ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIV, № 2, 1989 Математика

УДК 517.53

В. В. АНДРИЕВСКИЙ

О МЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОТОБРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ РИМАНА ДЛЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ К КОНТИНУУМУ БЕЗ ВНЕШНИХ НУЛЕВЫХ УГЛОВ ОБЛАСТИ

В 1959—1963 гг. В. К. Дзядыком [1—3] для некоторых областей G с кусочно-гладкой границей была получена конструктивная характеристика аналитических в G и удовлетворяющих условию Гельдера в $\bar{G}$ функций. Центральную роль в этом описании играет расстояние $\rho_R(z)$ от граничной точки $z\in\partial G$ до R-й линии уровня $(R>1)$ функции $\Phi(z)$, конформно и однолистно отображающей область $\bar{C}\setminus G$ ($\bar{C}$ —расширенная комплексная плоскость) на внешность единичного круга со стандартной нормировкой в ∞. Очевидно, что расстояние $\rho_R(z)$ зависит от свойств функции $\Phi(z)$ или, что то же самое, от геометрического строения области G. В дальнейшем эти результаты распространялись на более общие множества В. К. Дзядыком, Н. А. Лебедевым, Н. А. Широковым, П. М. Тамразовым, В. И. Белым и др. (подробный обзор можно найти в монографии [4], глава IX).

В работах [5—7] были найдены два геометрических условия на континуум $\mathfrak{M}$, которые достаточны и при некоторых дополнительных предположениях необходимы для того, чтобы на $\mathfrak{M}$ имела место прямая теорема В. К. Дзядыка. В формулировке этих условий, подобно построениям работ [8, 9], использовано понятие модуля четырехсторонника (см. [10, 11]), который хотя и зависит от конфигурации четырехсторонника, но, как известно, не является столь же геометричной характеристикой, как, например, диаметр или площадь.

Указанный факт делает необходимым более детальное изучение содержащихся в [5—7] геометрических условий и их связи с метрическими свойствами отображающей функции $\Phi(z)$.

§ 1. Основные определения и результаты

Пусть $\mathfrak{M}\subset C$ — конечный континуум $(\operatorname{diam}\mathfrak{M}>0)$ с односвязным дополнением $\Omega=\bar{C}\setminus\mathfrak{M}$ и границей $L=\partial\mathfrak{M}$, функция $w=\Phi(z)$ конформно и однолистно отображает Ω на $\Omega'\overset{\mathrm{df}}{=}\{w:|w|>1\}$, причем $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$.

Следуя [5—7] будем говорить, что $\mathfrak{M}\in H$, если любые точки z и $\zeta\in\mathfrak{M}$ можно соединить дугой $\gamma(z,\zeta)\subset\mathfrak{M}$, длина которой удовлетворяет условию

$$\operatorname{mes} \gamma(z, \zeta) \leqslant C|z-\zeta|, \quad C = C(\mathfrak{M}) \geqslant 1. \tag{1}$$

Континуумы класса H в силу определяющего их условия (1) естественно называть континуумами без внешних нулевых углов. Тем же символом Φ будем обозначать гомеоморфизм между компактификацией $\tilde{\Omega}$ области Ω простыми концами по Каратеодори (см. [12], стр. 45—50) и $\bar{\Omega}$, совпадающий в Ω с отображением $\Phi(z)$. Пусть $\Psi \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Phi^{-1}$, $\tilde{L} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \tilde{\Omega} \setminus \Omega$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M} \in H$. Тогда:* (I) *все простые концы $Z \in \tilde{L}$ первого рода, т. е. имеют одноточечные тела $|Z| = Z \in L$;* (II) *каждая точка $z \in L$ имеет кратность, не превосходящую некоторого числа $k = k(\mathfrak{M}) \geqslant 1$, т. е. может быть телом не более k простых концов.*

Будем говорить, что дуга $\gamma \subset \Omega$ отделяет простые концы $Z_1, Z_2, \cdots (\in \tilde{\Omega})$ от простых концов $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, \cdots (\in \tilde{\Omega})$, если $\Omega \setminus \gamma$ состоит из двух связных компонент, к одной из которых примыкают $Z_1, Z_2, \cdots$, а к другой—$\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, \cdots$(под примыканием простого конца понимается тот факт, что в области и подобласти он может быть определен одной и той же цепью сечений). В дальнейшем, не оговариваясь особо, будем рассматривать только локально-спрямляемые дуги и кривые.

Через $\gamma_Z(r)$, $Z \in \tilde{L}$, $r > 0$ обозначим дугу на окружности $\{\zeta : |\zeta - z| = r\}$, $z = |Z|$, отделяющую Z от ∞ (если таких дуг несколько, то в качестве $\gamma_Z(r)$ выбираем ту из них, которая отделяет Z от всех остальных). При $0 < r < R < d/2$, $d \stackrel{\mathrm{df}}{=} \operatorname{diam} \mathfrak{M}$, дуги $\gamma_Z(r)$ и $\gamma_Z(R)$ являются сторонами некоторого четырехсторонника $Q_Z(r, R) \subset \Omega$, две другие стороны которого—части границы L. Через $m_Z(r, R)$ обозначим его модуль [8 — 11], т. е. модуль семейства дуг, разделяющих в $Q_Z(r, R)$ стороны $\gamma_Z(r)$ и $\gamma_Z(R)$.

В дальнейшем через $C, C_1, \ldots$ будем обозначать неотрицательные константы, а через $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots$—достаточно малые неотрицательные константы, в различных соотношениях, вообще говоря, различные и зависящие только от континуума $\mathfrak{M}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M} \in H$, $Z \in \tilde{L}$, $0 < r_1 < r_2 < r_3 < d/2$. Тогда*

$$0 \leqslant m_Z(r_1, r_3) - [m_Z(r_1, r_2) + m_Z(r_2, r_3)] \leqslant C_1; \tag{2}$$

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \leqslant m_Z(r_1, r_2) \leqslant C_2 \ln \frac{r_2}{r_1} + C_3. \tag{3}$$

Будем говорить, что $\mathfrak{M} \in H^*$ (см. [5—7]), если $\mathfrak{M} \in H$ и для любых простых концов Z и $\mathrm{Z} \in \tilde{L}$ со свойством $|z - \zeta| < \varepsilon$ $(z = |Z|, \zeta = |\mathrm{Z}|)$ выполняется неравенство

$$|m_Z(|z-\zeta|, \varepsilon) - m_{\mathrm{Z}}(|z-\zeta|, \varepsilon)| \leqslant C. \tag{4}$$

Пусть $Z \in \bar{L}$, $\mathrm{Z} \in \tilde{\Omega}$. Через $r_Z(\mathrm{Z})$ обозначим точную верхнюю грань тех $r>0$, для которых дуга $\gamma_Z(r)$ отделяет Z от Z.

Если $\mathfrak{M} \in H$, то непосредственно из определения вытекает соотношение

$$|z-\zeta| \leqslant C\, r_Z(\mathrm{Z});\ \dot{z}=|Z|,\ \zeta=|\mathrm{Z}|. \tag{5}$$

При проверке условия (4) полезен суледующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{M} \in H$; Z *и* $\mathrm{Z} \in \tilde{L}$, $z=|Z| \in L$, $\zeta=|\mathrm{Z}| \in L$, $0<|z-\zeta|<\varepsilon<d/2$. *Тогда*: (I) *если* $r_Z(\mathrm{Z}) \leqslant C|z-\zeta|$, *то выполняется соотношение* (4); (II) *если* $r_Z(\mathrm{Z})>|z-\zeta|$, *то соотношение* (4) *эквивалентно условию*

$$|m_Z(|z-\zeta|,\ r_Z(\mathrm{Z}))-m_{\mathrm{Z}}(|z-\zeta|,\ r_Z(\mathrm{Z}))| \leqslant C_1. \tag{6}$$

При рассмотрении задач теории приближения, которые привели к необходимости введения классов H и H^*, отдельному изучению подвергается случай, когда $\mathfrak{M}=L$—конечная жорданова дуга.

Дуги класса H принято называть квазигладкими (см. [13]). Каждая точка $z \in L$, за исключением ее концов, является телом двух различных простых концов Z^1 и $Z^2 \in \tilde{L}$.

Теорема 4. *Для того чтобы квазигладкая дуга* $L \in H^*$, *необходимо и достаточно, чтобы при всех* $z=|Z^1|=|Z^2| \in L \setminus \{z_1,\ z_2\}$ *и* $0<\delta<\varepsilon_Z \overset{\mathrm{df}}{=} \min\{|z-z_1|,\ |z-z_2|\}$ (z_1 *и* z_2 — *концы дуги* L) *выполнялось неравенство*

$$|m_{Z^1}(\delta,\ \varepsilon_z)-m_{Z^2}(\delta,\ \varepsilon_z)| \leqslant C. \tag{7}$$

Теорема 4 дает удобное для геометрической проверки описание квазигладких дуг $L \in H^*$. Условие (7) отражает в некотором смысле «симметрию» дуги $L \in H^*$ и ассоциируется с гладкостью (т. е. с непрерывным изменением касательной к дуге L). Однако, как показывают приводимые ниже примеры 1 и 2, эти условия имеют существенно разную природу.

Пример 1. Дугу L^1 в плоскости переменного $z=x+iy$ зададим в виде графика функции

$$y=|x|\,/\,\ln 1\,/\,|x|,\ |x| \leqslant 1/2,$$

L^1 — гладкая, но $L^1 \bar{\in} H^*$.

Пример 2. Определим последовательность точек $x_1>x_2>\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, пользуясь следующим рекуррентным правилом. Положим $x_1=1$. Точку x_{n+1}, $n=1, 2\cdots$ находим из условия

$$(1+x_n^2)^{1/2}+(1+x_{n+1})^{1/2}=2+x_n-x_{n+1}.$$

Положим далее $\gamma_n=\{z: |z-x_n|=1+x_n^2)^{1/2}-1,\ (-1)^n \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ и рассмотрим дугу

$$L^2=[-1,\ 0] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n\right).$$

$L^2 \in H^*$, но ее касательная терпит разрыв в начале координат.

§ 2. Континуумы классов H и H^*

Доказательство теоремы 1. Как известно [12, стр. 45—50], всякий простой конец $Z \in \tilde{L}$ можно определить последовательностью круговых сечений $\{\gamma_k\}_{k=1, 2\ldots}$ (с концами, соответственно, в точках ζ_k' и $\zeta_k'' \in L$), диаметры которых d_k стремятся к 0 при $k \to \infty$. Соединим точки ζ_k' и ζ_k'' дугой $\gamma(\zeta_k', \zeta_k'') \subset \mathfrak{M}$ со свойством

$$\operatorname{mes} \gamma(\zeta_k', \zeta_k'') \leqslant C\,|\zeta_k' - \zeta_k''| \leqslant C\,d_k.$$

Таким образом, тело $|Z|$ простого конца $Z \in \tilde{L}$ можно заключить в область, ограниченную кривой $\gamma_k \cup \gamma(\zeta_k', \zeta_k'')$ и диаметром $\leqslant C_1\,d_k$, $k=1, 2, \cdots$. Следовательно, оно является точкой.

Пусть теперь произвольная точка $z \in L$ является телом более, чем n простых концов $Z^1, \cdots, Z^n, \cdots$. Для достаточно малых $r > 0$ имеем

$$\gamma_{Z^i}(r) \cap \gamma_{Z^j}(r) = \varnothing;\ i \neq j;\ i, j = \overline{1, n}.$$

Повторяя рассуждения из первой части доказательства теоремы 1, нетрудно заметить, что

$$\operatorname{mes} \gamma_{Z^j}(r) > C\,r,\ j = \overline{1, n}.$$

Таким образом

$$2\pi r \geqslant \sum_{j=1}^{n} \operatorname{mes} \gamma_{Z^j}(r) \geqslant C\,n\,r,$$

откуда следует искомое неравенство $n \leqslant k = k(\mathfrak{M})$.

Приведем необходимые в дальнейшем факты о свойствах континуума $\mathfrak{M} \in H$, доказательство которых для случая области с жордановой границей содержится в [5] и в общем случае совершенно аналогично.

На протяжении всего § 2 будем считать, что $\mathfrak{M} \in H$.

Лемма 1. *Пусть дуга $\gamma \subset \Omega$ отделяет простой конец $Z \in \tilde{L}$ от ∞, $|Z| = z \in L$, $\zeta \in \gamma$,*

$$\rho_{Z,\zeta}(\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} |\xi - z|^{-1}, \ \xi \in \Omega,\ e^{-1} \leqslant \left|\dfrac{\xi - z}{\zeta - z}\right| \leqslant e; \\ 0, \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{\gamma} \rho_{Z,\zeta}(\xi)\,|d\xi| \geqslant C.$$

Лемма 2. *Отображение $\Phi(\zeta)$ при всех $Z \in \tilde{L}$ и $r>0$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{\zeta \in \gamma_Z(r)} |\Phi(\zeta) - \Phi(Z)| \asymp \inf_{\zeta \in \gamma_Z(r)} |\Phi(\zeta) - \Phi(Z)|,$$

где под символом $A \asymp B$ понимается неравенство $C_1 A \leqslant B \leqslant C_2 A$.

Для $Z\in\tilde{L}$ *положим*

$$\Gamma_Z=\{\zeta:\zeta\in\Omega,\ \arg\Phi(\zeta)=\arg\Phi(Z)\}.$$

Если $\zeta\in\Gamma_Z$, $z=|Z|$, *то имеют место соотношения*

$$\inf_{\xi\in L}|\xi-\zeta|\overset{\mathrm{df}}{=}d(\zeta,\ L)\asymp r_Z(\zeta)\asymp|z-\zeta|. \tag{8}$$

Лемма 3. *Пусть* $Z\in\tilde{L}$, $|Z|=z\in L$; ζ_1 *и* $\zeta_2\in\Gamma_Z$; $\Phi(Z)=\tau$, $\Phi(\zeta_j)=\omega_j$, $j=1,\ 2$. *Тогда условия* $|z-\zeta_1|<C_1|z-\zeta_2|$ *и* $|\tau-\omega_1|\leqslant C_2(\tau-\omega_2$ *эквивалентны.*

Согласно лемме 2 отображение $\Phi(\zeta)$ обладает по терминологии работы [8] слабым (K)-свойством, следовательно, для $\zeta\in\gamma_Z(|z-\zeta|)$, $Z\in\tilde{L}$, $z=|Z|$, $|\zeta-z|<\varepsilon<d/2$, справедливо соотношение (см. [8], следствие 3)

$$|\Phi(\zeta)-\Phi(Z)|\asymp\exp\{-\pi m_Z(|z-\zeta|,\ \varepsilon)\}. \tag{9}$$

Этот факт в случае континуумов класса H допускает некоторое дополнение.

Лемма 4. *Пусть* $Z\in\tilde{L}$, $z=|Z|\in L$, $\zeta\in\Gamma_Z$, $|\zeta-z|<\varepsilon<d/2$. *Тогда имеет место соотношение* (9).

Доказательство. Через $\Gamma_Z(\zeta)$ обозначим часть дуги Γ_Z, лежащую между точками z и ζ. Не ограничивая общности можно считать, что $|z-\zeta|<C_1^{-1}\varepsilon$, где C_1 достаточно велико. Положим

$$\gamma_1=\gamma_Z(C_2^{-1}|z-\zeta|),\ \gamma_2=\gamma_Z(C_2|z-\zeta|),$$

где константа C_2 $(1\leqslant C_2<C_1)$ выбрана так, чтобы нашлись точки

$$\zeta_1\in\gamma_1\cap\Gamma_Z(\zeta),\ \zeta_2\in\gamma_2\cap[\Gamma_Z\setminus\Gamma_Z(\zeta)]$$

(существование такой константы гарантирует лемма 3).
Положим $\Phi(Z)=\tau$, $\Phi(\zeta_j)=w_j$, $j=1,\ 2$. По лемме 3 $|\tau-w_1|\asymp|\tau-w_2|$ а по построению $|\tau-w_1|<|\tau-w|<|\tau-w_2|$. Следовательно, имеем

$$|\tau-w|\asymp|\tau-w_1|\asymp\exp\{-\pi m_Z(|z-\zeta_1|,\ \varepsilon)\}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\{-\pi m_Z(|z-\zeta|,\ \varepsilon)\}.$$

Аналогично

$$|\tau-w|\asymp|\tau-w_2|\asymp\exp\{-\pi m_Z(|z-\zeta_2|,\ \varepsilon)\}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\{-\pi m_Z(|z-\zeta|,\ \varepsilon)\}.$$

Простым следствием леммы 4 является следующий факт.

Пусть $Z\in\tilde{L}$, $0<r_j<\varepsilon$, $j=1,\ 2$. Для того, чтобы выполнялось соотношение

$$|m_Z(r_1,\ \varepsilon)-m_Z(r_2,\ \varepsilon)|\leqslant C, \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы $r_1\asymp r_2$.

Действительно, возьмем произвольно точки $\zeta_j \in \Gamma_Z \cap \gamma_Z(r_j)$, $j=1, 2$ и положим $\Phi(Z) = \tau$, $\Phi(\zeta_j) = w_j$, $j=1, 2$. Согласно лемме 4 имеем

$$|\tau - w_j| \asymp \exp\{\pi\, m_Z(r_j, \varepsilon)\}, \; j=1, 2.$$

Следовательно, неравенство (10) эквивалентно условию $|\tau - w_1| \asymp \asymp |\tau - w_2|$ которое, в свою очередь, в силу леммы 3, эквивалентно соотношению $r_1 \asymp r_2$.

Доказательство теоремы 2. Левая часть неравенства (2) следует из известных свойств модулей семейств кривых (см., например. [10], стр. 21). Докажем правую часть. Через $\Gamma_{i,j} = \Gamma_Z(r_i, r_j)$, $i=1, 2$, $j=2, 3$ $(\Gamma_{2,2} \overset{\mathrm{df}}{=} \varnothing)$ обозначим семейство дуг, отделяющих в $Q_Z(r_i, r_j)$ сторону $\gamma_Z(r_i)$ от стороны $\gamma_Z(r_j)$. Согласно определению модуля семейств кривых [10, 11] найдутся такие допустимые (т. е. заданные в $\mathbf{C}$, неотрицателные, измеримые, суммируемые с квадратом) функции $\rho_k(\zeta)$, $k=1, 2$, для которых

$$L_{\rho_k}(\Gamma_{k,k+1}) \overset{\mathrm{df}}{=} \inf_{\gamma \in \Gamma_{k,k+1}} \int_\gamma \rho_k(\zeta)\,|d\zeta| = 1;$$

$$A(\rho_k) \overset{\mathrm{df}}{=} \iint_{\mathbf{C}} \rho_k^2(\zeta)\,d\sigma_\zeta \leqslant m_Z(r_k, r_{k+1}) + 1.$$

Положим далее

$$\rho_3(\zeta) = \begin{cases} C_1/|z-\zeta|, & \zeta \in \Omega,\ e^{-1} \leqslant \dfrac{|\zeta - z|}{r_2} < e; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases}$$

где константа C_1 выбрана настолько большой чтобы для всех дуг $\gamma \subset \Omega$, $\gamma \cap \gamma_Z(r_2) \neq \varnothing$, отделяющих простой конец Z от ∞, выполнялось условие $\int_\gamma \rho_3(\zeta)\,|d\zeta| > 1$ (существование такой константы вытекает из леммы 1). Рассмотрим допустимую функцию
$\rho(\zeta) \overset{\mathrm{df}}{=} \max_{k=1,2,3} \rho_k(\zeta)$. Очевидно

$$L_\rho(\Gamma_{1,3}) \overset{\mathrm{df}}{=} \inf_{\gamma \in \Gamma_{1,3}} \int_\gamma \rho(\zeta)\,|d\zeta| = 1,$$

следовательно

$$m_Z(r_1, r_3) \leqslant \sum_{k=1}^{3} \iint_{\mathbf{C}} \rho_k^2(\zeta)\,d\sigma_\zeta \leqslant$$

$$\leqslant m_Z(r_1, r_2) + m_Z(r_2, r_3) + C_2,$$

что и утверждается в неравенстве (2).

Левая часть неравенства (3) становится очевидной, если учесть вложение $\Gamma_{1,2} \supset \{\gamma_Z(r) : r_1 < r < r_2\}$. Для доказательства правой части рассмотрим точки $\zeta_j \in \gamma_Z(r_j) \cap \Gamma_Z$, $j=1, 2$, для которых

$$\Gamma z(\zeta_2)\setminus\Gamma z(\zeta_1)\subset\overline{Qz(r_1,\ r_2)}.$$

Согласно лемме 3 имеем

$$C_3 r_1 \leqslant |z-\zeta| \leqslant C_4 r_2,\ \zeta\in\Gamma z(\zeta_2)\setminus\Gamma z(\zeta_1).$$

Рассмотрим допустимую функцию

$$\rho(\zeta)=\begin{cases}|\zeta-z|^{-1}, & \zeta\in\Omega,\ C_3 r_1/e \leqslant |\zeta-z| \leqslant C_4 e r_2,\\ 0, & \text{во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Учитывая лемму 1 и тот факт, что

$$\gamma\cap[\Gamma z(\zeta_2)\setminus\Gamma z(\zeta_1)]\neq\varnothing,\ \gamma\in\Gamma_{1,2},$$

имеем $L_\rho(\Gamma_{1,2})\geqslant C_5$, в то время как

$$A(\rho)\overset{\mathrm{df}}{=}\iint_C \rho^2(\zeta)\,d\sigma_\zeta\leqslant C_6\ln\frac{r_2}{r_1}+C_7,$$

откуда вытекает правая часть неравенства (3).

Доказательство теоремы 3. Не ограничивая общности предположим, что $|z-\zeta|$ достаточно мало. Положим

$$h=\min\{|z-\zeta|+r_Z(Z),\ \varepsilon/2\}.$$

Теорема 2 позволяет выписать следующие соотношения:

$$m_Z(|z-\zeta|,\ \varepsilon)=m_Z(|z-\zeta|,\ h)+m_Z(h,\ \varepsilon)+\delta_1, \tag{11}$$

$$m_Z(|z-\zeta|,\ \varepsilon)=m_Z(|z-\zeta|,\ h)+m_Z(h,\ \varepsilon)+\delta_2, \tag{12}$$

где $|z-\zeta|<\varepsilon/2$, $0<\delta_j\leqslant C_1$, $j=1,\ 2$. Покажем, что

$$|m_Z(h,\ \varepsilon)-m_Z(h,\ \varepsilon)|<C_2. \tag{13}$$

Для этого достаточно рассмотреть случай малых h, так как если $h\asymp\varepsilon$, то каждый из входящих в неравенство (13) модулей оценивается сверху по теореме 2 константой. При малых h в силу леммы 3 и оценки (5) имеет место вложение четырехсторонников

$$Qz(C_3 h,\ C_4)\subset Qz(h,\ \varepsilon)\subset Qz(C_5 h,\ C_6).$$

Следовательно

$$m_Z(h,\ \varepsilon)\leqslant C_7+m_Z(C_3 h,\ C_4)\leqslant C_7+m_Z(h,\ \varepsilon)\leqslant$$
$$\leqslant C_7+m_Z(C_5 h,\ C_6)\leqslant C_8+m_Z(h,\ \varepsilon).$$

Сопоставляя соотношения (11)—(13) находим

$$|[m_Z(|z-\zeta|,\ \varepsilon)-m_Z(|z-\zeta|,\ \varepsilon)]-$$
$$-[m_Z(z-\zeta|,\ h)-m_Z(|z-\zeta|,\ h)]|\leqslant C_9.$$

Для завершения доказательства теоремы 3 остается воспользоваться в каждом из оговариваемых в условиях (I) и (II) случаях теоремой 2.

§ 3. Квазигладкие дуги из класса H^*

Для $R > 1$, Z и $\mathrm{Z} \in \tilde{L}$ положим

$$\tilde{z}_R = \Psi[R\Phi(Z)], \ \tilde{\zeta}_R = \Psi\,[R\Phi(\mathrm{Z})].$$

Лемма 5 (см. [5]). *Пусть* $\mathfrak{M} \in H$. *Следующие условия эквивалентны:* (I) $\mathfrak{M} \in H^*$; (II) $\forall R > 1$, Z *и* $\mathrm{Z} \in \tilde{L}$, $|z - \zeta| \leqslant C|z - \tilde{z}_R|$ $(z = |Z|$, $\zeta = |\mathrm{Z}|)$ *выполняется соотношение*

$$|\zeta - \tilde{\zeta}_R| \asymp |z - \tilde{z}_R|. \tag{14}$$

Пусть $\mathfrak{M} = L$ — конечная квазигладкая дуга, z_1 и z_2 — ее концы. При $R > 1$, $j = 1, 2$ положим $\Phi(z_j) = \tau_j$,

$$\Omega_1' = \{\tau : |\tau| > 1, \ \arg\tau_1 < \arg\tau < \arg\tau_2\}, \ \Omega_2' = \Omega' \setminus \overline{\Omega}_1',$$

$$\tilde{\Omega}_j = \Psi(\overline{\Omega}_j'), \ \Omega^j = \Psi(\Omega_j'), \ \tilde{L}^j = \tilde{\Omega}^j \cap \tilde{L},$$

$$L_R^j = \{\zeta : \zeta \in \Omega^j, \ |\Phi(\zeta)| = R\}, \ \rho_R^j(z) = \inf_{\zeta \in L_R^j} |\zeta - z|.$$

Как уже отмечалось, каждая точка $z \in L \setminus \{z_1, z_2\}$ является телом двух простых концов $Z^1 \in \tilde{L}^1$ и $Z^2 \in \tilde{L}^2$.

Лемма 6 (см. [14]). *Пусть* $\mathrm{Z}_k^j \in \tilde{\Omega}^j$, $\zeta_k = |\mathrm{Z}_k^j| \in \overline{\Omega^j}$, $\Phi(\mathrm{Z}_k^j) = w_k \in \overline{\Omega}_j'$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2, 3$. *Тогда условия* $|\zeta_1 - \zeta_2| \leqslant C_1|\zeta_1 - \zeta_3|$ *и* $|w_1 - w_2| \leqslant C_2|w_1 - w_3|$ *эквивалентны.*

Применение леммы 6 к различным конкретно выбираемым тройкам точек позволяет убедиться в справедливости при $R > 1$, z и ζ L, $j = 1, 2$ следующих соотношений:

$$\rho_R^j(z) \asymp |z - \tilde{z}_R^j|, \tag{15}$$

$$|\zeta - \tilde{\zeta}_R^j| \asymp \rho_R^j(z), \text{ если } |\zeta - z| \leqslant C\rho_R^j(z), \tag{16}$$

где $\tilde{S}_R^j \overset{\text{df}}{=} \Psi[R\Phi(S^j)]$, $S^j \in \tilde{L}^j$, $|S^j| = S \in L$.

Следуя [9] через $\Gamma(\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2; \mathrm{Z}_3; \Omega)$, $\mathrm{Z}_k \in \tilde{\Omega}$, $k = 1, 2, 3$ обозначим семейство локально-спрямляемых дуг и кривых $\gamma \subset \Omega$, отделяющих простые концы Z_1 и Z_2 от Z_3 и ∞

Доказательство теоремы 4. Согласно лемме 5 мы должны убедиться, что справедливость неравенства (7) эквивалентна выполнимости соотношения (14). Если Z и Z принадлежат одновременно одному и тому же $\tilde{L}^j$ $j = 1, 2$, то соотношение (14) автоматически выполняется в силу неравенств (15) и (16). Если же Z и Z принадлежат разным $\tilde{L}^j$, то согласно (15) и (16) проверка соотношения (14) элементарно сводится к рассмотрению только случая $|Z| = |\mathrm{Z}|$. Итак, пусть точка

$z\in L\setminus\{z_1, z_2\}$ является телом простых концов $Z^1\in\tilde{L}^1$ и $Z^2\in\tilde{L}^2$. Для доказательства теоремы 4 необходимо показать, что неравенство (7) эквивалентно соотношению

$$|z-\tilde{z}_R^1|\asymp|z-\tilde{z}_R^2|,\ R>1. \tag{17}$$

Пусть для определенности $\varepsilon_z=|z-z_1|$. Положим $\Phi(z_1)=\tau_0$, $\Phi(Z^j)=\tau^j$, $\Phi(\tilde{z}_R^j)=\tilde{\tau}_R^j$, $j=1, 2$. Через $\zeta_1\in\Omega$ обозначим точку со свойствами

$$|z-z_1|=|\zeta_1-z_1|,\ \arg\Phi(\zeta_1)=\arg\tau_0.$$

В силу леммы 6, примененной к точкам z_1, ζ_1 и z, имеем

$$|\tau_0-\tau^1|\asymp|\tau_0-\Phi(\zeta_1)|\asymp|\tau_0-\tau^2|.$$

Рассмотрим семейства кривых $\Gamma_j\overset{\mathrm{df}}{=}\Gamma(Z^j, \tilde{z}_R^j; z_1; \Omega)$, $\Gamma'_j=\Phi(\Gamma_j)$, $j=1, 2$. Относительно их модулей можно сказать следующее (см. [9]):

$$\left|m(\Gamma'_j)-\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{|\tau_0-\tau^j|}{R-1}+1\right)\right|\leqslant C_1.$$

Таким образом, имеем

$$|m(\Gamma_1)-m(\Gamma_2)|=|m(\Gamma'_1)-m(\Gamma'_2)|\leqslant C_2. \tag{18}$$

Положим далее $r_j=r_{Z^j}(z_1)$, $r_Z=r_{Z^j}(\tilde{z}_R^j)$, $j=1, 2$. Согласно оценке (8) $r'_j\asymp|z-\tilde{z}_R^j|$.

Кроме того, $r_j\asymp|z-z_1|$, $j=1, 2$. Действительно, определим точку $\zeta\in\Omega^j\cap\gamma_{Z^j}(r_j/2)$ из условия $\arg\Phi(\zeta)=\arg\tau^j$. В силу леммы 2 $|\Phi(\zeta)-\tau^j|\leqslant C_3|\tau_0-\tau^j|$. Применяя лемму 6, получим

$$r_j=2|\zeta-z|\leqslant C_4|z-z_1|.$$

Неравенство в обратную сторону следует из оценки (5). Предположим теперь, что имеет место неравенство (7) и докажем справедливость оценки (17). Если $r_j\leqslant r'_j$ хотя бы при одном $j=1, 2$ (например при $j=1$), то $|z-z_1|\leqslant C_5|z-\tilde{z}_R^1|$ и согласно соотношениям (15) и (16)

$$|z-\tilde{z}_R^1|\asymp\rho_R^1(z^1)\asymp\rho_R^2(z_1)\asymp|z-\tilde{z}_R^2|.$$

Следовательно, нетривиальным является случай, когда $r_j>r'_j$, $j=1, 2$. При этом имеет место неравенство

$$-C_6\leqslant m(\Gamma_j)-m_{Z^j}(r'_j, r_j)\leqslant C_7,\ j=1, 2. \tag{19}$$

Действительно, зафиксируем индекс j. Левая часть неравенства (19) следует из теоремы 1 и того факта, что семейство Γ_j содержит в себе при любом достаточно малом $\varepsilon_1>0$ семейство дуг, разделяющих в четырехстороннике $Q_{Z^j}(r'_j+\varepsilon_1, r_j-\varepsilon_1)$ дуги $\gamma_{Z^j}(r'_j+\varepsilon_1)$ и $\gamma_{Z^j}(r_j-\varepsilon_1)$. Для доказательства правой части проведем следующие рассуждения. Через $\rho_1(\zeta)$ обозначим допустимую функцию, удовлетворяющую условиям

$$\inf_{\gamma\in\Gamma_j^*}\int_\gamma \rho_1(\xi)\,|d\xi| = 1,$$

$$\iint_C [\rho_1(\xi)]^2\, d\sigma_\xi \leqslant m_{z^j}(r_j', r_j) + 1,$$

где Γ_j^* — семейство дуг $\gamma\subset Q_{z^j}(r_j', r_j)$, разделяющих $\gamma_{z^j}(r_j')$ и $\gamma_{z^j}(r_j)$

Положим далее

$$\rho_2(\xi) = \begin{cases} C_8/|\xi - z|, & r_j/e \leqslant |\xi - z| \leqslant 2\,e\,r_j \\ \text{или } r_j'/(2e) \leqslant |\xi - z| \leqslant e r_j'; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях,}\end{cases}$$

где константа C_8 выбрана настолько большой, чтобы всякая дуга $\gamma\subset\Omega$ отделяющая простой конец Z^j от ∞, для которой

$$\gamma\cap[\gamma_{z^j}(r_j)\cup\gamma_{z^j}(r_j')]\neq\varnothing,$$

удовлетворяла условию $\int_\gamma \rho_2(\xi)\,|d\xi|\geqslant 1$ (такая константа найдется в силу леммы 1).

Рассмотрим допустимую функцию $\rho(\xi)\overset{\mathrm{df}}{=}\max\{\rho_1(\xi), \rho_2(\xi)\}$. В силу сделанных предложений

$$\inf_{\gamma\in\Gamma_j}\int_\gamma \rho(\xi)\,|d\xi| = 1,$$

$$\iint_C \rho^2(\xi)\, d\sigma_\xi \leqslant m_{z^j}(r_j', r_j) + C_9,$$

откуда следует правая часть соотношения (19).

Комбинируя неравенства (18) и (19) получим

$$|m_{Z^1}(r_1', r_1) - m_{Z^1}(r_2', r_2)| \leqslant C_{10}. \tag{20}$$

Пусть для определенности $r_1' < r_2'$. Пользуясь теоремой 2, неравенство (20) перепишем в виде

$$m_{Z^1}(r_1', r_2') \leqslant C_{11},$$

откуда заключаем, что $r_2' \leqslant C_{12}\, r_1'$. Окончательно имеем

$$|z - \tilde{z}_R^1| \asymp r_1' \asymp r_2' \asymp |z - \tilde{z}_R^2|.$$

Покажем теперь как из соотношения (17) следует оценка (7). При фиксированном j в качестве ζ_j возьмем первую при движении по $\Gamma_{z^j}\overset{\mathrm{df}}{=}\{\zeta : \arg\Phi(\zeta) = \arg\Phi(Z^j)\}$ от точки z точку пересечения $\Gamma_{z^j}\cap \cap\gamma_{z^j}(\delta)$, где $0<\delta<\varepsilon_z = |z - z_1|$ — произвольное число. Положим $R_j = |\Phi(\zeta_j)|$. Очевидно

$$r'_j \overset{\mathrm{df}}{=} r_{z^j}(\zeta_j) = |z-\zeta_j| = \delta.$$

Соотношение (17) в совокупности с леммой 6 указывает на то, что $R_1 - 0 \asymp R_2 - 1$. Рассмотрим семейства кривых $\tilde{\Gamma}_j \overset{\mathrm{df}}{=} \Gamma(Z^j, \zeta_j;\ z_1;\ \Omega)$, $\tilde{\Gamma}'_j \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi(\tilde{\Gamma}_j)$, $j=1,\ 2$. Их модули можно оценить следующим образом (см. [9]):

$$\left| m(\tilde{\Gamma}'_j) - \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{|\tau_0 - \Phi(\zeta_j)|}{R_j - 1} + 1 \right) \right| \leqslant C_1.$$

Следовательно

$$|m(\tilde{\Gamma}_1) - m(\tilde{\Gamma}_2)| = |m(\tilde{\Gamma}'_1) - m(\tilde{\Gamma}'_2)| \leqslant C_2. \qquad (21)$$

Неравенство (19), в котром положено $R = R_j$, с учетом теремы 2 перепишется в виде

$$|m(\tilde{\Gamma}_j) - m_{z^j}(\delta,\ |z - z_1|)| \leqslant C_3,\ j = 1,\ 2. \qquad (22)$$

Необходимое соотношение (7) немедленно следует из оценок (21) и (22).

Обоснование примера 1. Положим $z=0$, при этом $\varepsilon_z = (1 + 1/\ln^2 2)^{1/2}/2$. Пусть для определенности $(0,\ \varepsilon i) \subset \Omega^1$ при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$. Нетрудно видеть, что при $0 < \delta < \varepsilon_z$ имеют место неравенства

$$m_{z^1}(\delta,\ \varepsilon_z) \geqslant \frac{1}{\pi} \ln \frac{C_1}{\delta} + C_2 \ln |\ln \delta|,$$

$$m_{z^2}(\delta,\ \varepsilon_z) \leqslant \frac{1}{\pi} \ln \frac{C_3}{\delta},$$

откуда заключаем, что

$$m_{z^1}(\delta,\ \varepsilon_z - m_{z^2}(\delta,\ \varepsilon_z) \geqslant C_2 \ln |\ln \delta| - C_4.$$

Следовательно в начале координат нарушается условие (7) и по теореме 4 $L^1 \notin H^*$.

Обоснование примера 2. Несложный подсчет показывает, что для любой точки $z \in L^2$ и $0 < \delta < \varepsilon_z$ выполняется неравенство

$$\left| m_{z^j}(\delta,\ \varepsilon_z) - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\varepsilon_z}{\delta} \right| \leqslant C,\ j = 1,\ 2,$$

откуда следует соотношение (7). А значит по теореме 4 $L^2 \in H^*$.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР, г. Донецк

Поступила 28. I. 1985

Վ. Վ. ԱՆԴՐԵՎՍԿԻ. Երկրաչափական հատկությունների մասին, որոնք արտահայտում են Ռիմանի ֆունկցիան, կոնտինուումի և նրան լրացնող, առանց արտաքին զրոյական անկյունների, տիրույթի համար (ամփոփում)

Աշխատանքում ուսումնասիրվել են մի քանի հատկություններ, հարթ կոնտինուումի և նրան լրացնող տիրույթին, որոնք բավարարում են երկու երկրաչափական պայմանների, և մեծ դեր են խաղում կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների կոնստրուկտիվ տեսությունում։

V. V. ANDRIEVSKII. *On the metrical properties of Rieman's mapping function for the region supplemented to continuum without external zero angles* (summary)

The properties of planar continua and their complementary regions which satisfy two geometrical conditions are studied. They are importance for the constructive theory of functions of the ccmlex variable.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. К. Дзядык*. О проблеме С. М. Никольского в комплексной области, Изв. АН СССР, сер. матем., 23, № 5, 1959, 697—736.
2. *В. К. Дзядык*. К вопросу о приближении непрерывных функций в замкнутых областях с углами и о проблеме С. М. Никольского (первое сообщение), Изв. АН СССР, сер. матем., 26, № 6, 1962, 796—824.
3. *В. К. Дзядык*. К теории приближения аналитических функций, непрерывных в замкнутых областях, и о проблеме С. М. Никольского (второе сообщение), Изв. АН СССР, сер. матем., 27, № 5, 1963, 1135—1164.
4. *В. К. Дзядык*. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., «Наука», 1977.
5. *В. В. Андриевский*. Геометрические свойства областей В. К. Дзядыка, Укр. матем. ж., 33, № 6, 1981, 723—727.
6. *В. В. Андриевский*. Конструктивное описание классов функций на континуумах комплексной плоскости с учетом роста аппроксимационных полиномов, ИМ-83.12, Препринт ин-та математики АН УССР, 1983.
7. *В. В. Андриевский*. Описание классов функций с заданной скоростью убывания их наилучших равномерных полиномиальных приближений, Укр. матем. ж., 36, № 5, 1984, 602—606.
8. *В. И. Белый, В. М. Миклюков*. Некоторые свойства конформных и квазиконформных отображений и прямые теоремы конструктивной теории функций, Изв. АН СССР, сер. матем., 38, № 6, 1974, 1343—1361.
9. *В. И. Белый*. Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей, Матем. сб., 102(144).
10. *Л. Альфорс*. Лекции по квазиконформным отображениям, М., «Мир», 1969.
11. *O. Lehto, K. I. Virtanen*. Quasiconformal Mappings in the Plane, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
12. *Г. Д. Суворов*. Семейства плоских топологических отображений, Новосибирск, «Наука», 1965.
13. *М. А. Лаврентьев*. О некоторых граничных задачах в теории однолистных функций, Матем. сб., 1(43), 1936, 815—846.
14. *В. В. Андриевский*. Прямые теоремы теории приближения на квазиконформных дугах, Изв. АН СССР, сер. матем., 44, № 2, 1980, 243—261.