

УДК 517.95

Э. М. МАДУНЦ, А. Б. НЕРСЕСЯН

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, НЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛОПАТИНСКОГО

Введение

Пусть D — плоская односвязная область, Γ — её граница. Рассматривается следующая задача: найти дважды непрерывно-дифференцируемое решение эллиптической системы

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} + a(z) u_x + b(z) u_y + c(z) u = h(x, y), \quad (1)$$

принадлежащее классу $C^{1,\alpha}(\bar{D})$ и удовлетворяющее граничному условию

$$u|_{\Gamma} = f, \quad (2)$$

где $z = x + iy$, u — искомая, а f и h — заданные вещественные вектор-функции. A, B, C — вещественные постоянные матрицы; $a(z), b(z), c(z)$ — вещественные матрицы порядка n . Коэффициенты уравнения (1) и граница Γ достаточное число раз дифференцируемы.

Как известно, система (1) называется эллиптической, если $\det C \neq 0$ и уравнение

$$\det(A + 2B\lambda + C\lambda^2) = 0 \quad (3)$$

не имеет вещественных корней.

При выполнении условия Я. Б. Лопатинского, как известно [1], задача (1), (2) фредгольмова.

В случае, когда уравнение (3) имеет лишь два n -кратных корня $\lambda = \pm i$, задача (1), (2) исследована в работе Е. В. Золотаревой [2], где показано, что при отсутствии младших членов в уравнении (1), задача (1), (2) фредгольмова тогда и только тогда, когда система (1) слабо связана [3].

При нарушении условия Я. Б. Лопатинского коэффициенты $a(z), b(z), c(z)$ играют решающую роль в вопросе нормальной разрешимости задачи (1), (2). Это впервые было обнаружено в работе Н. Е. Товмасыана [4], где исследована задача (1), (2) в том случае, когда уравнение (3) имеет лишь простые корни.

В настоящей работе исследован вопрос о влиянии младших членов уравнения (1) на нормальную разрешимость задачи в общем случае, а именно, при нарушении условия Я. Б. Лопатинского и наличии у уравнения (3) корней произвольной кратности.

§ 1. Основные результаты

Наряду с уравнением (1) рассмотрим систему

$$A w_{xx} + 2B w_{xy} + C w_{yy} = 0. \quad (4)$$

Как показано в работе [5], для общего решения системы имеется следующее представление:

$$w(x, y) = \operatorname{Re} \{ \delta S^{-1} X(x, y) \}, \quad (5)$$

где

$$X(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{i}{2} \bar{z} H S \right)^k F^{(k)}(z). \quad (6)$$

Для простоты изложения, не ограничивая общности, нами рассматривается случай, когда характеристическое уравнение (3) имеет два n -кратных корня $\lambda = \pm i$.

В формулах (5) и (6), δ , S и H вполне определенные постоянные матрицы.

Введем следующие обозначения:

$$D(\lambda, z_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i} \frac{1}{2i} H S \left(1 + \frac{i}{2} \bar{z}_0^2 H S \right)^{-1} \right)^k, \quad (7)$$

$$B(z_0) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{e'} \frac{\Delta(\lambda) (a(z_0) + \lambda b(z_0))}{\lambda - i} \delta S^{-1} D(\lambda, z_0) d\lambda, \quad (8)$$

$$B_1(z_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{e'} \frac{\Delta(\lambda) c(z_0)}{\lambda - i} \delta S^{-1} D(\lambda, z_0) d\lambda, \quad (9)$$

здесь $\Delta(\lambda) = (A + 2B\lambda + C\lambda^2)^{-1}$, когда λ пробегает контур e' , охватывающий корни уравнения (3), лежащие в нижней полуплоскости, z'_0 означает производную относительно длины дуги.

Рассмотрим разложение по параметру λ следующих определителей:

$$\det(\delta\lambda - \pi i t B(t) S) = \omega_r(t) \lambda^r + \omega_{r-1}(t) \lambda^{r-1} + \dots + \omega_0(t), \quad (10)$$

$$\det(\delta\lambda + \pi i t B_1(t) M^{-1} S) = \epsilon_r(t) \lambda^r + \epsilon_{r-1}(t) \lambda^{r-1} + \dots + \epsilon_0(t), \quad (11)$$

в (11) возникает постоянная матрица M , которая определена в ходе доказательства теоремы 2.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. Пусть для системы (1) нарушено условие слабой связности, т. е. $\det \delta = 0$.

Предположим, что коэффициент $\omega_r(t)$ в (10) отличен от нуля. Тогда задача (1), (2) нетривальна и её индекс

$$\kappa = 2(n - r) - \frac{1}{\pi} [\ln \omega_r(t)]_r, \quad (12)$$

где $r = \operatorname{rank} \delta$.

Теорема 2. Пусть для системы (1) нарушено условие слабой связности и пусть

$$a(z) = b(z) = \frac{\partial a(z)}{\partial N} = \frac{\partial b(z)}{\partial N} = 0, \quad z \in \Gamma. \quad (13)$$

Предположим, что коэффициент $e_r(t)$, входящий в разложение (11), отличен от нуля. Тогда задача (1), (2) нетривиальна и её индекс

$$\kappa = 2(n - r) - \frac{1}{\pi} [\ln e_r(t)]_{\Gamma}, \quad (14)$$

где снова $r = \text{rank } \delta$.

Замечание. В условиях теоремы 1 коэффициент $c(z)$ уравнения (1) не влияет на результат. Из (13) следует, что $\omega_r = 0$ и теорема 1 в этом случае теряет силу, а из (9) и (11) заключаем, что $c(z)$ играет решающую роль.

Пусть коэффициенты системы (1) и граница области D бесконечно дифференцируемы. Тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. Если $h \in C^{a, k-2}(\bar{D})$, $f \in C^{a, k}(\Gamma)$ и коэффициенты системы (1) удовлетворяют условию Я. Б. Лопатинского, то её решение принадлежит классу $C^{a, k}(\bar{D})$.

Теорема 4. Если $h \in C^{a, k-2}(\bar{D})$, $f \in C^{a, k}(\Gamma)$ и коэффициенты системы (1) удовлетворяют условию $\omega_r(t) \neq 0$, то решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C^{a, k-1}(\bar{D})$.

Теорема 5. Если $h \in C^{a, k-2}(\bar{D})$, $f \in C^{a, k}(\Gamma)$ и коэффициенты системы (1) удовлетворяют условию $e_r(t) \neq 0$ и условию (13), то решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C^{a, k}(\bar{D})$.

§ 2. Сведение к интегральному уравнению на границе

Как показано в [4] система (1) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений Фредгольма:

$$u(x, y) = \iint_D K(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta + H(x, y) + w(x, y), \quad (15)$$

где

$$H(x, y) = \iint_D K(x, y, \xi, \eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$K(x, y, \xi, \eta) = (v(\xi - x, \eta - y) a(\xi, \eta))_{\xi} + (v(\xi - x, \eta - y) b(\xi, \eta))_{\eta} - v(\xi - x, \eta - y) c(\xi, \eta), \quad (16)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \text{Re} \int_l \Delta(\lambda) \ln(x + \lambda y) d\lambda, \quad (17)$$

l — контур, охватывающий корни уравнения (3), лежащие в верхней полуплоскости. $w(x, y)$ определено в (5).

Решение уравнения (15) можно записать так:

$$u(x, y) = w(x, y) + \iint_D \tilde{K}(x, y, \xi, \eta) w(\xi, \eta) d\xi d\eta +$$

$$+ H_1(x, y) + c^1 u_1(x, y) + \dots + c^{k_1} u_{k_1}(x, y), \quad (18)$$

где $\bar{K}(x, y, \xi, \eta)$ — обобщенная резольвента уравнения (15), c^j — произвольные действительные постоянные, $u_j(x, y)$ — полная система линейно независимых решений однородного интегрального уравнения

$$H_1(x, y) = H(x, y) + \int_D \bar{K}(x, y, \xi, \eta) H(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Для обобщенной резольвенты используем представление

$$\begin{aligned} \bar{K}(x, y, \xi, \eta) = & v_\xi(\xi - x, \eta - y) a(\xi, \eta) + v_\eta(\xi - x, \eta - y) b(\xi, \eta) + \\ & + \bar{K}_1(x, y, \xi, \eta), \end{aligned} \quad (19)$$

$\bar{K}_1(x, y, \xi, \eta)$ имеет особенность при $(x, y) = (\xi, \eta)$ не выше логарифмического порядка.

Подставим (18) в краевое условие (2), предварительно обозначив

$$f_1(z_0) = f(z_0) - H_1(z_0) - c^1 u_1(z_0) - \dots - c^{k_1} u_{k_1}(z_0),$$

$$\bar{K}_{1,1}(z_0, \xi, \eta) = \bar{K}_1(z_0, \xi, \eta) \delta S^{-1},$$

получим

$$\begin{aligned} f_1(z_0) = & \operatorname{Re} \left\{ \delta S^{-1} X(z_0) + \frac{1}{4\pi^2} \int_I \Delta(\lambda) I(z_0, \lambda) d\lambda - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4\pi^2} \int_{I'} \Delta(\lambda) I(z_0, \lambda) d\lambda + \int_D \int \bar{K}_{1,1}(z_0, \xi, \eta) X(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$I(z_0, \lambda) = \int_D \frac{a(\xi, \eta) + \lambda b(\xi, \eta)}{\theta_\lambda - z_\lambda^0} \delta S^{-1} X(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (21)$$

$$\theta_\lambda = \xi + \lambda\eta, \quad z_\lambda^0 = x_0 + \lambda y_0, \quad x_0 + iy_0 \in \Gamma.$$

Обозначим

$$K_0(z_\lambda^0, \theta_\lambda) = \ln \left(1 - \frac{\theta_\lambda}{z_\lambda^0} \right) \quad (22)$$

и для $p = 1, \dots, n-1$ определим $K_p(z_\lambda^0, \theta_\lambda)$ по формуле

$$\partial_{\theta_\lambda} K_p(z_\lambda^0, \theta_\lambda) = K_{p-1}(z_\lambda^0, \theta_\lambda). \quad (23)$$

Заметим сразу, что

$$\partial_{\theta_\lambda} K_p(z_\lambda^0, \theta_\lambda) = \frac{i + \lambda}{2i} K_{p-1}(z_\lambda^0, \theta_\lambda). \quad (24)$$

Обозначим

$$X^{(p)}(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{i}{2} \bar{\theta} H S \right)^k F^{(k+p)}(\theta). \quad (25)$$

Тогда (21) преобразуется к виду

$$I(z_0, \lambda) = \frac{1}{i - \lambda} \int_{\Gamma} (a(\theta) + \lambda b(\theta)) P(z_0, \lambda, \theta) d\theta + \\ + \frac{2i}{\lambda - i} \int_D \partial_{\bar{\theta}} (a(\theta) + \lambda b(\theta)) R(z_0, \lambda, \theta) d\bar{\xi} d\eta, \quad (26)$$

где $\theta = \xi + i\eta$,

$$P(z_0, \lambda, \theta) = \sum_{p=0}^{n-1} K_p(z_0^0, \theta_\lambda) \mathfrak{L} S^{-1} \left(\frac{1}{i - \lambda} H S \right)^p X^{(p)}(\theta), \quad (27)$$

$$R(z_0, \lambda, \theta) = \sum_{p=0}^{n-1} K_p(z_0^0, \theta_\lambda) \mathfrak{L} S^{-1} \left(\frac{2i}{\lambda - i} H S \right)^p X^{(p)}(\theta), \quad (28)$$

как и раньше здесь $\theta = \xi + i\eta$, $\theta_\lambda = \xi + \lambda\eta$.

Полагая в формуле (6) $z \in \Gamma$, дифференцированием относительно длины дуги на Γ легко показать, что

$$X^{(p)}(z) = \left(1 + \frac{i}{2} z'^2 H S \right)^{-1} \frac{d}{dz} X^{(p-1)}(z). \quad (29)$$

Теперь интегрирование по частям в (26), с учетом (24) и (29), дает

$$I(z_0, \lambda) = \frac{a(z_0) + \lambda b(z_0)}{i - \lambda} \mathfrak{L} S^{-1} D(\lambda, z_0) \int_{\Gamma} K_0(z_0^0, \theta_0) X(\theta) d\theta + \\ + \int_{\Gamma} \bar{K}_{1,3}(z_0, \lambda, \theta) X(\theta) d\theta + \int_D \bar{K}_{1,2}(z_0, \lambda, \theta) X(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (30)$$

где $\bar{K}_{1,3}$, $\bar{K}_{1,2}$, а также и первые производные $\bar{K}_{1,3}$ по z_0 и θ имеют особенность при $\theta = z_0$ не выше логарифмического порядка. Естественно интегралы с такими ядрами называть компактными. $D(\lambda, z_0)$ определено формулой (7).

Заметим теперь следующее:

$$\operatorname{Im} \lambda > 0 \Rightarrow K_0(z_0^0, \theta_\lambda) - \ln(1 - \theta/z_0) \in C^{2,\alpha}(\Gamma), \quad (31)$$

$$\operatorname{Im} \lambda < 0 \Rightarrow K_0(z_0^0, \theta_\lambda) - \ln(1 - z_0/\theta) \in C^{2,\alpha}(\Gamma). \quad (32)$$

Теперь, учитывая (30)–(32), будем иметь

$$f_1(z_0) = \operatorname{Re} \left\{ \mathfrak{L} S^{-1} X(z_0) + \tilde{A}(z_0) \int_{\Gamma} \ln \left(1 - \frac{\theta}{z_0} \right) X(\theta) d\theta + \right. \\ + B(z_0) \int_{\Delta} \ln \left(1 - \frac{z_0}{\theta} \right) X(\theta) d\theta + \int_{\Gamma} \bar{K}_{1,4}(z_0, \theta) X(\theta) d\theta + \\ \left. + \int_D \bar{K}_{1,5}(z_0, \theta) X(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\}, \quad (33)$$

где

$$\tilde{A}(z_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \frac{\Delta(\lambda) (a(z_0) + \lambda b(z_0))}{i - \lambda} \delta S^{-1} D(\lambda, z_0) d\lambda. \quad (34)$$

$B(z_0)$ определено формулой (8), интегралы с ядрами $\tilde{K}_{1,4}$ и $\tilde{K}_{1,5}$ являются компактными.

Структура (6) для $X(\theta)$ позволяет сделать преобразование

$$X(\theta) = v(\theta) + \int_{\Gamma} T(\theta, t) v(t) dt, \quad (35)$$

где $v(t)$ — граничное значение голоморфной в области D вектор-функции, ядро $T(\theta, t)$ является гладкой матрицей-функцией. Преобразование (35) обратимо:

$$v(\theta) = X(\theta) + \int_{\Gamma} T_1(\theta, t) X(t) dt. \quad (36)$$

Ядра $T(\theta, t)$ и $T_1(\theta, t)$ можно выписать в явном виде. Если обозначить

$$T_0(\theta, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\bar{\theta}^k - \bar{t}^k}{\theta - t} \right) \cdot \left(\frac{i}{2} HS \right)^k, \quad (37)$$

то ядра T и T_1 есть не что иное, как линейная комбинация ядра T_0 и её производных, откуда и следует их гладкость.

Теперь преобразуя (33) по (35) получим

$$\begin{aligned} f_1(z_0) = \operatorname{Re} \left\{ \delta S^{-1} v(z_0) + B(z_0) \int_{\Gamma} \ln \left(1 - \frac{z_0}{\theta} \right) v(\theta) d\theta + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} R(z_0, \theta) v(\theta) d\theta \right\}, \end{aligned} \quad (38)$$

здесь интеграл с ядром $R(z_0, \theta)$ компактен.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Используем представление И. Н. Векуа [6]

$$v(z) = \int_{\Gamma} \frac{t \mu(t)}{t - z} ds + id, \quad (39)$$

где $\mu(t)$ — вещественная вектор-функция на Γ , причем вещественная постоянная d и вектор-функция $\mu(t)$ однозначно определяются по $v(t)$. Для $z_0 \in \Gamma$ из (39) получаем

$$\begin{aligned} v(z_0) = \pi i z_0 \bar{z}_0 \left(\mu(z_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(t)}{t - z_0} dt \right) + \\ + \int_{\Gamma} R_1(z_0, t) \mu(t) dt. \end{aligned} \quad (40)$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \ln \left(1 - \frac{z_0}{\theta} \right) \frac{d\theta}{t - \theta} = \ln \left(1 - \frac{z_0}{t} \right),$$

при этом (38) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} f_1(z_0) = \operatorname{Re} \left\{ S^{-1} \pi i z_0 \bar{z}_0' \left(\mu(z_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(t)}{t - z_0} dt \right) + \right. \\ \left. + \pi i z_0 \bar{z}_0' B(z_0) \int_{\Gamma} \mu(t) \ln \left(1 - \frac{z_0}{t} \right) dt + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} R_2(z_0, t) \mu(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Легко убедиться в равенстве

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ a(z_0) \left(\mu(z_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(t)}{t - z_0} dt \right) \right\} = \\ = \operatorname{Re} a(z_0) \cdot \mu(z_0) + \frac{\operatorname{Im} a(z_0)}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(t)}{t - z_0} dt + \\ + \int_{\Gamma} K_1(z_0, t) \mu(t) dt, \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$K_1(z_0, t) = \frac{1}{\pi i} \bar{a}(z_0) \left(\frac{t'}{t - z_0} - \frac{\bar{t}'}{\bar{t} - \bar{z}_0} \right), \quad (43)$$

а следующее равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \beta(z_0) \int_{\Gamma} \Psi'(t) \ln \left(1 - \frac{t_0}{t} \right) dt \right\} = \frac{\beta(t_0)}{2} \int_{\Gamma} \Psi'(t) \ln \left(1 - \frac{t_0}{t} \right) dt + \\ + \frac{\bar{\beta}(t_0)}{2} \int_{\Gamma} \Psi'(t) \ln \left(1 - \frac{t}{t_0} \right) dt + \int_{\Gamma} K_2(t_0, t) \Psi(t) dt, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$K_2(t_0, t) = \bar{\beta}(t_0) \left(\frac{t'}{t - t_0} - \frac{\bar{t}'}{\bar{t} - \bar{t}_0} \right) + \frac{\beta(t_0)}{2}, \quad (45)$$

устанавливается на основе (42) и формул

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \Psi'(t) \ln \left(1 - \frac{t_0}{t} \right) dt = -\pi i \Psi(t_0) - \int_{\Gamma} \frac{\Psi(t)}{t - t_0} dt + \int_{\Gamma} \frac{\Psi(t)}{t} dt, \\ \int_{\Gamma} \Psi'(t) \ln \left(1 - \frac{t}{t_0} \right) dt = \pi i \Psi(t_0) - \int_{\Gamma} \frac{\Psi(t)}{t - t_0} dt, \end{aligned}$$

последние получаются интегрированием по частям. Теперь, отделяя вещественную часть в (41), на основе (42) и (44) мы получим

$$\begin{aligned} f_1(z_0) = \operatorname{Re} \alpha(z_0) \cdot \mu(z_0) + \frac{\operatorname{Im}(\alpha(z_0))}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(t)}{t - z_0} dt + \\ + \frac{\beta(z_0)}{2} \int_{\Gamma} \ln \left(1 - \frac{z_0}{t} \right) \mu(t) dt + \\ + \frac{\bar{\beta}(z_0)}{2} \int_{\Gamma} \ln \left(1 - \frac{t}{z_0} \right) \mu(t) dt + \int_{\Gamma} R(z_0, t) \mu(t) dt, \end{aligned} \quad (46)$$

где

$$\alpha(z_0) = \delta S^{-1} \pi i z_0 \bar{z}_0, \quad (47)$$

$$\beta(z_0) = B(z_0) \pi i z_0 \bar{z}_0. \quad (48)$$

Напомним, что δ и S — матрицы, входящие в (5), а $B(z_0)$ определено формулой (8).

Заметим, что в случае слабой связности исходной системы (1), полученная система (46) сингулярных интегральных уравнений является системой нормального типа, полная теория которых содержится в [6].

При нарушении условия слабой связности для системы (1), т. е. $\det \delta = 0$, как легко видеть, система (46) вырождается. Уравнения с такими вырождениями рассматривались в [7].

Пусть $r = \operatorname{rank} \delta$. Следуя [7], пусть $\sigma_1(t)$ — невырожденная квадратная матрица такая, что $(n - r)$ последних её столбцов являются линейно независимыми решениями линейной системы

$$\delta S^{-1} \sigma_1^{(j)} = 0 \quad (j = r + 1, \dots, n), \quad (49)$$

далее определим матрицы $\mathcal{Q}_1(t)$ и $\mathcal{Q}_2(t)$ порядка $n \times n$

$$\mathcal{Q}_1(t) = (z(t) \sigma_1^{(k)}, -t \pi i \beta(t) \sigma_1^{(j)}), \quad (50)$$

$$\mathcal{Q}_2(t) = (\bar{a}(t) \bar{\sigma}_1^{(k)}, t \pi i \bar{\beta}(t) \bar{\sigma}_1^{(j)}), \quad (51)$$

где $k = 1, \dots, r$; $j = r + 1, \dots, n$.

Легко заметить, что в этом случае

$$\det \mathcal{Q}_2(t) = \left(\frac{t}{\bar{t}} \right)^{n-1} \det \bar{\mathcal{Q}}_1(t). \quad (52)$$

Теперь, если определить матрицу σ_2 по формуле $\sigma_2 = \bar{\sigma}_1$, то при условии, что

$$\det \mathcal{Q}_1(t) \neq 0, \quad (53)$$

как показано в [7], сингулярное интегральное уравнение (46) нормально разрешимо и её индекс κ вычисляется по формуле

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{\det (\mathcal{Q}_2(t) \sigma_1(t))}{\det (\mathcal{Q}_1(t) \sigma_2(t))} \right]_{\Gamma}. \quad (54)$$

Рассмотрим следующее разложение по параметру λ определителя

$$\det (\delta_{\lambda} - \pi i t B(t) S) = \omega_r(t) \lambda^r + \omega_{r-1}(t) \lambda^{r-1} + \dots + \omega_0(t). \quad (55)$$

С другой стороны, рассмотрим разложение

$$\det (\alpha(t) \lambda - \pi i t \beta(t)) = \det (\Omega_1(t) \sigma_1^{-1}) \lambda^r + \dots + a_0(t). \quad (56)$$

Сравнение (55) с (56) дает

$$\det \Omega_1(t) = (\pi i t \bar{t})^n \cdot \det (\sigma_1 \cdot S^{-1}) \cdot \omega_r(t), \quad (57)$$

матрицы $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ те, что определены в (47) и (48), соответственно.

Теперь не представляет большого труда вычислить индекс κ по формуле (54): принимая во внимание (49), (52), $\sigma_2 = \bar{\sigma}_1$, также (57) получим формулу (12). Тем самым теорема 1 доказана.

§ 4. Доказательства теорем 2—5

Пусть теперь $z \in \Gamma$ и

$$a(z) = b(z) = \frac{\partial a(z)}{\partial N} = \frac{\partial b(z)}{\partial N} = 0.$$

Для обобщенной резольвенты $\bar{K}(x, y, \xi, \eta)$ используем представление

$$\begin{aligned} \bar{K}(x, y, \xi, \eta) &= K(x, y, \xi, \eta) + \\ &+ \iint_D K(x, y, t, \tau) K(t, \tau, \xi, \eta) dt d\tau + \bar{K}_2(x, y, \xi, \eta), \end{aligned} \quad (58)$$

где $K(x, y, \xi, \eta)$ определено по формуле (16), причем $\partial_{\xi} \bar{K}_2$ и $\partial_{\eta} \bar{K}_2$ имеют в точках $(\xi, \eta) = (x, y)$ особенность не выше логарифмического порядка. В дальнейшем такие ядра условимся называть сверхкомпактными.

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 1, получим

$$\begin{aligned} &\iint_D \bar{K}(x, y, \xi, \eta) W(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \Delta(\lambda) I_1(z_0, \lambda) d\lambda - \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \Delta(\lambda) I_1(z_0, \lambda) d\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma} R(z_0, \theta) X(\theta) d\theta \right\}, \end{aligned} \quad (59)$$

$R(z_0, \theta)$ —компактное ядро, а

$$I_1(z_0, \lambda) = \iint_D \ln(\theta_{\lambda} - z_{\lambda}^0) c(\xi, \eta) \delta S^{-1} X(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (60)$$

Обозначим

$$K_0(z_{\lambda}^0, \theta_{\lambda}) = \ln(\theta_{\lambda} - z_{\lambda}^0) \quad (61)$$

и для $p = 1, \dots, n-1$ определим $K_p(z_\lambda^0, \theta_\lambda)$ так:

$$\partial_{\theta_\lambda} K_p(z_\lambda^0, \theta_\lambda) = K_{p-1}(z_\lambda^0, \theta_\lambda). \quad (62)$$

Осуществляя в (51) переход к контурному интегралу формулой Грина, будем иметь

$$I_1(z_0, \lambda) = \frac{c(z_0)}{i - \lambda} \delta S^{-1} D(\lambda, z_0) \int_{\Gamma} K_1(z_\lambda^0, \theta_\lambda) X(\theta) d\theta + \\ + \int_{\Gamma} \tilde{R}_1(z_0, \theta) X(\theta) d\theta, \quad (63)$$

где $D(\lambda, z_0)$, как и раньше, определяется формулой (7), $\tilde{R}_1(z_0, \theta)$ — компактное ядро.

Подставляя решение системы (1), заданное формулой (18), в краевое условие, с учетом (59) — (63), получим следующее интегральное уравнение на границе

$$f_1(z_0) = \operatorname{Re} \left\{ \delta S^{-1} X(z_0) + A_1(z_0) \int_{\Gamma} K_{1,1}(z_0, \theta) X(\theta) d\theta + \right. \\ \left. + B_1(z_0) \int_{\Gamma} K_{1,2}(z_0, \theta) X(\theta) d\theta + \int_{\Gamma} \tilde{R}_1(z_0, \theta) X(\theta) d\theta \right\}, \quad (64)$$

причем $K_{1,1}(z_0, \theta)$ — первообразная от $\ln(1 - \theta/z_0)$, а $K_{1,2}(z_0, \theta)$ — первообразная от $\ln(1 - z_0/\theta)$, далее

$$A_1(z_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{\Delta(\lambda) c(z_0)}{i - \lambda} \delta S^{-1} D(\lambda, z_0) d\lambda,$$

а $B_1(z_0)$ определено формулой (9).

Преобразование искомой функции (35) преобразует (64) к виду

$$f_1(z_0) = \operatorname{Re} \left\{ \delta S^{-1} v(z_0) + \right. \\ \left. + B_1(z_0) \int_{\Gamma} K_{1,2}(z_0, \theta) v(\theta) d\theta + \int_{\Gamma} \tilde{K}_3(z_0, \theta) v(\theta) d\theta \right\}. \quad (65)$$

Напомним, что $v(z_0)$ является граничным значением голоморфной в области D вектор-функции. Пусть нарушено условие слабой связности, т. е. $\det \delta = 0$, предположим $\operatorname{rank} \delta = r$. Пусть M обозначает невырожденную матрицу такую, что $(n-r)$ последних её столбцов являются решениями алгебраической системы

$$\delta S^{-1} M^{(j)} = 0 \quad (j = r+1, \dots, n). \quad (66)$$

Применим два последовательных преобразования искомой вектор-функции уравнения (65)

$$v(t) = M \mu(t) \quad (67)$$

и далее

$$\mu_j(t) = \omega_j(t) \quad (j = 1, \dots, r), \quad (68)$$

$$\mu_j(t) = \omega_j(t) \quad (j = r+1, \dots, n).$$

Тогда для искомой вектор-функции $\omega(t)$ получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} f_1(z_0) = \operatorname{Re} \left\{ \delta S^{-1} M \omega(z_0) - \right. \\ \left. - B_1(z_0) \int_{\Gamma} \omega(\theta) \ln \left(1 - \frac{z_0}{\theta} \right) d\theta + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} \tilde{R}_1(z_0, \theta) \omega(\theta) d\theta \right\}. \end{aligned} \quad (69)$$

Это уравнение, по существу, не отличается от уравнения (38), которое нами уже исследовано.

Как и при исследовании (38) введем матрицы

$$\alpha_1(t) = \delta S^{-1} M \pi i t \bar{t}, \quad (70)$$

$$\beta_1(t) = -B_1(t) \pi i t \bar{t} \quad (71)$$

и вычислим индекс уравнения (69) по формуле (54) в терминах разложения определителя

$$\det(\delta \lambda + \pi i t B_1(t) M^{-1} S) = \varepsilon_r(t) \lambda^r + \varepsilon_{r-1}(t) \lambda^{r-1} + \dots + \varepsilon_0(t).$$

Тем самым, теорема 2 доказана.

Доказательства теорем 3—5 основаны на эквивалентности задачи (1), (2) системам сингулярных интегральных уравнений нормального типа (46) и (69) при условиях $\omega_r(t)=0$ и $\varepsilon_r(t)=0$, соответственно.

Потеря гладкости в теоремах 4 и 5 точная и легко выявляется в ходе доказательств теорем 1 и 2.

Институт математики
АН Армянской ССР,
Ереванский физический
институт

Поступила 24. VI. 1986

Է. Մ. ՄԱՌՈՒՆՑ, Չ. Բ. ՆՆԻՍԻՍՅԱՆ. Լոպատինսկու պայմանին չափադադող էլիպտիկական համապատասխանության համար Դիրիխլի խնդիրը (ամփոփում)

Ինչպես հայտնի է, Յա. Բ. Լոպատինսկու պայմանը հապետ կախված է բարձր ածանցյալների գործակիցներից, ապահովում է Դիրիխլի խնդրի նորմալ լուծելիությունը:

1966 թ. Ն. Ս. Թովմասյանի կողմից հայտնաբերվել է, որ այդ պայմանի խախտման դեպքում ցածր ածանցյալների գործակիցները որոշիչ դեր են խաղում: Դա ցույց է տրված խարակտերիստիկ հավասարման պարզ արժատների դեպքում:

Տվյալ աշխատանքում, հիմնվելով հաստատուն գործակիցներով էլիպտական համակարգի ընդհանուր լուծման նոր ներկայացման վրա, ցույց է տրված, որ այդ երևույթը տեղի ունի ընդհանուր դեպքում, երբ խարակտերիստիկ հավասարման արժատները ունեն ցանկացած պատկերվում: Ստացված նոր պայմանն ընդհանրացնում է Յա. Բ. Լոպատինսկու պայմանը, պարանկելով նաև ցածր ածանցյալների գործակիցները:

E. M. MADUNTS, A. B. NERSESIAN. *The Dirichlet problem for the elliptic systems of second order differential equations, which non satisfy the Lopatinski condition (summary)*

A condition for normal solvability of the Dirichlet problem is suggested. It imposes restrictions on the coefficients by lower derivatives and thus is more general than the Lopatinski condition.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Вольперт. Об индекс и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости, Труды ММО, т. 10, 1961, 41—89.
2. Е. В. Золотарева. Необходимые и достаточные условия фредгольмовости для некоторого класса эллиптических систем, ДАН СССР, т. 145, 1962, 724—726.
3. А. В. Бицадзе. Красивые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, 1966.
4. Н. Е. Томасян. Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка, не удовлетворяющих условию Я. Б. Лопатинского, Сиб. мат. ж., т. VII, № 4, 1966.
5. Э. М. Мадунц. Представление общего решения эллиптической системы дифференциальных уравнений, Изв. АН Арм.ССР, сер. мат., XXIII, № 4, 1988.
6. Н. И. Мухелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962.
7. Н. Е. Томасян. К теории сингулярных интегральных уравнений, Дифф. уравнения, III, № 1, 1967, 69—80.