

УДК 517.51

Г. А. КАРАГУЛЯН

О РАСХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО
ПОЛНЫМ ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ

Если $\lambda(t) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\lambda(0) = 0$, некоторая монотонно возрастающая непрерывная функция, то через $\lambda(L)$ обозначим класс тех функций $f(x, y)$ на квадрате I^2 ($I = (0, 1)$), для которых $\lambda(|f(x, y)|) \in L^1(I^2)$.

Известно (см. [1], [2]), что если $f(x, y) \in \lambda(L)$ при $\lambda(t) = t \ln^+ t$, то её ряд Фурье по двойной системе Хаара $\{\chi_n(x) \cdot \chi_m(y)\}_{n, m=1}^\infty$ сходится почти всюду (п. в.) по Привгсхейму на I^2 , и что при условии

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t)}{t \ln^+ t} = 0, \quad (1)$$

существует функция из класса $\lambda(L)$, ряд Фурье которой по двойной системе Хаара расходится п. в. по Привгсхейму.

В дальнейшем, говоря о сходимости двойного ряда (в метрике $L^1(I^2)$), почти всюду или в некоторой точке), подразумеваем его сходимость по Привгсхейму.

В настоящей работе доказывается

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $x \in (0, 1)$ — полная ортонормированная система с условием

$$|\varphi_n(x)| < M_n, \quad x \in (0, 1), \quad M_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

и $\lambda(t) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\lambda(0) = 0$ — некоторая непрерывная возрастающая функция, с условием (1). Тогда существует функция $f(x, y) \in \lambda(L)$, двойной ряд Фурье которой по системе $\{\varphi_n(x) \cdot \varphi_m(y)\}_{n, m=1}^\infty$ расходится п. в..

Эта теорема, с учетом вышеупомянутого результата работы [2] Т. Ш. Зерекндзе о расходимости двойных рядов Фурье-Хаара, является следствием следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть $g(x, y) \in L^1(I^2)$ — некоторая функция, двойной ряд Фурье-Хаара которой расходится п. в. и $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — полная ортонормированная система с условием (2). Тогда существует функция $f(x, y)$, равномерно распределенная с $g(x, y)$, и такая, что её двойной ряд Фурье по системе $\{\varphi_n(x) \cdot \varphi_m(y)\}_{n, m=1}^\infty$ тоже расходится п. в..

При доказательстве теоремы 2 мы будем использовать некоторые свойства систем типа Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, определяемые следующим

образом. Пусть $\{E_i^{(k)}, i = 1, 2, \dots, 2^k, k = 1, 2, \dots\}$ — семейство измеримых множеств, где $E_1^{(0)} = (0, 1)$, $E_i^{(k)} \subset (0, 1)$ и:

$$I) m(E_i^{(k)}) = \frac{1}{2^k},$$

$$II) E_i^{(k)} \cap E_j^{(k)} = \emptyset \text{ при } i \neq j,$$

$$III) E_i^{(k)} = E_{2i-1}^{(k+1)} \cup E_{2i}^{(k+1)}.$$

Тогда полагаем

$$\tilde{\chi}_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } x \in E_{2i-1}^{(k+1)}, \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in E_{2i}^{(k+1)}, \\ 0 & \text{при остальных } x, \end{cases}$$

где $n = 2^k + i$, $1 \leq i \leq 2^k$. Когда $E_i^{(k)} = [i-1/2^k, i/2^k)$, получаем обычную систему Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$.

Как известно (см. [3], стр. 122), полиномы по обычной системе Хаара и по системе типа Хаара, имеющие одинаковые коэффициенты

$$P(x) = \sum_{n=1}^N a_n \tilde{\chi}_n(x), \quad P'(x) = \sum_{n=1}^N a_n \chi_n(x),$$

имеют одинаковые функции распределения. Многие следствия, получаемые из этого факта, в дальнейшем будут использованы.

Верна следующая

Лемма 1. Для любой полной ортонормированной системы $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и номеров $0 = n(1) < n(2) < n(3) < \dots$ существуют система типа Хаара $\tilde{\chi} = \{\tilde{\chi}_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и полиномы по системе Φ .

$$Q_m(x) = \sum_{i=k(m)+1}^{k(m+1)} a_i \varphi_i(x), \quad m = 1, 2, \dots, \quad 0 = k(1) < k(2) < k(3) < \dots, \quad (3)$$

такие, что

$$1) \quad \{k(i)\}_{i=1}^\infty \subset \{n(i)\}_{i=1}^\infty, \quad (4)$$

$$2) \quad \tilde{\chi}_m(x) = Q_m(x) + a_m(x), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$$\|a_m\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{32^{m+1}}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$3) \quad \sum_{j=1}^{n-1} \left[\sum_{m=k(n)+1}^n c_m^2(a_j, \Phi) \right]^{1/2} \leq \frac{1}{4^{n+1}}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

где числа $c_m(a_j, \Phi)$, $m = 1, 2, \dots$ — коэффициенты Фурье функций относительно системы Φ .

Доказательство леммы 1 в точности совпадает с доказательством аналогичной леммы, приведенной в [3] (см. [3], стр. 341).

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — некоторая полная ортонормированная система с условием (2). Согласно тео-

реме Меньшова-Марцинкевича найдется последовательность номеров:

$0 = n(1) < n(2) < \dots$ такая, что если $\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 < \infty$, то ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{l=n(m)+1}^{n(m+1)} c_l \varphi_l(x) \right]$$

будет сходиться п. в. Полагая, что в формулировке леммы 1 номера $\{n(i)\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяют вышеуказанному требованию теоремы Меньшова-Марцинкевича для системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, мы можем согласно этой лемме определить полиномы $Q_m(x)$ и функции $\tilde{\chi}_m(x)$ и $a_m(x)$ с условиями (3)–(7) такие, что почти всюду сходились ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{l=k(m)+1}^{k(m+1)} c_l(a, \Phi) \varphi_l(x) \right], \quad j=1, 2, \dots \quad (8).$$

Пусть теперь $g(x, y)$ такая интегрируемая функция, двойной ряд Фурье-Хаара которой расходится п. в. Обозначим

$$b_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 g(x, y) \chi_i(x) \chi_j(y) dx dy, \quad i, j=1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$c_m^{(j)} = c_m(a, \Phi) = \int_0^1 a_j(x) \varphi_m(x) dx, \quad j, m=1, 2, \dots \quad (10).$$

Известно, что двойные ряды Фурье-Хаара функций из $L^1(I^2)$ сходятся в метрике $L^1(I^2)$. В частности, это имеет место для функции $g(x, y)$, т. е. ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \chi_i(x) \chi_j(y) \quad (\text{см. (9)}) \quad (11')$$

сходится в $L^1(I^2)$. Следовательно, имея в виду определение системы типа Хаара, найдется равномерно распределенная с $g(x, y)$ функция $f(x, y)$ такая, что

$$f(x, y) \stackrel{L^1(I^2)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \tilde{\chi}_i(x) \tilde{\chi}_j(y). \quad (11)$$

Аналогично, из расходимости п. в. ряда (11') следует расходимость п. в. ряда (11). Покажем, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^j \left(\sum_{m=k(n)+1}^{k(n+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2^n}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (12)$$

Имеем (см. (6), (7), (10))

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \left(\sum_{m=k(n)+1}^{k(n+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} &\leq \sum_{j=1}^{n-2} 2^j \left(\sum_{m=k(n)+1}^{k(n+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} + \\ &+ \sum_{j=n-1}^{\infty} 2^j \left(\sum_{m=1}^{\infty} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} \leq 2^{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} \left(\sum_{m=k(n)+1}^{k(n+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=n-1}^{\infty} 2^j \|x_j\|_{L^1(I)} \leq \frac{2^{n-2}}{4^n} \sum_{j=n-1}^{\infty} \frac{2^j}{(4\sqrt{2})^j} < \frac{1}{2^n}.$$

Итак, неравенство (12) установлено.

Для доказательства теоремы достаточно доказать расходимость п. в. двойного ряда Фурье вышеопределенной функции $f(x, y)$ (см. (11)) по системе $\{\varphi_n(x) \varphi_m(y)\}_{n, m=1}^{\infty}$ (как отмечалось выше $f(x, y)$ и $g(x, y)$ равномерно распределенные).

Лемма 2. Все ряды

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} Q_i(x) Q_j(y), \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \tilde{\chi}_i(x) \alpha_j(y), \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \alpha_i(x) \tilde{\chi}_j(y), \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \alpha_i(x) \alpha_j(y), \quad (16)$$

где b_{ij} , Q_i и α_j определены выше (см. (3), (5), (9)), сходятся в метрике $L^1(I^2)$. Причем ряды (14), (15) и (16) ещё сходятся п. в., а ряд (13) расходится п. в..

Доказательство. Имея в виду (9) и определение системы Хаара, легко убедиться, что

$$|b_{ij}| \leq \sqrt{i} \sqrt{j} \|g\|_{L^1(I)}, \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Используя этот факт, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij} \alpha_i(x) \alpha_j(y)|_{L^1(I^2)} &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}| \|\alpha_i\|_{L^1(I)} \|\alpha_j\|_{L^1(I)} \leq \\ &\leq \|g\|_{L^1(I)} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{i}}{2^i} \cdot \frac{\sqrt{j}}{2^j} < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд (16) сходится п. в. и в метрике $L^1(I^2)$.

Докажем сходимость п. в. ряда (14). Обозначим

$$B_j = \left\{ y \in (0, 1); |\alpha_j(y)| \leq \frac{1}{4^j} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Используя (6) и неравенство Чебишева, имеем

$$m B_j > 1 - \frac{1}{2^j}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Известно следующее неравенство (см. [3], стр. 83):

$$m \left\{ x \in (0, 1), \sup_{1 \leq n < \infty} \left| \sum_{i=1}^n c_i(f, \gamma) \chi_i(x) \right| > \lambda \right\} \leq \frac{d_1}{\lambda} \|f\|_{L^1(I)},$$

где d_i есть абсолютная постоянная, а $c_i(f, \chi)$ — коэффициенты Фурье-Хаара некоторой функции $f(x) \in L^1(I)$. Отсюда, используя определение системы типа Хаара, получаем аналогичное неравенство

$$m \left\{ x \in (0, 1); \sup_{1 \leq n < \infty} \left| \sum_{i=1}^n c_i(f, \chi) \tilde{\chi}_i(x) \right| > \lambda \right\} \leq \frac{d_1}{\lambda} \|f\|_{L^1(I)}. \quad (20)$$

Имеем (см. (9))

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \int_0^1 \int_0^1 g(x, y) \chi_i(x) \chi_j(y) dx dy = \\ &= \int_0^1 \left| \int_0^1 g(x, y) \chi_j(y) dy \right| \chi_i(x) dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Это означает, что при фиксированном $1 \leq j < \infty$, числа b_{ij} , $i=1, 2, \dots$ являются коэффициентами Фурье-Хаара функции

$$F_j(x) = \int_0^1 g(x, y) \chi_j(y) dy, \quad j=1, 2, \dots \quad (22)$$

Очевидно, что

$$\|F_j\|_{L^1(I)} \leq \sqrt{j} \|g\|_{L^1(I)}, \quad j=1, 2, \dots \quad (23)$$

Следовательно, применяя неравенство (20) к функциям F_j , $j=1, 2, \dots$ и обозначая

$$A_j = \left\{ x \in (0, 1); \sup_{1 \leq n < \infty} \left| \sum_{i=1}^n b_{ij} \chi_i(x) \right| \leq 2^j \right\}, \quad j=1, 2, \dots, \quad (24)$$

получаем (см. (21), (22), (23))

$$m A_j > 1 - \frac{d_1 \sqrt{j} \|g\|_{L^1(I)}}{2^j}, \quad j=1, 2, \dots \quad (25)$$

Из определения системы типа Хаара следует, что (см. (21), (22)) ряды

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{ij} \tilde{\chi}_i(x), \quad j=1, 2, \dots, \quad (26)$$

сходятся п. в. и в метрике $L^1(I)$. Поэтому множество $G \subset (0, 1)$, на котором все ряды сходятся п. в. одновременно, имеет полную меру. Из (25) следует, что множество $\lim A_j$ тоже имеет полную меру. В итоге получим, что множество

$$A = \left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{j \geq n} A_j \right) \cap G \quad (27)$$

имеет полную меру. Из (19) следует, что множество $B = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{j \geq n} B_j$ тоже имеет полную меру. Следовательно, для сходимости п. в. ряда (14) достаточно доказать его сходимость п. в. на множестве $A \times B \subset \mathbb{R}^2$.

Итак, пусть $(x_0, y_0) \in A \times B$ — фиксированная точка. Имея в виду характер множеств A и B , для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать целое число M такое, что

$$x_0 \in A_j \text{ при } j > M, \quad (28)$$

$$y_0 \in B_j \text{ при } j > M, \quad (29)$$

$$2^{-M} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (30)$$

После этого, используя сходимость п. в. рядов (16) в точке x_0 $A \subset G$ (см. (27)), выберем такое N , что

$$\left| \sum_{j=1}^M \sum_{l=N+1}^N b_{lj} \chi_l(x_0) a_j(y_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n > N. \quad (31)$$

При $m > M$ и $n > N$, очевидно, что

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m b_{lj} \bar{\chi}_l(x) a_j(y) - \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^M b_{lj} \bar{\chi}_l(x) a_j(y) \right| \leq \\ & \leq \left| \sum_{l=1}^M \sum_{j=N+1}^n b_{lj} \tilde{\chi}_l(x) a_j(y) \right| + \left| \sum_{j=M+1}^m \sum_{l=1}^n b_{lj} \tilde{\chi}_l(x) a_j(y) \right|. \end{aligned} \quad (32)$$

Имеем (см. (18), (24), (28), (29))

$$\left| \sum_{l=1}^n b_{lj} \chi_l(x_0) \right| \leq 2^j \text{ и } |a_j(y_0)| < \frac{1}{4^j} \text{ при } j > M. \quad (33)$$

Следовательно (см. (30), (33))

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=M+1}^m \sum_{l=1}^n b_{lj} \tilde{\chi}_l(x_0) a_j(y_0) \right| \leq \sum_{j=M+1}^m \left| |a_j(y_0)| \left| \sum_{l=1}^n b_{lj} \chi_l(x_0) \right| \right| \leq \\ & \leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^M} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Из (31), (32) и (34) вытекает

$$\left| \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m b_{lj} \bar{\chi}_l(x_0) a_j(y_0) - \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^M b_{lj} \bar{\chi}_l(x_0) a_j(y_0) \right| < \varepsilon.$$

Этим доказана сходимость ряда (14) в любой точке $(x_0, y_0) \in A \times B$ и, следовательно, его сходимость п. в.. Аналогично можно доказать сходимость п. в. ряда (15).

Теперь докажем их сходимость в метрике $L^1(I^2)$. Сделаем это для ряда (14) (для ряда (15) оно аналогично). В силу базисности системы $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L^1(I)$ и определения системы типа Хаара имеем

$$\left\| \sum_{l=1}^n c_l(f, \chi) \tilde{\chi}_l(x) \right\|_{L^1(I)} \leq d_1 \|f\|_{L^1(I)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где d_1 — абсолютная постоянная, а $c_l(f, \chi)$ — коэффициенты Фурье-Хаара некоторой функции $f(x) \in L^1(I)$. Применяя это неравенство к функциям F_j , $j = 1, 2, \dots$ (см. (22)), получаем (см. (21), (23))

$$\left\| \sum_{l=1}^n b_{lj} \bar{\chi}_l(x) \right\|_{L^1(I^2)} \leq d_2 \sqrt{j} \|g\|_{L^1(I^2)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (35)$$

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Выберем целое число M такое, что

$$\sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{d_2 \sqrt{j} \|g\|_{L^1(I^2)}}{32^j} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (36)$$

Затем, используя сходимость в метрике $L^1(I)$ рядов (26) найдем целое число N такое, что

$$\left\| \sum_{j=1}^M \sum_{l=N+1}^n b_{lj} \chi_l(x) \alpha_j(y) \right\|_{L^1(I^2)} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n > N. \quad (37)$$

При $n < N$ и $m > M$ имеем (см. (32), (35), (36), (37))

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m b_{lj} \tilde{\chi}_l(x) \alpha_j(y) - \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^M b_{lj} \tilde{\chi}_l(x) \alpha_j(y) \right\|_{L^1(I^2)} \leq \\ & \leq \left\| \sum_{j=1}^M \sum_{l=N+1}^n b_{lj} \tilde{\chi}_l(x) \alpha_j(y) \right\|_{L^1(I^2)} + \sum_{j=M+1}^{\infty} \|\alpha_j(y)\|_{L^1(I)} \left\| \sum_{l=1}^n b_{lj} \chi_l(x) \right\|_{L^1(I)} < \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{d_2 \sqrt{j} \|g\|_{L^1(I^2)}}{2^j} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Тем самым доказана сходимость рядов (14) и (15) в метрике $L^1(I^2)$. Сходимость в метрике $L^1(I^2)$ ряда (13) непосредственно следует из сходимости в $L_1(I^2)$ рядов (11), (14), (15), (16) и равенства

$$\begin{aligned} Q_l(x) Q_j(y) &= \tilde{\chi}_l(x) \bar{\chi}_l(y) - \bar{\chi}_l(x) \alpha_j(y) - \\ &- \alpha_l(x) \bar{\chi}_l(y) + \alpha_l(x) \alpha_j(y), \end{aligned} \quad (38)$$

которое следует из (5).

Расходимость п. в. ряда (13) вытекает из расходимости п. в. ряда (11) и сходимости п. в. рядов (14), (15) и (16), если иметь в виду (38).

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Используя сходимость в метрике рядов (13), (14), (15) и (16) (см. лемму 2), а также условие (2), вычислим коэффициенты Фурье a_{nm} функции $f(x, y)$ (см. (II)) по системе $\{\varphi_n(x) \varphi_m(y)\}_{n, m=1}^{\infty}$. При $k(p) < n \leq k(p+1)$ и $k(q) < m \leq k(q+1)$ имеем (см. (2), (3), (5), (11), (10), (38))

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \varphi_n(x) \varphi_m(y) dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{lj} \tilde{\chi}_l(x) \tilde{\chi}_j(y) \varphi_n(x) \varphi_m(y) dx dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{lj} \int_0^1 \int_0^1 Q_l(x) Q_j(y) \varphi_n(x) \varphi_m(y) dx dy + \\
&+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{lj} \int_0^1 \int_0^1 Q_l(x) a_j(y) \varphi_n(x) \varphi_m(y) dx dy + \\
&+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{lj} \int_0^1 \int_0^1 a_l(x) Q_j(y) \varphi_n(x) \varphi_m(y) dx dy + \\
&+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{lj} \int_0^1 \int_0^1 a_l(x) a_j(y) \varphi_n(x) \varphi_m(y) dx dy = \\
&= b_{pq} a_n a_m + \sum_{j=1}^{\infty} b_{pj} a_n c_m^{(j)} + \sum_{l=1}^{\infty} b_{lq} a_m c_n^{(l)} + \\
&+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{lj} c_n^{(l)} c_m^{(j)}. \tag{39}
\end{aligned}$$

Для доказательства теоремы 2 достаточно доказать расходимость п. в. ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[\sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} a_{nm} \varphi_n(x) \varphi_m(y) \right]. \tag{40}$$

для которого, как легко убедиться, имеем (см. (3), (39))

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[\sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} a_{nm} \varphi_n(x) \varphi_m(y) \right] = \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} b_{pq} Q_p(x) Q_q(y) + \\
&+ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[Q_p(x) \sum_{j=1}^{\infty} b_{pj} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right] + \\
&+ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[Q_q(y) \sum_{l=1}^{\infty} b_{lq} \sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)} c_n^{(l)} \varphi_n(x) \right] + \\
&+ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{lj} \sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_n^{(l)} c_m^{(j)} \varphi_n(x) \varphi_m(y) \right].
\end{aligned}$$

Итак, ряд (40) разложен на четыре ряда. Для первого из них

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} b_{pq} Q_p(x) Q_q(y)$$

имеем расходимость п. в. (см. лемму 2). Поэтому для доказательства расходимости п. в. ряда (40) достаточно доказать сходимость п. в. остальных трех рядов:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[Q_p(x) \sum_{j=1}^{\infty} b_{pj} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right], \tag{41}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left| Q_q(y) \sum_{i=1}^{\infty} b_{iq} \sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)} c_n^{(i)} \varphi_n(x) \right|, \quad (42)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_n^{(i)} c_m^{(j)} \varphi_n(x) \varphi_m(y) \right]. \quad (43)$$

Имеем (см. (12), (17))

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_n^{(i)} c_m^{(j)} \varphi_n(x) \varphi_m(y) \right\|_{L^1(I^2)} \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}| \left(\sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)} (c_n^{(i)})^2 \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} \leq \\ & < \|g\|_{L^1(I^2)} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{i} \left(\sum_{n=k(p)+1}^{k(p+1)} (c_n^{(i)})^2 \right)^{1/2} \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{j} \left(\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \|g\|_{L^1(I^2)} \frac{1}{2^q} \cdot \frac{1}{2^p}. \end{aligned}$$

Отсюда следует сходимость п. в. ряда (43).

Теперь докажем сходимость п. в. ряда (41). Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[Q_p(x) \sum_{j=1}^{\infty} b_{pj} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right] = \\ & = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left| \tilde{\chi}_p(x) \sum_{j=1}^{\infty} b_{pj} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right| - \\ & - \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[a_p(x) \sum_{j=1}^{\infty} b_{pj} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right]. \quad (44) \end{aligned}$$

Имеем также (см. (6), (12), (17))

$$\begin{aligned} & \left\| a_p(x) \sum_{j=1}^{\infty} b_{pj} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right\|_{L^1(I^2)} < \\ & \leq \|a_p(x)\|_{L^2(I)} \sum_{j=1}^{\infty} |b_{pj}| \left(\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \|g\|_{L^1(I^2)} \frac{\sqrt{p}}{(4\sqrt{2})^{p+1}} \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{j} \left(\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} \leq \\ & < \|g\|_{L^1(I^2)} \frac{\sqrt{p}}{(4\sqrt{2})^{p+1}} \cdot \frac{1}{2^q}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем сходимость п. в. ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[a_p(x) \sum_{j=1}^{\infty} b_{pj} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right].$$

Отсюда и из (44) следует, что для доказательства сходимости п. в. ряда (41) достаточно доказать сходимость п. в. ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left| \tilde{\chi}_p(x) \sum_{j=1}^{\infty} b_{pj} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right|. \quad (45)$$

Для этого достаточно доказать что в фиксированной точке $x \in A$ (см. (27)) он сходится для п. в. $y \in (0, 1)$. Итак, пусть $x_0 \in A$. Тогда существует такое число R_0 , что

$$x_0 \in A_j \text{ при } j > R_0. \quad (46)$$

Учитывая (12), для любого целого M выберем такое число $R(M)$, что

$$R(M) > R_0, \quad (47)$$

$$\sum_{q=1}^M \sum_{j=R(M)+1}^{\infty} 2^j \left(\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} < \frac{1}{2^\mu}, \quad M = 1, 2, \dots \quad (48)$$

Если через $S_{\mu, \nu}(x, y)$ обозначить частичную сумму ряда (45), то, обозначая

$$F_{\mu, \nu}(x, y, M) = \sum_{p=1}^{\mu} \sum_{q=1}^{\nu} \left[\tilde{\chi}_p(x) \sum_{j=R(M)+1}^{\infty} b_{pj} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right], \quad (49)$$

$$H_{\mu, \nu}(x, y, M) = \sum_{p=1}^{\mu} \sum_{q=1}^{\nu} \left[\tilde{\chi}_p(x) \sum_{j=R(M)}^{\infty} b_{pj} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right], \quad (50)$$

получим

$$S_{\mu, \nu}(x, y) = F_{\mu, \nu}(x, y, M) + H_{\mu, \nu}(x, y, M) = 1, 2, \dots \quad (51)$$

Преобразуя (50), имеем

$$H_{\mu, \nu}(x, y, M) = \sum_{j=1}^{R(M)} \left[\left[\sum_{p=1}^{\mu} b_{pj} \tilde{\chi}_p(x) \right] \left[\sum_{q=1}^{\nu} \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right] \right]. \quad (52)$$

Известна сходимость п. в. рядов (26) в точке $x \in A \subset G$ (см. (27)). Используя также сходимость п. в. рядов (8), получаем (см. (10), (52))

$$\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} H_{\mu, \nu}(x_0, y, M) = H(x_0, y, M) \text{ для п. в. } y \in (0, 1), \quad (53)$$

где функции $H(x_0, y, M)$, $M=1, 2, \dots$, являются п. в. конечными. С другой стороны, имеем (см. (24), (12), (46), (47), (48), (49))

$$\begin{aligned} & \left\| \max_{1 \leq \mu, \nu < \infty} |F_{\mu, \nu}(x_0, y, M)| \right\|_{L^2(I)} < \\ & \leq \left\| \max_{1 \leq \mu, \nu < \infty} \sum_{q=1}^{\nu} \sum_{j=R(M)+1}^{\infty} \left| \sum_{p=1}^{\mu} b_{pj} \tilde{\chi}_p(x_0) \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right| \right\|_{L^2(I)} \leq \\ & \leq \left\| \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j=R(M)+1}^{\infty} \max_{1 \leq \mu < \infty} \left| \sum_{p=1}^{\mu} b_{pj} \tilde{\chi}_p(x_0) \right| \sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} c_m^{(j)} \varphi_m(y) \right\|_{L^2(I)} \leq \\ & \leq \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j=R(M)+1}^{\infty} 2^j \left(\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} = \\ & = \sum_{q=1}^M \sum_{j=R(M)+1}^{\infty} 2^j \left(\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} + \\ & + \sum_{q=M+1}^{\infty} \sum_{j=R(M)+1}^{\infty} 2^j \left(\sum_{m=k(q)+1}^{k(q+1)} (c_m^{(j)})^2 \right)^{1/2} < \frac{1}{2^\mu} + \sum_{q=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^q} = \frac{1}{2^{M-1}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left\| \max_{1 \leq \mu, \nu < \infty} |F_{\mu, \nu}(x_0, y, M)| \right\|_{L^2(I)} = 0,$$

а это означает существование последовательности чисел M_n , $n=1, 2, \dots$ таких, что для п. в. $y \in (0, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 < \mu, \nu < \infty} |F_{\mu, \nu}(x_0, y, M_n)| = 0. \quad (54)$$

Отсюда получим, что на множестве полной меры $E \subset (0, 1)$ выполняются условия (53) и (54). Пусть теперь $y_0 \in E$ и $\varepsilon > 0$.

Тогда существует целое число n_0 такое, что

$$|F_{\mu, \nu}(x_0, y_0, M_n)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots \quad (55)$$

С другой стороны, из (53) следует существование такого числа T , что

$$|H_{\mu, \nu}(x_0, y_0, M_n) - H(x_0, y_0, M_n)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при } \mu, \nu \geq T. \quad (56)$$

Из (51), (52) и (56) получаем

$$|S_{\mu_1, \nu_1}(x_0, y_0) - S_{\mu_2, \nu_2}(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

при $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2 \geq T$.

Итак, доказана сходимость п. в. ряда (45) и, тем самым, сходимость п. в. ряда (41). Сходимость п. в. ряда (42) доказывается аналогичным образом. Теорема 2 доказана.

Из неё, как уже отмечалось, с учетом результата работы [2], следует теорема 1.

З а м е ч а н и е. Для полных ортонормированных систем общего вида $\{\varphi_{nm}(x, y)\}_{n, m=1}^{\infty}$, вообще говоря, теорема 1 неверна. Точнее, построим пример такой полной ортонормированной системы $\{\varphi_{nm}(x, y)\}_{n, m=1}^{\infty}$, все двойные ряды Фурье по которой сходятся п. в. и в метрике $L_1(I^2)$.

Известно, что существует измеримое отображение $\pi(x): (0, 1) \rightarrow (0, 1) \times (0, 1)$ с условиями

1) Если $x \neq y$, то $\sigma(x) \neq \sigma(y)$,

2) Если E — измеримое множество, то измеримо также $\sigma(E)$ и имеет место равенство $m_1 E = m_2 \sigma(E)$.

Пример такого отображения описывается в [4], стр. 94.

Обозначая $T_n(x, y) = \chi_n(\pi^{-1}(x, y))$, $n = 1, 2, \dots$, где $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ система Хаара, получаем полную ортонормированную в $L^1(I^2)$ систему, для которой, как легко убедиться, все ряды Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f(t, s) T_n(t, s) dt ds T_n(x, y) \quad (f \in L^1(I^2))$$

сходятся п. в. и в метрике $L^1(I^2)$. Для неё справедливо

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_2 \{T_{2k}(x, y) \neq 0\} < \infty. \quad (57)$$

Теперь определим систему $\{\varphi_{nm}(x, y)\}_{n, m=1}^{\infty}$ с помощью системы $\{T_n(x, y)\}_{n=1}^{\infty}$. Для двойных индексов $A = \{n, 1\}$; $n \neq 2^k$, $k=1, 2, \dots$ полагаем $\varphi_{n1}(x, y) = T_n(x, y)$ ($n \neq 2^k$). Для остальных же индексов

$(n, m) \in A^c$ определим каждую функцию $\Omega_{nm}(x, y) ((n, m) \in A^c)$ равной одной функции $T_{2k}(x, y)$, $k = 1, 2, \dots$, таким образом, чтобы этим осуществлялось взаимнооднозначное соответствие между семействами функций $\{\Omega_{nm}(x, y); (n, m) \in A^c\}$ и $\{T_{2k}(x, y); k = 1, 2, \dots\}$. В силу полноты системы $\{T_n(x, y)\}_{n=1}^{\infty}$, система $\{\Omega_{nm}(x, y)\}_{n, m=1}^{\infty}$ тоже станет полной в $L^1(I^2)$. Докажем, что все двойные ряды Фурье по этой системе сходятся п. в. и в метрике $L^1(I^2)$. Пусть $f(x, y) \in L^1(I^2)$ — некоторая функция. Частичную сумму двойного ряда Фурье этой функции разложим на три слагаемых следующим образом (при этом используя определение системы $\{\Omega_{nm}(x, y)\}_{n, m=1}^{\infty}$)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \int_0^1 \int_0^1 f(t, s) \Omega_{nm}(t, s) dt ds \Omega_{nm}(x, y) = \\ &= \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ n+2k}} \int_0^1 \int_0^1 f(t, s) \Omega_{n1}(t, s) dt ds \Omega_{n1}(x, y) + \\ &+ \sum_{\substack{(n, m) \in A^c \\ 1 \leq n \leq N \\ 1 \leq m \leq M}} \int_0^1 \int_0^1 f(t, s) \Omega_{nm}(t, s) dt ds \Omega_{nm}(x, y) = \\ &= \sum_{n=1}^N \int_0^1 \int_0^1 f(t, s) T_n(t, s) dt ds T_n(x, y) - \\ &- \sum_{\substack{k \geq 1 \\ 2k < N}} \int_0^1 \int_0^1 f(t, s) T_{2k}(t, s) dt ds T_{2k}(x, y) + \\ &+ \sum_{\substack{(n, m) \in A^c \\ 1 \leq n \leq N \\ 1 \leq m \leq M}} \int_0^1 \int_0^1 f(t, s) \Omega_{nm}(t, s) dt ds \Omega_{nm}(x, y). \end{aligned}$$

Во втором и третьем слагаемых участвуют только функции $T_{2k}(x, y)$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому в силу (57), они сходятся п. в. и в метрике $L^1(I^2)$ при $N, M \rightarrow \infty$. Первое слагаемое тоже сходится п. в. и в метрике $L^1(I^2)$, так как оно является частичной суммой ряда Фурье функции $f(x, y)$ по системе $\{T_n(x, y)\}_{n=1}^{\infty}$. Отсюда следует, что все двойные ряды Фурье по системе $\{\Omega_{nm}(x, y)\}_{n, m=1}^{\infty}$ сходятся п. в. и в метрике $L^1(I^2)$ (по Прингсхейму).

В заключение выражаю благодарность А. А. Талаяну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Գ. Ա. ԿԱՐԱԳՈՒԼՅԱՆ. Համ լրիվ օրթոնորմավորված համակարգերի Ֆուրյեի կրկնակի շարքերի տարամիտության մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում ապացուցվում է՝

Թեև Բ.Մ. Դիրշլեի $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ սահմանափակ ֆունկցիաներից բաղկացած լրիվ օրթոնորմավորված համակարգ է, իսկ $\lambda(t): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\lambda(0) = 0$, մոնոտոն աճող անընդհատ ֆունկցիա է, որը բավարարում է՝

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t)}{t \ln^+ t} = 0$$

պայմանին, Այդ դեպքում գոյություն ունի $\lambda(L)$ դասին պատկանող $f(x, y)$ ֆունկցիա ($\lambda(|f(x, y)|) \in L^1(I^2)$), որի Ֆուրյեի կրկնակի շարքը ըստ $\{\varphi_n(x) \varphi_m(y)\}_{n, m=1}^{\infty}$ համակարգի համարյա ամենուրեք տարամիտ է Պրինգսբեյմի մեթոդով $(0,1) \times (0,1)$ քառակուսու վրա:

Այս արդյունքը ընդհանրացնում է Հաարի $\{\chi_n(x) \chi_m(y)\}_{n, m=1}^{\infty}$ կրկնակի համակարգի համար հայտնի անալոգ բեռնմը ձևակերպված [2] աշխատանքում:

G. A. KARAGULIAN. On the divergence of Fourier double series by complete orthonormal systems (summary)

Theorem. Let $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ be a complete orthonormal system including a bounded functions, and let $\lambda(t): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\lambda(0) = 0$, be a continuous increasing uncton for whch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t)}{t \ln^+ t} = 0.$$

Then there exists a function $f(x, y)$ from the class $\lambda(L)$ ($\lambda(|f(x, y)|) \in L^1(I^2)$), whose double Fourier series by the system $\{\varphi_n(x) \varphi_m(y)\}_{n, m=1}^{\infty}$ divergens almost everywhere by method of Pringsheim:

This result generalizes analogous theorem of [2] for Haar double system $\{\chi_n(x) \chi_m(y)\}_{n, m=1}^{\infty}$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. О. П. Дзанидзе. Представление измеримых функций двух переменных двойными рядами, Сообщ. АН ГССР, 34, № 2, 1964, 277—282.
2. Т. Ш. Зерекидзе. Сходимость кратных рядов Фурье-Хаара и сильная дифференцируемость интегралов, Тр. Тбл. мат. ин-та АН ГССР, 76, 185, 88—89.
3. Б. С. Кашиш, А. А. Саакян. Ортогональные ряды, М., «Наука», 1984.
4. Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу, М., «Мир», 1979.