\operatorname{card}(E_k \cap Q_k)} \prod_{\alpha \in E_k Q_k} (\lambda - \alpha).$$

Применим лемму 5 к полиномам $\{p_k\}$ при $R = 0$. Нетрудно убедиться, что область сходимости D полученного степенного ряда будет удовлетворять включению $E \subseteq D \subseteq F$, что в сочетании с (13) и (14) как раз и доказывает наше предложение.

2. Пространства, в которых выполняется лемма Абеля

Перейдем теперь к вопросу о том, какими свойствами должно обладать полное ТВП, чтобы в нем выполнялась лемма Абеля о степенных рядах. Заметим, прежде всего, что это заведомо будет так, если пространство локально выпукло. Однако условие локальной выпуклости, как легко понять, вовсе не необходимо. Действительно, в пространстве $L^p\ [0, 1]$ при $0 < p < 1$ (см. напр., [3]) лемма Абеля справедлива, несмотря на то, что оно вообще не содержит открытых выпуклых множеств, отличных от $\varnothing$ и $L^p\ [0, 1]$.

Лемма 8. *Пусть X—произвольное ТВП. Следующие три условия равносильны:*

(*i*) *в X выполняется лемма Абеля о степенных рядах;*

(*ii*) *всякий степенной ряд* (1) *со сходящимся к нулю коэффициентами сходится всюду в круге* $\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < 1\}$;

(*iii*) *всякий степенной ряд* (1) *с ограниченными коэффициентами сходится всюду в круге* $\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < 1\}$.

Доказательство. 1. Пусть в X выполнена лемма Абеля, и пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к нулю в X. Положив $y_n = x_n - x_{n-1}$, мы получим сходящийся ряд $\sum_n y_n$. Поэтому ряд $\sum_n \lambda^n y_n$ сходится при всех $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| < 1$. В силу тождества

$$\sum_{n \leqslant l} \lambda^n y_n = (1 - \lambda) \sum_{n < l} \lambda^n x_n + \lambda^l x_l, \quad \lambda \in \mathbf{C}$$

(легко проверяется индукцией), это означает что ряд $\sum_n \lambda^n x_n$ сходится в круге $\{\lambda : |\lambda| < 1\}$. Мы доказали импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii).

2. Пусть выполнено (ii), и пусть $\{x_n\}$ ограничена в X. Зафиксируем λ, $0<|\lambda|<1$ и покажем что ряд (1) сходится. Действительно, положив $\varepsilon=\sqrt{|\lambda|}$ $(0<\varepsilon<1)$, получим $\varepsilon^n x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $\{x_n\}$ ограничена). В силу (ii) это означает, что ряд $\sum \alpha^n(\varepsilon^n x_n)$ сходится при $\alpha=\lambda/\varepsilon$ $(|\alpha| = =\sqrt{|\lambda|}<1)$, что нам и требовалось.

3. Импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) очевидна. Лемма 8 доказана.

Для удобства дальнейшего изложения введем следующее

Определение. Пусть λ—комплексное число V—окрестность нуля в ТВП X. Условимся говорить, что гомотетия λ: $X\to X$ сжимает множество V, если существует некоторая окрестность нуля W, для которой

$$\lambda V + W \subseteq V.$$

Лемма 9. *Пусть X—произвольное ТВП. Следующие два условия равносильны:*

(IV) *для всякого числа θ, $0<\theta<1$, любая окрестность нуля U в X содержит некоторую сжимаемую гомотетией θ окрестность нуля V;*

(V) *для всякого числа $\lambda \in C$ $|\lambda|<1$, любая окрестность нуля U в X содержит некоторую окрестность нуля W, для которой*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n W \subseteq U. \tag{15}$$

Замечание. Здесь под бесконечной суммой мы понимаем объединение всевозможных конечных сумм вида $W+\lambda W+\lambda^2 W+\cdots+\lambda^n W$.

Доказательство. 1. Пусть выполнено (iv), и пусть $\lambda \in C$, $|\lambda|<1$, и U — произвольная окрестность нуля в X. Выбрав сжимаемую гомотетией $\theta=|\lambda|$ окрестность V, содержащуюся в U, мы получим, что для некоторой окрестности W_0

$$U \supseteq V \supseteq W_0+\theta V \supseteq W_0+\theta(W_0+\theta V) \supseteq W_0+\theta W_0+\theta^2 V \supseteq \cdots \supseteq$$

$$\supseteq \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n W_0 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n W_0.$$

Выбрав теперь уравновешенную окрестность нуля W, содержащуюся в W_0, мы получим $\lambda^n W \subseteq |\lambda|^n W$, и поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n W \subseteq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n W \subseteq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n W_0 \subseteq U.$$

Мы доказали импликацию (IV) $\Rightarrow$ (V).

2. Пусть, наоборот, выполнено (V), и пусть $0<\theta<1$ и U—окрестность нуля в X. Выбрав окрестность W, удовлетворяющую (15) при $\lambda=\theta$ и положив $V=\sum_{n=0}^{\infty}\theta^n W$, получим

$$W+\theta V = W+\theta\sum_{n=0}^{\infty}\theta^n W = W+\sum_{n=1}^{\infty}\theta^n W = V \subseteq V.$$

Лемма 9 доказана.

Теорема 2. *Пусть X—полное топологи·еское векторное пространство. Для того чтобы в X выполнялась лемма Абеля о степенных рядах достаточно, а если X обладает счетной локальной базой, то и необходимо, чтобы X удовлетворяло условию* (iV): *для всякого числа* θ, $0<\theta<1$, *в X существует локальная база, состоящая из сжимаемых гомотетией θ окрестностей нуля.*

Доказательство. Из лемм 8 и 9 видно, что для доказательства достаточности можно просто убедиться в истинности импликации (V)$\Rightarrow$(II). Пусть выполнено условие (V). Зафиксируем произвольную сходящуюся к нулю последовательность $\{x_n\}$ из X и число $\lambda\in\mathbf{C}$, $|\lambda|<1$. Рассмотрим окрестность нуля U и выберем окрестность нуля W, удовлетворяющую (15). Начиная с некоторого номера все вектора будут содержаться в W. Значит

$$\exists l\ \forall m\geqslant l\ \sum_{l<n<m}\lambda_n x_n\in\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n W\subseteq U.$$

Так как это верно для всякой окрестности нуля U, в силу полноты пространства X это означает, что ряд $\sum_n\lambda^n x_n$ сходится. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть X обладает счетной локальной базой $\{W_k\}$. Будем считать, что $\{W_k\}$ вложены друг в друга.. Пусть условие (iV) не выполняется; значит, не выполняется и условие (V): существуют число $\lambda\in\mathbf{C}$, $|\lambda|<1$, и окрестность нуля U такие, что $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n W\not\subseteq U$ для любой окрестности нуля. Заметим, прежде всего, что в этом случае

$$\forall l\ \sum_{n>l}\lambda^n W=\sum_{n\geqslant0}\lambda^n(\lambda^l W)\not\subseteq U.$$

Покажем что условие (II) не выполнено.

1. $\sum_{n\geqslant0}\lambda^n W_1\not\subseteq U$, поэтому $\exists l_1\,\exists x_0,\cdots,x_{l_1}\in W_1:\ \sum_{0<n<l_1}\lambda^n x_n\notin U$.

   Зафиксируем вектора $x_0,\cdots,x_{l_1}$.

2. $\sum_{n>l_1}\lambda^n W_2\not\subseteq V$, поэтому $\exists l_2>l_1\,\exists x_{l_1+1},\cdots,x_{l_2}\in W_2:\ \sum_{l_1<n<l_2}\lambda^n x_n\notin U$.

   Фиксируем вектора $x_{l_1+1},\cdots,x_{l_2}$.

Действуя таким образом, мы получим последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к нулю (потому что $\{W_k\}$ вложены друг в друга и образуют локальную базу, при этом ряд $\sum_n\lambda^n x_n$ будет расходиться. Теорема 2 доказана.

Следствие. В полном метризуемом ТВП X лемма Абеля справедлива тогда и только тогда, когда X удовлетворяет условию (iV).

В заключение нам остается лишь продемонстрировать каким образом доказанная нами теорема действует в конкретных пространствах.

Прежде всего локально выпуклые пространства, очевидно, обладают свойством (IV). Это немедленно вытекает из формулы $\theta V+(1-\theta)V=V$, для всякого θ, $0<\theta\leqslant1$ и для всякого выпуклого множества V.

Рассмотрим, далее, пространство $L_p\,[0,\ 1]$ при $0<p<1$. Его топология порождается метрикой

$$\rho\,(x,\ y)=\int_0^1 |x\,(t)-y\,(t)|^p\,dt.$$

Легко убедиться, что любой открытый шар с центром в нуле сжимается всякой гомотетией θ, $0<\theta<1$. Действительно, выбрав $\varepsilon>0$ и положив $V=\{x:\rho\,(x,\ 0)<\varepsilon\}$, $W=\{y:\rho(y,\ 0)<(1-\theta^p)\,\varepsilon\}$, получим $\theta V+W\subseteq V$.

Автор глубоко благодарен А. М. Олевскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступила 17. I. 1985

Ս. Ս. ԱԿԲԱՐՈՎ. Ոչ նորմավորված տարածություններում գործակիցներով աստիճանային շարքերի վերաբերյալ (*ամփոփում*)

Ստացված են որոշ արդյունքներ տարբեր տոպոլոգիական տարածություններում գործակիցներ ունեցող աստիճանային շարքերի զուգամիտության տիրույթների կառուցվածքի վերաբերյալ։ Մասնավորապես ցույց է տրված, որ կոմպլեքս հարթության վրա զերոն պարունակող յուրաքանչյուր փակ բազմություն հանդիսանում է չափելի ֆունկցիաների տարածության մեջ ըստ չափի զուգամիտության իմաստով որոշ աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթ։

S. S. ACBAROV. *On power series with coefficients in the spaces without norm* (summary)

The paper contains some results on the structure of domain of convergence of power series with coefficients in various topological vector spaces. In p ticlar, it is shown that every closed set on complex plane containing zero is the domain of convergence of some power series in the space of measurable functions with t e measure convergence.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Zelazko.* A power series with a finite domain of convergence, Comment. Math. Prace Mat., 15, 1971, 115—117.
2. *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов.* Функциональный анализ, М., «Наука», 1977.
3. *У. Рудин.* Функциональный анализ, М., «Мир», 1975.
4. Математическая энциклопедия, т. 4, М., Советская энциклопедия, 1984.