

УДК 517.53

В. А. МАРТИРОСЯН

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ В ТЕРМИНАХ ИХ ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Настоящая работа посвящена исследованию вопросов о существовании ограниченных на угле (прямолинейном либо спиральном) нетривиальных целых функций в терминах их тейлоровских коэффициентов. Этот круг вопросов, естественно примыкающий к классическим теоремам Лиувилля и Фрагмена-Линделёфа, возник под влиянием известной работы Г. Поля [1] и в дальнейшем исследовался рядом авторов (см. [2]—[6]). Некоторые из полученных здесь результатов, относящихся к случаю, когда рассматривается ограниченность на полуоси $[0+\infty)$, имели необходимо-достаточный характер (результаты А. Макинтайра, А. Эдрея и др.). Однако для других случаев подобных окончательных результатов не имелось до недавнего времени. Так обстояло дело даже в случае ограниченности на прямолинейном угле положительного раствора, рассмотренном еще Г. Поля.

Результаты необходимо-достаточного характера о существовании ограниченных на угле (прямолинейном или спиральном) нетривиальных целых функций в терминах их тейлоровских коэффициентов (лакунарность, перемены знаков) были сформулированы в заметке [7]. В данной работе доказываются эти результаты и некоторые их обобщения и усиления. Здесь, по-видимому, впервые в указанном круге вопросов, удастся выявить в явной форме влияние аргументов тейлоровских коэффициентов.

Работа состоит из трех частей. В первой части сформулированы основные результаты; их доказательства приведены в § 3, а в § 2 доказываются необходимые в § 3 вспомогательные леммы.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность Н. У. Аракелян за обсуждение работы.

§ 1. Формулировка результатов

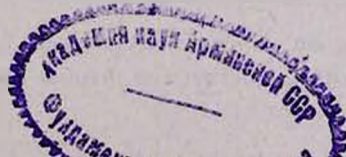
Введем сначала некоторые обозначения. Пусть N , R и C означают, соответственно, множества натуральных, вещественных и комплексных чисел. Для $a, b \in R (a \geq b)$ обозначим через $[a, b]$ и (a, b) , соответственно, замкнутый и открытый промежутки с концами a и b (при $a = b$ полагаем $(a, b) = \emptyset$).

Положим

$$D_r(a) = \{z: |z - a| < r\} \text{ для } a \in C, r > 0;$$

$$\Delta_\beta^\alpha = \{z: |\arg z - \alpha \log |z|| \leq \beta/2\} \text{ для } \alpha \in R, \beta \in [0, 2\pi);$$

$$\Pi_\alpha = \{z: \operatorname{Re} z \geq \alpha \operatorname{Im} z\}, S_\alpha = \{z: \operatorname{Re} z \geq \alpha \operatorname{Im} z + 2^{-1}\} \text{ для } \alpha \in R.$$



Обозначим также для краткости

$$D_r = D_r(0), \Delta_\beta = \Delta_\beta^*, \Pi = \Pi_\alpha, S = S_\alpha \text{ для } \alpha = 0.$$

Полуплоскость Π_α иногда будет удобно представлять в полярных координатах:

$$\Pi_\alpha = \{z : \arg z \in [\gamma - \pi/2, \gamma + \pi/2]\},$$

где γ — корень уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma = -\alpha, \gamma \in (-\pi/2, \pi/2). \quad (1)$$

Для $E \subset \mathbb{C}$ обозначим через $H(E)$ множество всех голоморфных на E функций.

Переходя к формулировке полученных результатов, приведем сперва результаты о целых функциях, определяемых лакунарными степенными рядами.

Рассмотрим произвольной степенной ряд, определяющий целую функцию

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n} = 0. \quad (2)$$

Последовательности коэффициентов этого ряда сопоставим (ср. с [8], стр. 124) мажорантную функцию ряда: наибольшую неотрицательную на $[0, +\infty)$ и выпуклую функцию $\psi(x) = \psi(x; \{f_n\})$ такую, что

$$\log^- |f_n| \leq -\psi(n) \text{ при } n = 0, 1, \dots$$

С учетом условия (2) имеем, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = +\infty. \quad (3)$$

Пусть $Q = \{q_n\}_1^\infty$ — подпоследовательность натуральных чисел, $E(Q)$ — класс всех целых функций, каждая из которых определяется степенным рядом вида (2), для которого $f_n = 0$ для всех $n \notin Q \cup \{0\}$. Обозначим также

$$Q(r) = \sum q_n^{-1} \text{ для } q_n \in (0, r], r \geq 1. \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть ψ — неотрицательная на $[0, +\infty)$ и выпуклая функция, удовлетворяющая условию (3). Для того чтобы каждая функция класса $E(Q)$, определяемая рядом (2) с

$$|f_n| = O(e^{-\psi(n)}) \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (5)$$

и ограниченная на Δ_β^* при некоторых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in [0, 2\pi)$, была константой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ Q(r) - \frac{\beta}{2\pi} \log r - \frac{1 + \alpha^2}{2r} \psi(r) \right\} = -\infty. \quad (6)$$

Выделим несколько прозрачных случаев теоремы 1 (см. [7]).

Следствие 1.1. Для того чтобы каждая функция класса $E(Q)$, ограниченная на Δ_β^* при некоторых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in [0, 2\pi)$, была константой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ Q(r) - \frac{\beta}{2\pi} \log r \right\} < +\infty. \quad (7)$$

Следствие 1.2. Для того чтобы каждая функция класса $E(Q)$ конечного порядка $\leq \rho$, ограниченная на Δ_β при некоторых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in [0, 2\pi)$, была константой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{Q(r)}{\log r} < \frac{\beta}{2\pi} + \frac{1+\alpha^2}{2\rho}. \quad (8)$$

Для числа $\rho \in (0, +\infty)$ целую функцию f отнесем к классу E^ρ , если:

$$\log |f(z)| = O(|z|^\rho) \text{ при } |z| \rightarrow +\infty.$$

Следствие 1.3. Для того чтобы каждая функция класса $E(Q) \cap E^\rho$, ограниченная на Δ_β при некоторых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in [0, 2\pi)$, была константой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ Q(r) - \left(\frac{\beta}{2\pi} + \frac{1+\alpha^2}{2\rho} \right) \log r \right\} = -\infty.$$

Теорема 1 и ее следствия обобщают и усиливают ряд предшествовавших им результатов. Частным случаем следствия 1.1, когда $\alpha = \beta = 0$ и, значит, $\Delta_\beta = [0, +\infty)$, является известный результат А. Макинтайра [2]. Для более общего случая этого же следствия, когда лишь $\alpha = 0$, необходимость условия (7) установлена в работе Дж. Андерсона [5]; там же предложено достаточное условие, получающееся заменой в условии (7) нижнего предела на верхний предел. Частным случаем следствия 1.2, когда $\alpha = \beta = 0$, является результат А. Эдрея [4]. Достаточность следствия 1.3 в случае, когда $\alpha = 0$, установлена М. М. Джрбашяном ([3], стр. 510, теорема 7). Отметим еще, что частный случай теоремы 1, когда $\alpha = \beta = 0$, установлен в работе [6] Дж. Андерсона и К. Бинмора.

Теорема 1 в части достаточности, когда $\alpha = 0$, допускает существенное усиление за счет использования более тонкой, чем лакуарность, характеристики для тейлоровских коэффициентов целой функции. Для степенного ряда (2) положим $f_n = |f_n| e^{i\omega_n}$ для $n = 0, 1, \dots$, где $|\omega_{n+1} - \omega_n| \leq \pi$, и обозначим

$$N(r) = \sum_{n \leq r} \frac{|\omega_{n+1} - \omega_n|}{\pi n} \text{ для } n \in (0, r], r \geq 1. \quad (9)$$

Теорема 2. Пусть ψ — неотрицательная на $[0, +\infty)$ и выпуклая функция, удовлетворяющая условию (3). Тогда произвольная целая функция, ограниченная на Δ_β при некотором $\beta \in [0, 2\pi)$ и определяемая рядом (2), удовлетворяющим оценке (5) и условию

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ N(r) - \frac{\beta}{2\pi} \log r - \frac{1}{2r} \psi(r) \right\} = -\infty, \quad (10)$$

будет константой.

Следствие 2.1. Пусть целая функция ограничена на Δ_β при некотором $\beta \in [0, 2\pi)$ и определяется рядом (2), удовлетворяющим условию

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ N(r) - \frac{\beta}{2\pi} \log r \right\} < +\infty. \quad (11)$$

Тогда она будет константой.

Следствие 2.2. Пусть целая функция конечного порядка $\leq \rho$ ограничена на Δ_ρ при некотором $\beta \in [0, 2\pi)$ и определяется рядом (2), удовлетворяющим условию

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{\log r} < \frac{\beta}{2\pi} + \frac{1}{2\rho}. \quad (12)$$

Тогда она будет константой.

Следствие 2.3. Пусть целая функция класса E^ρ ограничена на Δ_ρ при некотором $\beta \in [0, 2\pi)$ и определяется рядом (2), удовлетворяющим условию

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ N(r) - \left(\frac{\beta}{2\pi} + \frac{1}{2\rho} \right) \log r \right\} = -\infty. \quad (13)$$

Тогда она будет константой.

Из теоремы 2 видно, что аргументы ω_n целесообразно выбрать таким образом, чтобы суммы вида (9) имели по возможности минимальное значение. Следующий индуктивный выбор последовательности $\{\omega_n\}_n^\infty$ обеспечивает такую минимальность. Положим $\omega_{-1} = 0$. Если $f_{n+1} = 0$, то полагаем $\omega_{n+1} = \omega_n$; если же $f_{n+1} \neq 0$, то ω_{n+1} — значение $\arg f_{n+1}$ из полуинтервала $[-\pi + \omega_n, \pi + \omega_n)$.

Для фиксированных таким образом аргументов ω_n сумма (9) зависит лишь от тех ω_n , для которых $f_n \neq 0$. Запишем ряд (2) в виде

$$f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_{q_n} z^{q_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f_{q_n}|^{1/q_n} = 0,$$

где все $f_{q_n} \neq 0$. Тогда вместо (9) величину $N(r)$ можно определить формулой

$$N(r) = \sum \frac{1}{\pi q_n} |\omega_{q_{n+1}} - \omega_{q_n}| = \sum \frac{1}{\pi q_n} \left| \arg \left(\frac{f_{q_n}}{f_{q_{n+1}}} \right) \right|, \quad q_n \in (0, r], \quad r \geq 1,$$

где значение аргумента $\arg$ выбирается из промежутка $[-\pi, \pi)$. Теперь уже очевидно, что теорема 2 и ее следствия 2.1—2.3 соответственно усиливают теорему 1 и следствия 1.1—1.3 в части достаточности, когда $\alpha = 0$.

Из теоремы 2 (при указанном способе выбора аргументов ω_n) выводятся также результаты о существовании нетривиальных целых функций, определяемых вещественными степенными рядами, т. е. рядами вида (2) с коэффициентами $\{f_n\}_n^\infty \subset \mathbb{R}$.

Последовательность $\{\nu_n\}_1^\infty \subset \mathbb{N}$ назовем *последовательностью мест перемен знака* вещественного степенного ряда (2), если

$$f_{\mu_n} \cdot f_{\nu_n} < 0 \quad \text{при } n = 1, 2, \dots,$$

где μ_n — наибольший из тех индексов $\lambda \in (0, \nu_n)$, для которых $f_\lambda \neq 0$. Функцию, соответствующую по формуле (4) последовательности $\{\nu_n\}_1^\infty$ мест перемен знака вещественного ряда (2), будем обозначать через $Q^*(r)$.

Теорема 3. Пусть ψ — неотрицательная на $[0, +\infty)$ и выпуклая функция, удовлетворяющая условию (3). Для того чтобы каждая целая функция, ограниченная на Δ_β при некотором $\beta \in [0, 2\pi)$ и определяемая вещественным рядом (2), удовлетворяющим оценке (5) и имеющим наперед заданную последовательность $\{v_n\}_1^\infty$ мест перемен знака, была константой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (10) с заменой $N(r)$ на $Q^*(r)$.

Приведем несколько наглядных следствий теоремы 3 (см. [7]).

Следствие 3.1. Для того чтобы каждая целая функция, определяемая вещественным рядом (2) с наперед заданной последовательностью $\{v_n\}_1^\infty$ мест перемен знака и ограниченная на Δ_β при некотором $\beta \in [0, 2\pi)$, была константой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (11) с заменой $N(r)$ на $Q^*(r)$.

Следствие 3.2. Для того чтобы каждая целая функция конечного порядка $\leq \rho$, определяемая вещественным рядом (2) с наперед заданной последовательностью $\{v_n\}_1^\infty$ мест перемен знака и ограниченная на Δ при некотором $\beta \in [0, 2\pi)$, была константой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (12) с заменой $N(r)$ на $Q^*(r)$.

Следствие 3.3. Для того чтобы каждая целая функция класса E^p , определяемая вещественным рядом (2) с наперед заданной последовательностью $\{v_n\}_1^\infty$ мест перемен знака и ограниченная на Δ_β при некотором $\beta \in [0, 2\pi)$, была константой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (13) с заменой $N(r)$ на $Q^*(r)$.

Отметим, что частный случай следствий 3.1 и 3.2, когда $\beta = 0$, установлен А. Эдреем [4].

§ 2. Вспомогательные леммы

Ниже и в дальнейшем мы используем общепринятые теоретико-множественные обозначения. В частности, для множества $e \in \mathbb{C}$ его граница, замыкание, внутренность и дополнение, соответственно, будут обозначаться через ∂e , e , e^0 и $e^c (\mathbb{C} \setminus e)$.

Укажем здесь же необходимые нам свойства выпуклых функций (см., напр., [9], стр. 205). Пусть $t \rightarrow \psi(t)$ — выпуклая функция на $[0, +\infty)$. Она непрерывна на $(0, +\infty)$ и полунепрерывна сверху на $[0, +\infty)$, в каждой точке из $(0, +\infty)$ существуют конечные левая и правая производные ψ'_- и ψ'_+ , являющиеся неубывающими функциями, причем $\psi'_- \leq \psi'_+$ и для любых $t_2 > t_1 > 0$ выполняются неравенства

$$\psi'_+(t_1) \leq \frac{\psi(t_2) - \psi(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \psi'_-(t_2). \quad (14)$$

Из (14) легко следует, что $t \rightarrow t^{-1}[\psi(t) - \psi(0)]$ — неубывающая функция на $(0, +\infty)$, причем

$$t^{-1}[\psi(t) - \psi(0)] \leq \psi'_-(t) \text{ для } t > 0.$$

Лемма 1. Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \quad (15)$$

определяет целую функцию, ограниченную на Δ_β^* при некоторых $z \in \mathbb{R}$ и $\beta \in [0, 2\pi)$, то существует функция $\varphi \in H(\Pi_\alpha^0)$, удовлетворяющая условиям

$$\varphi(n) = (-1)^n f_n \text{ при } n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

и оценке

$$|\varphi(z)| \leq C(x - ay) \exp \left\{ \left(\pi - \frac{\beta}{2} \right) |y| - \psi(x - ay) \right\} \text{ для } z = x + iy \in S_\alpha, \quad (17)$$

где ψ — мажорантная функция ряда (15), а константа $C > 0$ не зависит от z .

Доказательство. Для $\theta \in [-\pi, \pi]$ и $r \geq 0$ рассмотрим кривую $\gamma_r = \gamma_{r, \theta}$ (дугу логарифмической α -спирали), заданную уравнением

$$\zeta = t \exp(i\alpha \log t + i\theta), \quad t \in [r, +\infty), \quad (18)$$

и пусть $\gamma_r^- = \gamma_{r, \theta}^-$ — кривая, противоположно ориентированная с $\gamma_r = \gamma_{r, \theta}$.

Зафиксируем кривую $\gamma_r = \gamma_{r, \pi}$, задаваемую уравнением (18) при $\theta = \pi$, и рассмотрим область $\Omega_r = (\gamma_r \cup \bar{D}_r)^c$. Пусть Γ_r означает отрицательно ориентированную границу Ω_r .

В предположениях леммы степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n \zeta^n \quad (19)$$

определяет целую функцию f , удовлетворяющую неравенству

$$|f(\zeta)| \leq M \text{ для } \zeta \in \Delta_\beta^*(\pi), \quad (20)$$

где $M > 0$ — некоторая константа, $\Delta_\beta^*(\pi) = \{\zeta: |\arg \zeta - \pi - \alpha \log |\zeta|| \leq \beta/2\}$.

Пусть $\zeta \rightarrow \log \zeta = \log |\zeta| + i \arg \zeta$ — такая однозначная ветвь логарифма в Ω_0 , что

$$-\pi < \arg \zeta - \alpha \log |\zeta| < \pi,$$

с непрерывным продолжением на $\gamma_0 \setminus \{0\}$ сверху и снизу. Полагая

$$\zeta^w = \exp(w \log \zeta) \text{ для } w \in \mathbb{C},$$

определим искомую функцию φ формулой

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \zeta^{-z-1} f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \Pi_\alpha^0. \quad (21)$$

Отметим сперва, что интеграл (21) не зависит от $r (> 0)$ ввиду голоморфности подынтегральной функции по $\zeta \in \Omega_0$. Его локально равномерная по $z \in \Pi_\alpha^0$ сходимостъ обеспечивается выполнением (20) для $\zeta \in \gamma_0 \subset \Delta_\beta^*(\pi)$. Итак, функция $\varphi \in H(\Pi_\alpha^0)$. Далее, для натуральных значений z интеграл в (21) превращается в формулу Коши для коэффициентов степенного ряда (19), так что условия (16) выполняются.

Для оценки функции φ на полуплоскости S_α нам необходимо подходящим образом деформировать контур Γ_r в (21). С этой целью рассмотрим область $D_r^\beta = D_r \cup (\Delta_\beta^*(\pi))^0$. Пусть Γ_r^β — положительно ориен-

тированная граница D_r^β . Для фиксированной точки $z \in \Pi_\alpha^0$ подынтегральная функция в (21) голоморфна по ζ в области $D_r^\beta \cap \Omega_{r/2}$, непрерывно продолжается на ее границу, состоящую из Γ_r^β и $\Gamma_{r/2}$, и с учетом (20) достаточно быстро убывает к нулю при $\zeta \rightarrow \infty$. Применение интегральной теоремы Коши позволяет поэтому заменить в (21) контур интегрирования Γ_r через Γ_r^β .

Заметив, что $\Gamma_r^\beta = \gamma_r \cup \gamma_{r/2}^- \cup l_r^\beta$, где $\theta = \pi - \beta/2$, $l_r^\beta = \partial D_r \setminus (\Delta_\beta(\pi))^0$ с индуцированной из Γ_r^β ориентацией, представим интеграл из (21) в виде суммы интегралов I_1 , I_2 и I_3 , соответственно, по трем указанным кривым. Полагая $z \in S_\alpha$ ($z = x + iy$, $x - ay \geq 2^{-1}$), $c = \sqrt{1 + \alpha^2}$ и учитывая (18) и (20), при произвольном $r > 0$ имеем

$$|I_1| + |I_2| \leq c M e^{(\pi - \beta/2) |y|} \int_r^{+\infty} t^{\alpha y - x - 1} dt \leq 2 c M e^{(\pi - \beta/2) |y|} r^{\alpha y - x}.$$

Следовательно, приходим к оценке: для $z \in S_\alpha$ и при любом $r > 0$

$$|\varphi(z)| \leq 2 c M e^{(\pi - \beta/2) |y|} r^{\alpha y - x} + |I_3| \quad (22)$$

Обратимся к оценке интеграла I_3 . Учитывая (21), почленным интегрированием ряда (19) на l_r^β получим, что для $z \in \mathbb{C}$ и при произвольном $r > 0$

$$I_3 = \pi^{-1} r^{-z(1+i\alpha)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n r^{n(1+i\alpha)} \frac{\sin[(\pi - \beta/2)(n-z)]}{n-z}.$$

Отсюда, с учетом оценки

$$\left| \frac{\sin[(\pi - \beta/2)w]}{w} \right| \leq C_\beta \frac{\exp[(\pi - \beta/2)|\operatorname{Im} w|]}{1 + |w|}, \quad w \in \mathbb{C},$$

и неравенств $|f_n| \leq e^{-\psi(n)}$ при $n \geq n_0$, для $z \in \mathbb{C}$ ($z = x + iy$) и при любом $r > 0$ имеем

$$|I_3| \leq \pi^{-1} C_\beta e^{(\pi - \beta/2) |y|} \cdot \Sigma_1, \quad (23)$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\psi(n)} r^{n(1+i\alpha)} \frac{1}{1 + |x - n|}.$$

Нам необходимо оценить сумму Σ_1 для $z \in S_\alpha$ при подходящем выборе величины $r > 0$ в зависимости от z . С этой целью для каждого $z \in S_\alpha$ выберем $r = r_z > 0$, удовлетворяющим условию

$$\log r_z = \psi_-(x - ay) - \frac{1}{x - ay + 1}.$$

Докажем теперь оценку

$$\Sigma_1 \leq C_1 (x - ay) \exp(-\psi(x - ay)) \quad \text{для } z \in S_\alpha, \quad r = r_z, \quad (24)$$

где константа $C_1 > 0$ не зависит от z . В самом деле, легко видеть, что функция $t \rightarrow -\psi(t) + (t + ay - x) \log r_z + \log(t + 1)$ достигает на $[0, +\infty)$ своего максимума в точке $t = x - ay$. Следовательно, имеем

$$\sum_1 \leq e^{-\psi(x-y) + \log(x-y+1)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(1+|x-n|)},$$

откуда вытекает (24).

Таким образом, сравнивая (23) и (24), получим

$$|I_3| \leq C_2 (x - \alpha y) \exp \{ (\pi - \beta/2) |y| - \psi(x - \alpha y) \} \text{ для } z \in S_\alpha, r = r_z, \quad (25)$$

где константа $C_2 > 0$ не зависит от z .

Аналогичная (25) оценка при указанном выше выборе величины $r = r_z$ выполняется также для первого слагаемого из (22), если с учетом (14) заметить, что

$$r_z^{\alpha y - x} \leq e^{(\alpha y - x) \psi_-(x - \alpha y) + 1} \leq e^{-\psi(x - \alpha y) + \psi(0) + 1}, \quad z \in S_\alpha.$$

Следовательно, положив в правой части (22) $r = r_z$, с учетом (25), получим требуемую оценку (17). Лемма доказана.

Частным обращением леммы 1 является следующая

Лемма 2. Если при некоторых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in [0, 2\pi)$ функция $\varphi \in H(\Pi_\alpha)$ удовлетворяет оценке

$$|\varphi(z)| \leq C \exp \left\{ \left(\pi - \frac{\beta}{2} \right) |y| - \psi(x - \alpha y) \right\} \text{ для } z = x + iy \in \Pi_\alpha, \quad (26)$$

где ψ — неотрицательная на $[0, +\infty)$ функция, удовлетворяющая условию (3), а константа $C > 0$ не зависит от z , то ряд вида (15) с

$$f_n = \frac{(-1)^n}{(1+n)^2} \varphi(n) \text{ при } n = 1, 2, \dots \quad (27)$$

определяет целую функцию, ограниченную на Δ_α^+ .

Доказательство. Из (27) и оценки (26) при $y=0$ с учетом условия (3) следует, что $|f_n|^{1/n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так что степенной ряд (15) определяет целую функцию f . Ее ограниченность на Δ_α^+ усматривается из одного интегрального представления рядов вида (15), систематически использовавшемся Э. Линделефом (см. [10]).

Пусть L означает положительно ориентированную границу полуплоскости Π_α . Для натуральных m положим

$$G_m = \Pi_\alpha \cap D_{m+0.5}, \quad \gamma_m = \partial G_m \cap \partial D_{m+0.5},$$

ориентировав γ_m положительно относительно G_m .

Докажем, что ряд (15) представляется формулой

$$f(z) = f_0 + \int_L \frac{\varphi(\zeta) (-z)^z d\zeta}{(1+\zeta)^2 (e^{2\pi i \zeta} - 1)} \text{ для } z \in \Delta_\alpha^+ \setminus \{0\}. \quad (28)$$

Предварительно нам необходимо оценить рост подынтегральной функции $g(\zeta, z)$ в (28) не только при $\zeta \in L$, но и из Π_α . С этой целью положим $\zeta = \xi + i\eta = te^{i\theta}$ и заметим сначала, что для $z \in \Delta_\alpha^+ \setminus \{0\}$ и $\zeta \in \Pi_\alpha$ имеем

$$|(-z)^\zeta| \leq \exp \{ (\xi - \alpha\eta) \log |z| + |\tau(z)| |\eta| - \pi\eta \}, \quad (29)$$

где $\tau(z) = \arg z - \alpha \log |z|$, а $\arg z$ — непрерывная ветвь аргумента в Δ_β^α такая, что $\arg 1 = 0$.

Выберем теперь константу $\rho \in (0, 2^{-1})$ так, чтобы $D_\rho(n) \subset \Pi_\alpha^0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и найдем для нее такую константу $b > 0$, что

$$|e^{2\pi i \tau} - 1| > b^{-1} \exp(\pi |\eta| - \pi \eta), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} D_\rho(n). \quad (30)$$

Из (26), (19) и (30) получим необходимую оценку

$$|g(\zeta, z)| \leq \frac{bC}{|1 + \zeta|^2} \exp((\xi - \alpha\eta) \log |z| - \psi(\xi - \alpha\eta) + d(z)|\eta|), \quad (31)$$

где

$$\zeta \in \Pi_\alpha \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_\rho(n), \quad z \in \Delta_\beta^\alpha \setminus \{0\}, \quad d(z) = |\tau(z)| - \beta/2 \leq 0.$$

Поскольку $\xi = \alpha \eta$, для $\zeta \in L$, мы из (31) получим оценку

$$|g(\zeta, z)| \leq \frac{C_1}{|1 + \zeta|^2} \quad \text{для } \zeta \in L, \quad z \in \Delta_\beta^\alpha \setminus \{0\},$$

где C_1 — константа, откуда очевидно следует сходимость и ограниченность на $\Delta_\beta^\alpha \setminus \{0\}$ интеграла в (28). Чтобы вычислить этот интеграл зафиксируем $z \in \Delta_\beta^\alpha \setminus \{0\}$ и заметим, что оценка (31) с учетом (3) влечет условие

$$\int_m g(\zeta, z) d\zeta \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, применяя к функции $g(\zeta, z)$ и области G_m теорему о вычетах с последующим предельным переходом при $m \rightarrow +\infty$, получим формулу (28). Лемма полностью доказана.

Отметим, что упрощенные варианты лемм 1 и 2, когда влияние мажорантной функции ψ не учитывалось, были приведены в [7]. Эти леммы, представляя самостоятельный интерес, позволяют (см. ниже § 3) свести некоторые вопросы о существовании ограниченных на Δ_β^α нетривиальных целых функций к вопросам существования функций $\varphi \in H(\Pi_\alpha^0)$, интерполирующих на $\mathbb{N}$ коэффициенты их рядов (2). Толчком к их установлению послужила работа Н. У. Аракеяна [11], в которой подобная интерполяция целыми функциями успешно применена к решению некоторых классических проблем об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов.

§ 3. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Достаточность. Пусть $f \in E(Q)$ ограничена на Δ_β^α и определяется рядом (2), удовлетворяющим оценке (5). Докажем, что $f \equiv \text{const}$ при выполнении условия (6).

Предположим, что $f \not\equiv \text{const}$. Построим соответствующую ряду (2) по лемме 1 функцию $\varphi = \varphi_f$. Поскольку $f \not\equiv \text{const}$, то $\varphi \not\equiv 0$ на S_α . Применим к функции φ и полуплоскости S_α формулу Т. Карлемана

(см. [12], стр. 291). Обозначив через $\{p_n\}_1^\infty$ подпоследовательность, дополняющую к $\{q_n\}_1^\infty$ относительно всех натуральных чисел, и выбрав γ удовлетворяющим (1), из этой формулы с учетом (16) будем иметь

$$\cos \gamma \cdot \sum_{p_n \in I} (p_n - 2^{-1})^{-1} \leq \frac{1}{2\pi} \int_1^r (t^{-2} - r^{-2}) \log |\varphi(-ite^{i\gamma} + 2^{-1}) \varphi(ite^{i\gamma} + 2^{-1})| dt + \frac{1}{\pi r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log |\varphi(re^{i(\theta+\gamma)} + 2^{-1})| \cos \theta d\theta + B_1(r), \quad (32)$$

где $I = (0, r + 2^{-1})$ и $B_1(r) = O(1)$ при $r \rightarrow +\infty$.

Заметим сперва, что для последовательности $\{q_n\}_1^\infty \subset \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{p_n \in I} (p_n - 2^{-1})^{-1} = \log r - Q(r) + O(1) \text{ при } r \rightarrow +\infty. \quad (33)$$

Далее, с помощью оценки (17) легко оцениваются интегралы справа в (32): они, соответственно, не превосходят величин $(1 - \beta/2\pi) \cos \gamma \log r + B_2(r)$,

$$- \frac{1}{\pi r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \psi(\sqrt{1+\alpha^2} r \cos \theta + 2^{-1}) \cos \theta d\theta + B_3(r), \quad (34)$$

где $B_i(r) = O(1)$ при $r \rightarrow +\infty$, $i = 2, 3$.

Однако, с учетом (14) функция $t \rightarrow t^{-1} [\psi(t) - \psi(0)]$ не убывает на $(0, +\infty)$, так что, используя это и применяя неравенство Йенсена (см. [13], часть 1, отдел 2, глава 2, № 75), будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \psi(\sqrt{1+\alpha^2} r \cos \theta + 2^{-1}) \cos \theta d\theta &\geq \sqrt{1+\alpha^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \psi\left(r \cos \theta + \frac{1}{2\sqrt{1+\alpha^2}}\right) \cos \theta d\theta + 2(1 - \sqrt{1+\alpha^2}) \psi(0) \geq \\ &> 2\sqrt{1+\alpha^2} \psi\left(\frac{\pi}{4} r + \frac{1}{2\sqrt{1+\alpha^2}}\right) + 2(1 - \sqrt{1+\alpha^2}) \psi(0). \end{aligned} \quad (35)$$

Следовательно, из (32), разделив обе его части на $\cos \gamma = 1/\sqrt{1+\alpha^2}$, с учетом (33) — (35), получим оценку

$$Q(r) - \frac{\beta}{2\pi} \log r - \frac{2(1+\alpha^2)}{\pi r} \psi\left(\frac{\pi}{4} r + \frac{1}{2\sqrt{1+\alpha^2}}\right) \geq O(1) \text{ при } r \rightarrow +\infty.$$

Из приведенной оценки, заменяя в ней r через $\frac{4}{\pi}r - \frac{2}{\pi\sqrt{1+\alpha^2}}$ и учитывая, что

$$Q\left(\frac{4}{\pi}r - \frac{2}{\pi\sqrt{1+\alpha^2}}\right) - Q(r) = O(1) \text{ при } r \rightarrow +\infty,$$

окончательно найдем

$$Q(r) - \frac{\beta}{2\pi} \log r - \frac{1+\alpha^2}{2r} \psi(r) \geq O(1) \text{ при } r \rightarrow +\infty. \quad (36)$$

Таким образом, наше предположение о том, что $f \neq \text{const}$, приводит к оценке (36) и остается отметить, что последняя представляет собой отрицание условия (6). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть последовательность $\{q_n\}_1^\infty$ не удовлетворяет условию (6) и, значит, дополнительная к ней относительно N последовательность $\{p_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ P(r) - \left(1 - \frac{\beta}{2\pi}\right) \log r + \frac{1+\alpha^2}{2r} \psi(r) \right\} < +\infty, \quad (37)$$

где функция $P(r)$ соответствует последовательности $\{p_n\}_1^\infty$ по формуле (4).

Построим нетривиальную и ограниченную на Δ_β^* функцию класса $E(Q)$, для которой коэффициенты определяющего ее ряда (2) удовлетворяют оценке (5).

В силу леммы 2 достаточно построить функцию $\varphi \in H(\Pi_\alpha)$ удовлетворяющую оценке (26) и такую, что

$$\varphi(p_n) = 0, \quad \varphi(q_n) \neq 0 \text{ при } n = 1, 2, \dots \quad (38)$$

С этой целью зафиксируем $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ и рассмотрим функцию

$$h_\gamma(\zeta) = \prod_{n=1}^\infty \frac{p_n - \zeta e^{i\gamma}}{p_n + \zeta e^{i\gamma}} \exp\left(\frac{2\zeta}{p_n} \cos \gamma\right).$$

Как отношение двух канонических произведений рода один функция $h_\gamma \in H(\Pi)$ и обращается в нуль только в точках $p_n e^{-i\gamma}$, $n = 1, 2, \dots$. Кроме того, рассуждая аналогично (см. [14], стр. 159) известному случаю, когда $\gamma = 0$, для h_γ получаем оценку

$$|h_\gamma(\zeta)| \leq \exp\{2 \cos \gamma P(|\zeta|) \operatorname{Re} \zeta + C_1 \operatorname{Re} \zeta\} \text{ для } \zeta \in \Pi, \quad (39)$$

где C_1 — некоторая константа.

Выберем теперь параметр γ удовлетворяющим (1) и пусть $\zeta \rightarrow \log(1+\zeta) = \log|1+\zeta| + i \arg(1+\zeta)$ — такая однозначная на Π ветвь логарифма, что $\arg 1 = 0$. Определим искомую функцию φ следующим образом:

$$\varphi(z) = h_\gamma(z e^{-i\gamma}) \exp\{-2(1 - \beta/2\pi) \cos \gamma z e^{-i\gamma} \log(1 + z e^{-i\gamma})\} \text{ для } z \in \Pi_\alpha.$$

Из определения φ с учетом (1) очевидно, что $\varphi \in H(\Pi_\alpha)$ и удовлетворяет условиям (38). Чтобы доказать для φ оценку (26), заметим, что из (39) с учетом (1) следует оценка

$|\varphi(z)| \leq \exp \{(\pi - \beta/2)|y| + \varepsilon(|z|)(x - ay)\}$ для $z = x + iy \in \Pi_\alpha$, (40)
где

$$\varepsilon(r) = 2[P(r) - (1 - \beta/2\pi) \log r] \cos^2 \gamma + O(1) \text{ при } r \rightarrow +\infty.$$

Однако, заменяя в условии (37) r через $r\sqrt{1+\alpha^2}$ и учитывая, что $P(r\sqrt{1+\alpha^2}) - P(r) = O(1)$ при $r \rightarrow +\infty$, будем иметь

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \left\{ P(r) - (1 - \beta/2\pi) \log r + \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{2r} \psi(r\sqrt{1+\alpha^2}) \right\} < +\infty.$$

Следовательно, из (40) получим оценку

$$|\varphi(z)| \leq C_2 \exp \left\{ (\pi - \beta/2)|y| - \frac{\psi(|z|\sqrt{1+\alpha^2})}{|z|\sqrt{1+\alpha^2}} (x - ay) \right\} \text{ для } z \in \Pi_\alpha,$$

где $C_2 > 0$ — некоторая константа, и остается отметить, что она влечет оценку (26), поскольку $x - ay \leq |z|\sqrt{1+\alpha^2}$ и функция $t \rightarrow t^{-1} [\psi(t) - \psi(0)]$ не убывает на $(0, +\infty)$. Необходимость доказана.

Доказательство следствия 1.1. Легко видеть, что условие (7) равносильно выполнению (6) для любой неотрицательной на $[0, +\infty)$ функции ψ , для которой справедливо (3) и $t^{-1} [\psi(t) - \psi(0)]$ не убывает на $(0, \infty)$. Следовательно, достаточность следствия 1.1 вытекает из достаточности теоремы 1, примененной к произвольной ограниченной на Δ_β^α функции класса $E(Q)$ и мажорантной функции ψ определяющего ее ряда (2), а ее необходимость доказывается аналогично доказательству необходимости теоремы 1.

Доказательство следствия 1.2. Легко видеть, что условие (8) равносильно существованию такого числа $\varepsilon_0 > 0$, что условие (6) удовлетворяется для функции вида $\psi(t) = (\rho + \varepsilon_0)^{-1} t \log t$, $t \geq 1$. Следовательно, учитывая, что для произвольной целой функции конечного порядка $\geq \rho$ коэффициенты определяющего ее ряда (2) при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ удовлетворяют оценке

$$|f_n| = O \left(\exp \left(-\frac{n \log n}{\rho + \varepsilon} \right) \right) \text{ при } n \rightarrow +\infty, \quad (41)$$

можем заключить, что из достаточности теоремы 1, примененной для функции ψ указанного выше вида с надлежаще выбранным $\varepsilon_0 > 0$, вытекает достаточность следствия 1.2.

Чтобы доказать необходимость следствия 1.2, отметим, что отрицание условия (8) означает, что при любом $\varepsilon > 0$ не удовлетворяется условие (6) для функции вида $\psi(t) = (\rho + \varepsilon)^{-1} t \log t$, $t \geq 1$. Следовательно, в этом случае функция, построенная при доказательстве необходимости теоремы 1, будет ограниченной на Δ_β^α и нетривиальной функцией класса $E(Q)$, а коэффициенты определяющего ее ряда (2) при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ удовлетворяют оценке (41). Теперь остается отметить, что из (41) с учетом произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что порядок указанной функции не превосходит ρ .

Доказательство следствия 1.3. Принадлежность функции классу E^ρ в терминах коэффициентов определяющего ее ряда (2) выражается оценкой

$$|f_n| = O\left(\exp\left(-\frac{n \log n}{\rho}\right)\right) \text{ при } n \rightarrow +\infty,$$

так что следствие 1.3 вытекает из теоремы 1 при выборе $\psi(t) = \rho^{-1} t \log t$, $t \geq 1$.

Доказательство теоремы 2. Пусть целая функция f ограничена на Δ_3 и определяется рядом (2), удовлетворяющим оценке (5) и условию (10). Докажем, что $f \equiv \text{const}$.

Предположим, что $f \neq \text{const}$. Тогда среди коэффициентов $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ряда (2) найдутся ненулевые. Положим f_m , $m \geq 1$, — первый из них. Применяя к ряду (2) лемму 1 (при $\alpha=0$), построим соответствующую ему по этой лемме функцию $\varphi = \varphi_j$.

Образует функцию

$$\varphi(z, \vartheta) = \frac{1}{2} [\varphi(z) e^{i\vartheta} + \overline{\varphi(\bar{z})} e^{-i\vartheta}], \quad z \in \Pi^0, \vartheta \in [0, \pi],$$

голоморфную по z , вещественную при $z \in (0, +\infty)$ и удовлетворяющую с учетом (16) интерполяционным условиям

$$(-1)^j \varphi(j, \vartheta) = \text{Re}(f_j e^{i\vartheta}), \quad j = 1, 2, \dots \quad (42)$$

Ясно, что

$$|\varphi(z, \vartheta)| \leq \max(|\varphi(z)|, |\varphi(\bar{z})|), \quad z \in \Pi^0, \vartheta \in [0, \pi]. \quad (43)$$

Далее мы хотим применить к функции $\varphi(z, \vartheta)$ известную формулу Р. Неванлинны (см. [15], стр. 16). Пусть $G(\zeta, z)$ — функция Грина для полукруга $D_r \cap \Pi^0$, $r > 2^{-1}$, с полюсом в точке z . Очевидно имеем

$$g(\zeta) \equiv G(\zeta, 2^{-1}) = \log \left| \frac{\zeta + 2^{-1}}{\zeta - 2^{-1}} \cdot \frac{r^2 - \zeta \cdot 2^{-1}}{r^2 + \zeta \cdot 2^{-1}} \right|. \quad (44)$$

Из этой формулы следует, в частности, что функция $g(\tau)$ возрастает на $(0, 2^{-1})$ и убывает на $(2^{-1}, r)$.

Применяя к функции $\varphi(z + m - 2^{-1}, \vartheta)$ и к полукругу $D_r \cap \Pi^0$ в точке $z = 2^{-1}$ формулу Р. Неванлинны (с учетом (42) при $j=m$), получим оценку

$$\begin{aligned} \log |\text{Re}(f_m e^{i\vartheta})| &\leq - \sum_j g(\tau, i\vartheta) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |\varphi(it + m - 2^{-1}, \vartheta)| \left\{ \frac{1}{|i \cdot 2^{-1} + t|^2} - \frac{r^2}{|r^2 + i \cdot 2^{-1} \cdot t|^2} \right\} dt + \\ &+ \frac{r^2 - 4^{-1}}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log |\varphi(re^{i\vartheta} + m - 2^{-1}, \vartheta)| \left\{ \frac{1}{|re^{i\vartheta} - 2^{-1}|^2} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{|re^{-i\vartheta} + 2^{-1}|^2} \right\} d\vartheta = - \sum_{\vartheta} + J_{1,\vartheta} + J_{2,\vartheta}, \end{aligned} \quad (45)$$

где сумма берется по всем нулям $\tau = \tau(\vartheta) \in (0, r)$, $\tau \neq 2^{-1}$, функции $\varphi(z + m - 2^{-1}, \vartheta)$ с учетом кратности.

Интегралы $J_{1, \theta}$ и $J_{2, \theta}$ в (45) достаточно просто оцениваются сверху. Заметив, что $it + m - 2^{-1} \in S$ при $t \in [-r, r]$, из (17) и (43), полагая там $z = it + m - 2^{-1}$, $C_1 = \log(C(m - 2^{-1}))$, будем иметь не зависящую от θ оценку

$$\begin{aligned} J_{1, \theta} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r [C_1 + (\pi - \beta/2)|t|] \left\{ \frac{1}{t^2 + 4^{-1}} - \frac{r^2}{r^4 + 4^{-1}t^2} \right\} dt < \\ &< \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{C_1 + (\pi - \beta/2)|t|}{t^2 + 4^{-1}} dt = \left(1 - \frac{\beta}{2\pi}\right) \log r + O(1) \text{ при } r \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (46)$$

Аналогично, из (17) и (43) с учетом неравенства Иенсена имеем не зависящую от θ оценку

$$\begin{aligned} J_{2, \theta} &\leq -\frac{1}{\pi r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \psi(r \cos \theta + m - 2^{-1}) \cos \theta d\theta + O(1) < \\ &< -\frac{2}{\pi r} \psi\left(\frac{\pi}{4}r + m - 2^{-1}\right) + O(1) \text{ при } r \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (47)$$

Далее несколько преобразуем и оценим сумму Σ_0 . С этой целью для $\tau \geq 0$ обозначим через $w(\tau, \theta)$ число перемен знака (см. [13], часть 2, стр. 48) конечной последовательности $\{\operatorname{Re}(f_j e^{i\theta})\}$ при $j \in [m, m + \tau - 2^{-1}]$, а через $n(\tau, \theta)$ — количество нулей функции $\varphi(z, \theta)$ в этом же промежутке (с учетом кратности). Очевидно, что

$$\Sigma_0 = \int_0^r g(\tau) d n(\tau, \theta),$$

откуда, интегрируя по частям и учитывая отмеченное выше свойство монотонности функции $g(\tau)$, получим

$$\Sigma_0 = \int_0^r [n(\tau, \theta) - n(2^{-1}, \theta)] dg(\tau).$$

Применяя лемму 3 из работы [16] к функции $\varphi(z, \theta)$ и к максимальному отрезку I с целыми концами, содержащемуся в открытом промежутке $(m, m + \tau - 2^{-1})$, придем к оценке

$$n(\tau, \theta) - n(2^{-1}, \theta) \geq |\tau - 2^{-1}| - w(\tau, \theta) - 2.$$

Применив эту оценку при $\tau \geq 1$, получим

$$-\Sigma_0 \leq \int_1^r \left(w(\tau, \theta) - \tau + \frac{5}{2} \right) dg(\tau). \quad (48)$$

Замечая теперь, что с учетом формулы (44) имеем

$$\int_1^r \left(\frac{5}{2} - \tau \right) |dg(\tau)| = -\log r + O(1) \text{ при } r \rightarrow +\infty,$$

из (45) с учетом (46)—(48) получим оценку

$$\log |\operatorname{Re}(f_m e^{i\theta})| \leq \int_1^r \omega(\tau, \theta) |dg(\tau)| - \frac{\beta}{2\pi} \log r - \frac{2}{\pi r} \psi\left(\frac{\pi}{4} r + m - 2^{-1}\right) + B_1(r), \quad (49)$$

где $B_1(r)$ не зависит от θ и $B_1(r) = O(1)$ при $r \rightarrow +\infty$.

Разделим обе части неравенства (49) на π и проинтегрируем по ν в пределах от нуля до π . Мы получим оценку

$$\log |2^{-1} \cdot f_m| \leq \int_1^r I(\tau) |dg(\tau)| - \frac{\beta}{2\pi} \log r - \frac{2}{\pi r} \psi\left(\frac{\pi}{4} r + m - 2^{-1}\right) + B_1(r), \quad (50)$$

где

$$I(\tau) = \pi^{-1} \int_0^\pi \omega(\tau, \theta) d\theta.$$

Для интегралов такого вида в работе [16] (см. стр. 18) доказана оценка вида

$$I(\tau) \leq v(\tau) \equiv \pi^{-1} \cdot \sum_j |\omega_{j+1} - \omega_j|, \quad j \in [m, m + \tau - 2^{-1}].$$

Повторю из (50) получим

$$\log |2^{-1} \cdot f_m| \leq \int_1^r v(\tau) |dg(\tau)| - \frac{\beta}{2\pi} \log r - \frac{2}{\pi r} \psi\left(\frac{\pi}{4} r + m - 2^{-1}\right) + B_1(r). \quad (51)$$

Несколько преобразуем интеграл ($\equiv J$) в (51). Подставляя в нем значение функции $g(\tau)$ по формуле (44) и учитывая (следующую из условия $|\omega_{j+1} - \omega_j| \leq \pi$) оценку $v(r) = O(r)$ при $r \rightarrow +\infty$, легко видеть, что

$$J = \int_1^r \frac{v(\tau)}{\tau^2} d\tau + O(1) \text{ при } r \rightarrow +\infty.$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая определение $v(\tau)$, получим: при $r \rightarrow +\infty$

$$J = \sum_j \frac{|\omega_{j+1} - \omega_j|}{\pi j} + O(1), \quad j \in [m, m + r - 2^{-1}],$$

так что

$$J = N(r) + O(1) \text{ при } r \rightarrow +\infty. \quad (52)$$

Из (51) с учетом (52) заключаем, что

$$N(r) - \frac{\beta}{2\pi} \log r - \frac{2}{\pi r} \psi\left(\frac{\pi}{4}r + m - 2^{-1}\right) \geq O(1) \text{ при } r \rightarrow +\infty,$$

откуда, заменяя r на $\frac{4}{\pi}(r - m + 2^{-1})$ и учитывая, что

$$N\left(\frac{4}{\pi}(r - m + 2^{-1})\right) - N(r) = O(1) \text{ при } r \rightarrow +\infty,$$

окончательно найдем:

$$N(r) - \frac{\beta}{2\pi} \log r - \frac{1}{2r} \psi(r) \geq O(1) \text{ при } r \rightarrow +\infty.$$

Итак, наше предположение о том, что $f \not\equiv \text{const}$, приводят к последней оценке, являющейся отрицанием условия (10). Следовательно, $f \equiv \text{const}$ вещественного ряда (2) при указанном в § 1 способе выбора аргументов и доказательство теоремы завершено.

Следствия 2.1—2.3 выводятся из теоремы 2 точно так же, как выводятся из теоремы 1 соответствующие им следствия 1.1—1.3 в части достаточности.

Доказательство теоремы 3. Достаточность. Утверждение достаточности непосредственно следует из теоремы 2, поскольку для вещественного ряда (2) при указанном в § 1 способе выбора аргументов ω_n очевидно имеем $N(r) = Q^*(r) + \text{const}$, $r \geq 1$.

Необходимость. Пусть последовательность $\{v_n\}_1^\infty \subset \mathbb{N}$ не удовлетворяет условию (10) с заменой в нем $N(r)$ на $Q^*(r)$ и, значит, дополнительная к ней относительно $\mathbb{N}$ последовательность $\{\mu_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \left\{ S(r) - \left(1 - \frac{\beta}{2\pi}\right) \log r + \frac{1}{2r} \psi(r) \right\} < +\infty, \quad (53)$$

где $S(r)$ соответствует последовательности $\{\mu_n\}_1^\infty$ по формуле (4). Построим нетривиальную и ограниченную на Δ^3 целую функцию, которая определяется вещественным рядом вида (2), удовлетворяющим оценке (5) и имеющим совпадающую с $\{v_n\}_1^\infty$ последовательность перемен знака.

Пусть $z \rightarrow \log(1+z) = \log|1+z| + i \arg(1+z)$ — такая однозначная на Π ветвь логарифма, что $\arg 1 = 0$. Образует функцию

$$\varphi(z) = h(z) \exp \left\{ -2 \left(1 - \frac{\beta}{2\pi} \right) z \log(1+z) \right\}, \quad z \in \Pi,$$

где

$$h(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n - 2^{-1} - z}{\mu_n - 2^{-1} + z} \exp \left(\frac{2z}{\mu_n - 2^{-1}} \right).$$

Рассуждая как при доказательстве необходимости теоремы 1, с учетом условия (53), получим, что функция φ удовлетворяет предположениям леммы 2 при $\alpha = 0$. Следовательно, соответствующий ей по лемме 2 вещественный ряд вида (2) с $f_0 = \varphi(0)$ определяет ограниченную на Δ^3 целую функцию, удовлетворяющую оценке (5). Из вида (27) коэффи-

центов $\{f_n\}_0^\infty$ этого ряда видно, что они все отличны от нуля; более того, обозначая через $n(t)$ количество членов последовательности $\{f_n\}_1^\infty$ на отрезке $[0, t]$, будем иметь:

$$\text{sign } f_k = (-1)^{k+n(k+2^{-1})}$$

и, значит

$$\text{sign}(f_k f_{k-1}) = \text{sign}(f_k/f_{k-1}) = (-1)^{1+n(k+2^{-1})-n(k-2^{-1})},$$

откуда следует, что последовательность перемен знака этого же ряда совпадает с последовательностью $\{v_n\}_1^\infty$. Необходимость доказана.

Вывод следствий 3.1—3.3 из теоремы 3 вполне аналогичен выводу соответствующих им следствий 1.1—1.3 из теоремы 1.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 23.IX.1987

Վ. Զ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Միակութիւնի բնորոշման ամբողջ ֆունկցիաների համար իրենց բիլյուր-յան գործակիցների տերմիններով (ամփոփում)

Ներկա աշխատանքում ընդհանրացվում և ուժեղացվում են [7]-ում ձևակերպված անհրա-
ժեշտ-բավարար բնույթի արդյունքները անկյան վրա սահմանափակ ոչ տրիվիալ ամբողջ ֆունկ-
ցիաների գոյության մասին իրենց թեյլորյան զործակիցների տերմիններով: Թեյլորյան զոր-
ծակիցների հաշվի առման տրադիցիոն եղանակների (բացթողումներ, նշանափոխություններ)
հետ միասին աշխատանքում, հավանաբար առաջին անգամ դիտարկվող հարցերի շրջանակում,
բացահայտ ձևով դրսևանում է այդ զործակիցների արգումենտների ազդեցությունը (տես թեորեմ
2-ը):

V. A. MARTIROSIAN. Uniqueness theorems for entire functions in terms
of their Taylor coefficients (summary)

The present paper generalizes and strengthens the results of [7] of necessary and sufficient nature about existence of bounded within an angle entire functions in terms of their Taylor coefficients.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Polya. Untersuchungen über Hücken und singularitäten von potenzreihen, Math Z., 29, 1929, 549—640.
2. A. J. Macintyre. Asymptotic paths of integral functions with gap power series, Proc. London Math. Soc. (3), 2, 1952, 286—296.
3. М. М. Джрбашян. Об интегральном представлении и единственности некоторых классов целых функций, Матем. сб., 33(75), № 3, 1953, 485—530.
4. A. Edrei. Gap and density theorems for entire functions, Scripta Math., 23, № 1—4, 1957, 117—141.
5. J. M. Anderson. Müntz—Szász type approximation and the angular growth of lacunary integral functions, Trans. Amer. Math. Soc., 169, 1972, 237—248.
6. J. M. Anderson, K. G. Bunmore. On entire functions with gap power series, Glasgow Math. J., 12, part 2, Sept., 1971, 89—97.
7. В. А. Мартиросян. О целых функциях, ограниченных на замкнутом угле и представимых степенными рядами с лакунами или с вещественными коэффициентами, ДАН СССР, 29, № 6, 1986, 1301—1304.
8. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян. Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости II, Изв. АН Арм.ССР, сер. Матем., 23, № 2, 1988, 123—137.
9. Л. Шварц. Анализ, том I, М., Мир, 1972.

10. *E. Lindelöf. Le calcul des residus et ses applications a'la theorie des fonctions*, Paris, Gauthier—Villars, 1905.
11. *Н. У. Аракелян. Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов*, Матем. сб., 124(166), № 1, 1984, 24—44.
12. *Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций*, М., Гостехиздат, 1956.
13. *Г. Поля, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа*, части 1, 2, М., ГИТТЛ, 1956.
14. *R. P. Boas. Entire functions*, New—York, Academic Press, 1954.
15. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Распределение значений мерморфных функций*, М., Наука, 1970.
16. *Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян. Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости*, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 22, № 1, 1987, 3—21.