УДК 517.956

П. Э. МКРТЧЯН

ОБ ОДНОМ ВЫРОЖДАЮЩЕМСЯ КВАЗИЛИНЕЙНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ, ВОЗНИКАЮЩЕМ В ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

0. Введение и постановка задач

В настоящей работе рассматривается уравнение

$$u_t - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (u^{l_i} |u_{x_i}|^{m_i-2} u_{x_i}) = f(x, t). \quad (0.1)$$

Для него доказаны теоремы о разрешимости задачи Коши и второй начально-краевой задачи.

При этом предполагается, что $l_i \geq 1$, $m_i \geq 3$,

$$D_i \equiv (m_i - 1)^2 - l_i(m_i - 1) - l_i(l_i - 1) > 0, \quad i = 1, 2, \quad (0.2)$$

а величины $|\Delta l| = |l_2 - l_1|$, $|\Delta m| = |m_2 - m_1|$ достаточно малы.

Сформулируем доказанные в работе утверждения в виде теорем.

Рассмотрим уравнение (0.1) с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x) \geq 0, \quad x = (x_1, x_2) \in R^2. \quad (0.3)$$

Теорема 1. Пусть $l_i \geq 1$, $m_i \geq 3$; $|\Delta l|$, $|\Delta m|$ достаточно малы имеет место (0.2); функция $f(x, t) \geq 0$, $(x, t) \in R_T^2 \equiv R^2 \times [0, T]$, ограничена со своими производными по x ; функция $\varphi(x) \geq 0$ такова, что $\varphi^{\alpha_i m_i} |\varphi_{x_i}| < C_1$, где

$$\alpha_i \in (\alpha_1^*, \alpha_2^*), \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \Delta l, \quad C_1 = \text{const} > 0,$$

$$\alpha_k^* = \frac{(2l_i - 1)(m_i - 1) + \frac{1}{2} l_i (m_i - 2) + (-1)^k D_i^{1/2}}{2(m_i - 1)^2 + \frac{1}{2} (m_i - 2)^2} m_i, \quad k = 1, 2. \quad (0.4)$$

Тогда существует решение задачи Коши (0.1), (0.3) и $u(x, t) \geq 0$,

$$u \in C(R_T^2), \quad u^{\alpha_1/m_1} |u_{x_i}| < C_2, \quad u^\beta u_t \in L_2(G), \quad \beta > 2 \frac{l_i}{m_i - 1} + 1,$$

$C_2 = \text{const} > 0$, G — произвольный компакт, содержащийся в R_T^2 , определенное как функция, удовлетворяющая (0.3) и интегральному тождеству

$$\int_{D_T} \left[-u \eta_t + \sum_{i=1}^2 u^{l_i} |u_{x_i}|^{m_i-2} u_{x_i} \eta_{x_i} - f \eta \right] dx dt = - \int_D u \eta dx \Big|_0^T, \quad (0.5)$$

$D = R^1$, $D_T = R_T^2$, выполняющемуся при любой финитной по x функции $\eta \in C^1(R_T^2)$.

Рассмотрим теперь уравнение (0.1) в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0, T]$,

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) : x \in (N_1^-, N_1^+) \times (N_2^-, N_2^+)\},$$

где $N_i^\pm$ — некоторые числа, $N_1^- < N_1^+$, с начальными и граничными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad (0.6)$$

$$u_x|_{x_i=N_i^\pm} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (0.7)$$

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1 с той лишь разницей, что функции φ и f определены при $x \in \Omega$. Тогда существует решение задачи (0.1), (0.6), (0.7) и $u(x, t) \geq 0$, $u \in C(\bar{Q}_T)$, и $u^{m_i} |u_{x_i}| < c$, $c = \text{const} > 0$, и $u_i \in L_2(Q_T)$, $\beta > 2 \frac{l_i}{m_i - 1} + 1$, определенное как функция, удовлетворяющая (0.6) и интегральному тождеству (0.5) с $D = \Omega$, $D_T = Q_T$, выполняющемуся при любой $\eta \in C^1(\bar{Q}_T)$.

Уравнение (0.1) описывает движение жидкости в пористой среде. Оно является параболическим и вырождается при $u=0$ и $u_x=0$.

В работах [1, 2] изучалась первая начально-краевая задача для уравнения типа (0.1) соответственно с одной и многими пространственными переменными при $l_i = l$, $m_i = m$.

Настоящая работа наиболее близка к работам [3, 4], в которых изучалась задача Коши для уравнения (0.1) с одной пространственной переменной*.

Следует, однако, отметить, что результаты настоящей работы не есть тривиальное распространение результатов [3, 4] на двумерный случай, поскольку при оценке градиента возникает принципиальное различие по сравнению с одномерным случаем, заключающееся в том, что в одномерном случае в точке максимума функции $w = u^\alpha |u_x|^m$ из условия $w_x = 0$ можно выразить u_{xx} через u и u_x , тогда как в двумерном случае в точке максимума функции $w = \sum_{i=1}^2 u^{\alpha_i} |u_{x_i}|^{m_i}$ из условий $w_{x_i} = 0$, $i = 1, 2$, можно исключить из рассмотрения только две из трех вторых производных. Это обстоятельство и заставляет нас накладывать условие (0.2), которое в одномерном случае не возникает. Отметим также, что показатель α в двумерном случае несколько хуже (больше), чем в одномерном случае $\left(\frac{(l-1)m}{m-1}\right)$.

Основным этапом доказательства теорем 1 и 2 является получение оценки градиента

* Мы приводим только работы, содержащие теоремы существования. В частности, не упомянуты работы А. С. Калашникова и С. Н. Антонцева, в которых исследуются интересные и важные качественные свойства решений уравнений типа (0.1).

$$\sum_{i=1}^2 u^{l_i} |u_{x_i}|^{m_i} < M_1. \quad (0.8)$$

Именно при получении оценки (0.8) приходится накладывать самые сильные ограничения на структуру уравнения: условие (0.2), о котором уже говорилось, и условие малости $|\Delta l|$, $|\Delta m|$.

Для лучшей наглядности мы сначала получаем оценку (0.8) при $l_1=l_2$, $m_1=m_2$ (п. 2), а затем (п. 3) рассматриваем общий случай. При этом мы позволили себе не выписывать условия малости $|\Delta l|$ и $|\Delta m|$ в явном виде ввиду их громоздкости.

Нам приходится доказывать классическую разрешимость вспомогательной задачи (1.1), так как для нее нарушены некоторые из условий, при которых в [5—7] для широких классов квазилинейных параболических уравнений установлена классическая разрешимость основных начально-краевых задач.

Мы рассматриваем случай $l_i \geq 1$, поскольку, с одной стороны, при $l_i < 1$ оценка градиента получается проще, с другой стороны, при включении этого случая в данную схему доказательства пришлось бы прибегнуть к некоторым дополнительным рассмотрениям.

Условие $m_i \geq 3$ вызвано тем, что при доказательстве классической разрешимости задачи (1.1) нам нужна двукратная дифференцируемость функции $a_i(u, p_i)$ по p_i . При $m < 3$ это бы нас заставило прибегнуть к более сложной регуляризации. Мы предпочли пожертвовать общностью ради простоты.

1. Оценка минимума и максимума решения вспомогательной задачи

Рассмотрим в цилиндре Q_T , определенном в п. 0, задачу

$$\begin{cases} u_t - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(u, u_{x_i}) = f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_{x_i}|_{x_i=N_i^{\pm}} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $a_i(u, p_i) = \nu p_i + |u|^{l_i} |p_i|^{m_i - 2} p_i$, $\varphi(x) \geq \varepsilon > 0$, $0 < \nu \leq \varepsilon^{\beta_0}$,

$\beta_0 \geq \frac{l_i + m_i - 2}{m_i - 1}$, $f(x, t) \geq 0$, φ и f — бесконечно гладкие функции

своих аргументов, $\varphi_{x_i}|_{x_i=N_i^{\pm}} = 0$, $f_{x_i}|_{x_i=N_i^{\pm}} = 0$, $i = 1, 2$.

(В п. 6 мы будем такими функциями аппроксимировать φ и f из условий теорем 1 и 2).

Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1.1) из $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, т. е. $u, u_{x_i}, u_t, u_{x_i x_j} \in C(\overline{Q}_T)$. Легко показать, что $u(x, t) \geq \varepsilon$.

Действительно, умножая уравнение из (1.1) на $\bar{u}(x, t) = \min\{0; u - \varepsilon\}$ и интегрируя по $Q_t = \Omega \times [0, t]$, получим

$$\frac{1}{2} \int_{A_\varepsilon(t)} \bar{u}^2 dx + \int_0^t \int_{A_\varepsilon(t)} \sum_{i=1}^2 a_i(u, u_{x_i}) u_{x_i} dx dt = \int_{Q_t} f \bar{u} dx dt \leq 0,$$

где $A_\varepsilon(t) = \{x \in \Omega : u(x, t) < \varepsilon\}$, откуда следует, что $\text{mes } A_\varepsilon(t) = 0$ при любом $t \in (0; T]$, т. е. $u(x, t) \geq \varepsilon$.

Для оценки функции u сверху применим классический принцип максимума. Запишем уравнение в виде

$$u_t - \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial a_i}{\partial p_i} u_{x_i x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial u} u_{x_i} \right] = f,$$

полагая $v = ue^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, получим

$$e^{\lambda t} v_t - e^{\lambda t} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial a_i}{\partial p_i} v_{x_i x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial u} v_{x_i} \right] + \lambda v e^{\lambda t} = f.$$

Заметим, что $v(x, 0) = u(x, 0) = \varphi(x)$.

Пусть (x_0, t_0) — точка максимума функции v , лежащая вне нижнего цилиндра $\bar{Q}_T$. Тогда $v_t(x_0, t_0) \geq 0$, $v_{x_i}(x_0, t_0) = 0$, $v_{x_i x_i}(x_0, t_0) \leq 0$ (заметим, что в силу граничных условий (1.1) это справедливо и в том случае, когда точка (x_0, t_0) находится на боковой поверхности цилиндра $\bar{Q}_T$). Имеем

$$v(x_0, t_0) \leq f(x_0, t_0) \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \leq \frac{1}{\lambda} \max_{(x, t) \in \bar{Q}_T} f,$$

$$\max_{(x, t) \in \bar{Q}_T} v(x, t) \leq \max \left\{ \max_{x \in \bar{\Omega}} \varphi(x); \frac{1}{\lambda} \max_{(x, t) \in \bar{Q}_T} f \right\},$$

$$\max_{(x, t) \in \bar{Q}_T} u(x, t) \leq \inf_{\lambda > 0} e^{\lambda T} \max \left\{ \max_{x \in \bar{\Omega}} \varphi(x); \frac{1}{\lambda} \max_{(x, t) \in \bar{Q}_T} f \right\}.$$

Таким образом, доказана оценка

$$\varepsilon \leq u(x, t) \leq M, \quad (1.2)$$

где M не зависит от ε , ν , $N_l^\pm$.

2. Оценка градиента решения при $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2 = m$.

Пусть $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2 = m$ и u — такое решение задачи (1.1), что $u_{x_2}, u_{x_1 x_1} \in C(\bar{Q}_T)$. Функцию u с помощью зеркального отражения от боковой поверхности цилиндра Q_T (напомним, что Ω — прямоугольник) можно продолжить сначала на смежные с Q_T и равные ему цилиндры, а затем таким же образом — на весь слой $R^2 \times (0, T]$. Аналогичным образом продолжим функцию f на слой $R^2 \times (0, T)$, φ на R^2 .

Ниже функции u , f и φ будем считать продолженными таким образом.

Легко показать, что функция u будет удовлетворять уравнению из (1.1) в слое $R^2 \times (0, T]$ и начальному условию $u(x, 0) = \varphi(x)$ для всех $x \in R^2$. При этом нетрудно проследить, что продолженные функции u , f и φ будут обладать гладкостью, необходимой нам в дальнейшем.

Введем обозначения: $|u_{x_i}|^m + |u_{x_1}|^m = v$, $u^a v = w$, $\alpha > 0$.

Применим к обеим частям уравнения из (1.1) оператор $m \sum_{k=1}^2 \times \times |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}$ и воспользуемся очевидными соотношениями

$$v_i = \sum_{k=1}^2 m |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k} u_{x_k}, v_{x_i} = \sum_{k=1}^2 m |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k} u_{x_k x_i},$$

$$v_{x_i x_i} = \sum_{k=1}^2 (m |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k} u_{x_k x_i x_i} + m(m-1) |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k}^2 u_{x_k x_i}),$$

$$w_i = u^a v_i + \alpha u^{\alpha-1} v u_i = u^a v_i + \alpha u^{\alpha-1} v \left[\sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(u, u_{x_i}) + f \right],$$

$$w_{x_i} = u^a v_{x_i} + \alpha u^{\alpha-1} v u_{x_i},$$

$$w_{x_i x_i} = u^a v_{x_i x_i} + 2\alpha u^{\alpha-1} u_{x_i} v_{x_i} + \alpha(\alpha-1) u^{\alpha-2} v u_{x_i}^2 + \alpha v u^{\alpha-1} u_{x_i x_i}.$$

Получим

$$\begin{aligned} w_i - \frac{\partial a_i}{\partial p_i} w_{x_i x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial u} w_{x_i} + m(m-1) u^a \frac{\partial a_i}{\partial p_i} |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_i}^2 u_{x_i x_i} + \\ + 2\alpha u^{\alpha-1} v_{x_i} \frac{\partial a_i}{\partial p_i} u_{x_i} + \alpha(\alpha-1) u^{\alpha-2} v \frac{\partial a_i}{\partial p_i} u_{x_i}^2 - \frac{\partial^2 a_i}{\partial p_i^2} u_{x_i x_i} u^a v_{x_i} - \\ - m w \frac{\partial^2 a_i}{\partial p_i \partial u} u_{x_i} - m w \frac{\partial^2 a_i}{\partial u^2} u_{x_i} - \frac{\partial^2 a_i}{\partial u \partial p_i} u_{x_i} u^a v_{x_i} = \\ = f_{x_k} m u^a |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k} + \alpha f u^{\alpha-1} v. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь и всюду ниже, если не оговорено особо, мы опускаем знак суммы по повторяющимся индексам.

Пусть (x_0, t_0) — точка максимума функции w , причем $t_0 > 0$. Рассмотрим равенство (2.1) в точке (x_0, t_0) . Очевидно, $w_i \geq 0$, $-w_{x_i x_i} \geq 0$, $w_{x_i} = 0$. Сначала предположим, что одна из компонент градиента, например, для определенности u_{x_1} , равна нулю. Тогда из условий $w_{x_i} = 0$ получим, что $u_{x_1 x_1} = 0$, $u_{x_2 x_2} = -\frac{\alpha}{m} \frac{u_{x_1}^2}{u}$. Воспользовавшись этими соотношениями и отбрасывая первые три неотрицательных члена из (2.1), легко получить

$$\begin{aligned} -\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{m} \right) v u^{\alpha-2} |u_{x_1}|^{m+2} + x_1 (m-1) u^{l+\alpha-2} |u_{x_1}|^{2m} \leq \\ \leq m f_{x_2} u^a |u_{x_2}|^{m-2} u_{x_2} + \alpha f u^{\alpha-1} |u_{x_1}|^m, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$x_1 = \frac{m-1}{m} \left(l \frac{m}{m-1} - \alpha \right) \left(\alpha - \frac{(l-1)m}{m-1} \right).$$

Аналогичное неравенство получим для u_{x_i} , если $u_{x_i}(x_0, t_0) = 0$.

Пусть теперь $u_{x_i}(x_0, t_0) \neq 0$, $u_{x_k}(x_0, t_0) \neq 0$.

Тогда из условий $w_i = 0$, $i = 1, 2$, определим:

$$u_{x_i} = - \left(\frac{\alpha}{m} u^{-1} u_{x_i} v + |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k} u_{x_i x_k} \right) (|u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i})^{-1}, \quad k \neq i. \quad (2.3)$$

Исключая из (2.1) с помощью (2.3) $u_{x_i x_k}$ и $u_{x_k x_i}$ и отбрасывая первые три неотрицательных члена, после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} v \left\{ u^{\alpha-2} \frac{m-1}{m} v \sum_{i=1}^2 \frac{|u_{x_i}|^m}{|u_{x_i}|^{m-2}} (m \xi + \alpha)^2 - v u^{\alpha-2} \sum_{i=1}^2 u_{x_i}^2 \alpha \left(1 + \frac{\alpha}{m} \right) + \right. \\ \left. + u^{l-2} w (m-1) [m(m-1) \xi^2 + m(l+\alpha) \xi + x_2] \right\} \leq \\ \leq m f_{x_k} u^\alpha |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k} + \alpha f u^{\alpha-1} v, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\xi = \frac{u u_{x_i x_k}}{u_{x_i} u_{x_k}}$, $x_2 = -\alpha^2 \frac{m-2}{m} + (3l-1)\alpha - \frac{m}{m-1} l(l-1)$,

откуда очевидным образом следует неравенство

$$\begin{aligned} -v \alpha \left(\frac{\alpha}{m} + 1 \right) u^{-2} w \sum_{i=1}^2 u_{x_i}^2 + u^{l-2-\alpha} w^2 (m-1) x_3 \leq \\ \leq m f_{x_k} u^2 |u_{x_k}|^{m-2} u_{x_k} + \alpha f u^{-1} w, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $x_3 = x_2 - \frac{1}{4} \frac{m}{m-1} (l+\alpha)^2$. Подберем α так, чтобы $x_1 > 0$, $x_3 > 0$.

Очевидно, $x_1 > 0$ при $\alpha \in \left(\frac{(l-1)m}{m-1}, \frac{lm}{m-1} \right)$.

Неравенство

$$\begin{aligned} x_3 = \frac{1}{m-1} \left\{ -\alpha^2 \left(\frac{(m-1)^2}{m} + \frac{(m-2)^2}{4m} \right) + \right. \\ \left. + \alpha \left[(2l-1)(m-1) + \frac{1}{2} l(m-2) \right] - ml \left(\frac{5}{4} l - 1 \right) \right\} > 0 \end{aligned}$$

разрешимо при условии (0.2), и его решениями являются $\alpha \in (\alpha_1^*, \alpha_2^*)$, где α_1^* и α_2^* определены (0.4).

Поскольку $x_1 - x_3 = [\alpha(m-2) - lm]^2 / 4m(m-1) > 0$ при $\alpha \neq l / (m-2)$, то $(l-1)m / (m-1) < \alpha_1^* < \alpha_2^* < lm / (m-1)$.

Тогда из (2.2) и (2.5) легко получить неравенство

$$w^2 \leq c_1 [v u^{-\beta_1} w^{1+\frac{2}{m}} \max_{(x,t) \in \overline{Q_T}} |f_x| u^{\beta_2} w^{1-\frac{1}{m}} + \max_{(x,t) \in \overline{Q_T}} f u^{\beta_3} w], \quad (2.6)$$

$$c_1 = \text{const} > 0, \quad \beta_1 = l - \alpha \frac{m-2}{m}, \quad \beta_2 = 2 - l + \alpha \left(1 + \frac{1}{m} \right),$$

$\beta_3 = 1 - l + a$. Легко показать, что $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0$.

Из ограниченности $w(x, 0)$, неравенства (2.6), а также в силу выбора ϵ следует оценка

$$\max_{(x, t) \in \bar{Q}_T} w(x, t) < M_1, \quad (2.7)$$

равномерная по $\epsilon \leq \epsilon_0$. Из (2.7) следует оценка

$$\max_{(x, t) \in \bar{Q}_T} |u_x| < M_2 \epsilon^{-\frac{a}{m}}. \quad (2.8)$$

3. Оценка градиента в анизотропном случае

Пусть теперь $l_1 = l$, $m_1 = m$, $l_2 = l + \Delta l$, $m_2 = m + \Delta m$.

В этом пункте мы по возможности кратко покажем, как получить оценку, аналогичную (2.7), в предположении достаточной малости $|\Delta l|$, $|\Delta m|$.

Положим $v_k = |u_{x_k}|^{m_k}$, $w_k = u^{a_k} v_k$, $w = w_1 + w_2$, причем будем считать, что $l_1 - a_1 = l_2 - a_2 = q$.

Тогда, подействовав на обе части уравнения (1.1) оператором

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 m_k u^{a_k} |u_{x_k}|^{m_k-2} u_{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}, \text{ получим} \\ w_1 - \frac{\partial a_1}{\partial p_1} w_{x_1 x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial u} w_{x_1} + m_k (m_k - 1) u^{a_k} \frac{\partial a_1}{\partial p_1} |u_{x_k}|^{m_k-2} u_{x_k}^2 u_{x_1 x_k} + \\ + 2 a_k u^{a_k-1} v_{k x_1} \frac{\partial a_1}{\partial p_1} u_{x_1} + a_k (a_k - 1) u^{a_k-2} v_k \frac{\partial a_1}{\partial p_1} u_{x_1}^2 - \\ - \frac{\partial^2 a_1}{\partial p_1^2} u_{x_1 x_1} u^{a_k} v_{k x_1} - m_k u^{a_k} v_k \frac{\partial^2 a_1}{\partial p_1 \partial u} u_{x_1 x_1} - \\ - m_k u^{a_k} v_k \frac{\partial^2 a_1}{\partial u^2} u_{x_1} - \frac{\partial^2 a_1}{\partial u \partial p_1} u_{x_1} u^{a_k} v_{k x_1} = \\ = f_{x_k} m_k u^{a_k} |u_{x_k}|^{m_k-2} u_{x_k} + f_{a_k} u^{a_k-1} w_k. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Рассмотрим (3.1) в точке (x_0, t_0) , $t_0 > 0$, максимума функции w .

Сначала предположим, что $v_k(x_0, t_0) = 0$. Тогда для другой компоненты $w_{x_j} = 0$, $j = 1, 2$, из которых следует, что $u_{x_1 x_1} = 0$,

$$u_{x_1 x_1} = -\frac{a_1}{m_1} \frac{u_{x_1}}{u}, \quad i \neq k, \text{ получим неравенство, аналогичное (2.2)}$$

$$\begin{aligned} -a_1 \left(1 + \frac{a_1}{m_1}\right) u^{2l_1-2} |u_{x_1}|^{m_1+2} + u^{l_1+a_1-2} |u_{x_1}|^{2m_1} (m_1-1) x_1^2 < \\ < m_1 f_{x_1} u^{a_1} |u_{x_1}|^{m_1-2} u_{x_1} + a_1 f_{a_1} u^{a_1-1} v_1, \quad i \neq k \end{aligned} \quad (3.2)$$

(здесь по i не производится суммирования), где

$$x_i^l = \frac{m_i - 1}{m_i} \left(l_i \frac{m_i}{m_i - 1} - a_i \right) \left(a_i - \frac{(l_i - 1) m_i}{m_i - 1} \right).$$

Пусть теперь $v_i(x_0, t_0) \neq 0$, $i = 1, 2$. Тогда, исключая из (3.1) с помощью соотношений $w_{x_i} = 0$, $i = 1, 2$, производные $u_{x_i x_i}$, $u_{x_i x_j}$, получим неравенство, аналогичное (2.4):

$$\begin{aligned} & u^{-2} \nu \left\{ \sum_{(i,j)} \left[\frac{m_i - 1}{m_i} \frac{u_{x_i}^2}{w_i} \left(\xi m_j w_j + \sum_{k=1}^2 a_k w_k \right)^2 + \right. \right. \\ & + m_i (m_i - 1) w_i u_{x_i}^2 \left(\xi + \frac{a_i - a_j}{m_i - 1} \right)^2 - \frac{m_i}{m_i - 1} w_i u_{x_j}^2 (\Delta l)^2 \left. \right] + \\ & + \sum_{j,k=1}^2 u_{x_i}^2 w_k a_k (-2 a_i + a_k - 1) \left. \right\} + \\ & + u^{q-2} \sum_{i,j=1}^2 w_i w_j \{ [m(m-1)^2 + a_{ij}] \xi^2 + [m(m-1)(l+a) + b_{ij}] \xi + \\ & + (m-1)x_2 + c_{ij} \} < \sum_{k=1}^2 m_k f_{x_k} u^{s_k} |u_{x_k}|^{m_k-2} u_{x_k} + \sum_{k=1}^2 a_k f u^{-1} w_k, \quad (3.3) \end{aligned}$$

где a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} — некоторые выражения, зависящие от l , m , Δl , Δm и стремящиеся к нулю при $\Delta l \rightarrow 0$, $\Delta m \rightarrow 0$; $a = a_1 = l - q$ (напомним, что $l = l_1$, $m = m_1$); x_2 и ξ — те же, что в (2.4). Тогда при достаточно малых Δl и Δm из (3.3) получим

$$\begin{aligned} & -c_1 u^{-2} \nu \sum_{i=1}^2 u_{x_i} w + u^{q-2} w^2 (m-1) (x_2 - d) \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^2 [m_k f_{x_k} u^{s_k} |u_{x_k}|^{m_k-2} u_{x_k} + a_k f u^{-1} w_k], \quad (3.4) \end{aligned}$$

где $c_1 = \text{const} > 0$, $d = d(l, m, \Delta l, \Delta m) \rightarrow 0$ при $\Delta l \rightarrow 0$, $\Delta m \rightarrow 0$; x_2 — то же, что в (2.5). Теперь, если выполнено условие (0.2), то при достаточно малых Δl и Δm найдется $a \in (a_1^*, a_2^*)$ такое, что $x_2 > 0$, $x_1^i > 0$, $i = 1, 2$. Тогда из (3.2) и (3.4) и $w(x, 0) < C$ получим оценку

$$\max_{(x, t) \in \bar{Q}_T} w(x, t) < M_1, \quad (3.5)$$

равномерную по $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Из (3.5) следует

$$\max_{(x, t) \in \bar{Q}_T} |u_{x_i}| < M_2 \varepsilon^{\frac{\sigma_i}{m_i}}, \quad i = 1, 2. \quad (3.6)$$

4. О разрешимости задачи (1.1)

Оценка градиента является основным этапом доказательства разрешимости задачи (1.1) в пространствах Гёльдера. После ее получения процедура аккуратного применения принципа Лере-Шаудера с точным

указанием пространств может быть проведена аналогично тому, как это делается в [5, 6, 8]. Мы ее опускаем, отметив, что бесконечной гладкости функций φ и f с той гладкостью, которой обладают функции a_i , (u, p_i) , заведомо хватит, чтобы обеспечить гладкость решения u , используемую в пп. 2 и 3 и ниже.

Укажем также, что в качестве однопараметрического семейства линейных задач следует взять

$$\begin{cases} v_i - \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\partial a_i(u, u_{x_j})}{\partial p_j} v_{x_j x_j} + \frac{\partial a_i(u, u_{x_j})}{\partial u} v_{x_j} \right] = \tau f, \\ v(x, 0) = \tau \varphi, v_{x_i}|_{x_i = N_i^{\pm}} = 0, i=1, 2; \tau \in [0, 1]; u_{x_i}|_{x_i = N_i^{\pm}} = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

При $\tau = 1$ задача определяет нелинейное отображение $v = T(u)$. Решения уравнения $u^* = \tau T(u^*)$ являются решениями задачи (1.1), где вместо f и φ стоят, соответственно, τf и $\tau \varphi$, и потому для них в силу (1.2) и (3.6) справедливы оценки $0 \leq u^* \leq M$, $|u_x^*| < M'$, равномерные по τ .

Строгим доказательством существования неподвижной точки отображения $T(u)$ (в подходящим образом подобранном пространстве) может служить почти дословное повторение рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 1.3 гл. 2 [6].

То обстоятельство, что в [6] рассматривается первая начально-краевая задача в области с гладкой границей, а мы рассматриваем вторую начально-краевую задачу в области с угловыми точками, не имеет никакого значения. Дело в том, что гладкость границы используется только при получении необходимых априорных оценок у границы. Нас же возможность продолжения функций за пределы Q_T с помощью зеркального отражения избавляет от дополнительных рассмотрений в угловых точках.

Отметим также, что для доказательства необходимой гладкости решения v задачи (4.1) в угловых точках можно прибегнуть к тому же приему продолжения функций v , u , f с помощью зеркального отражения от боковой поверхности цилиндра Q_T на весь слой $R^2 \times (0, T)$. Действительно, тогда продолженная функция v будет решением уравнения из (4.1) во всем слое $R^2 \times (Q, T]$ и все необходимые оценки в угловых точках цилиндра Q_T получаются совершенно так же, как во внутренних точках.

5. Интегральные оценки $u_{x_i x_k}$ и u_i

Используя оценку (3.5), теперь легко получить интегральные оценки $u_{x_i x_k}$ и u_i .

$$\text{Пусть } \beta \geq 2 \frac{l_i}{m_i - 1} + 1, \quad q \geq 2\beta + l_i + m_i, \quad i = 1, 2,$$

$\mathcal{Q}'$ — некоторая подобласть области $\mathcal{Q}$ (возможно $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}'$), $\zeta(x) \in C^2(\bar{\mathcal{Q}})$, $0 \leq \zeta(x) \leq 1$, $\zeta(x) = 1$ при $x \in \mathcal{Q}'$. Умножим уравнение из (1.1) на

— $\sum_{k=1}^2 \zeta^q u^\beta (\zeta^q u^\beta u_{x_k})_{x_k}$ и проинтегрируем по Q_T . Произведем дважды интегрирование по частям, замечая, что в силу граничных условий интегралы по боковой поверхности равны нулю. Пользуясь оценкой

$$|u u_{x_k x_l} u_{x_h} u_{x_l}| \leq \delta u^2 u_{x_l x_l}^2 + \frac{1}{4\delta} u_{x_k}^2 u_{x_l}^2, \quad \delta > 0,$$

и учитывая (3.5), получим

$$\sum_{l, k=1}^2 \int_{Q_T} [v + u^{l_1} |u_{x_l}|^{m_l - 2}] u^{2\beta} u_{x_l x_k}^2 dx dt \leq c_1 T \text{mes } K_\zeta, \quad (5.2)$$

где $Q_T = \Omega' \times [0, T]$, K_ζ — носитель ζ , c_1 зависит от $q, \beta, l_1, m_l, \max |f_x|, \max f, \max |\zeta_x|, \max |\zeta_{xx}|$ и M_1 из (3.5)

Получим теперь оценку u_t . Для этого запишем уравнение из (1.1) в виде

$$u_t = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial a_i}{\partial p_i} u_{x_i x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial u} u_{x_i} \right] + f,$$

умножим его на u^β , возведем обе части в квадрат, проинтегрируем по Q_T , тогда в силу (5.2) получим

$$\int_{Q_T} u^{2\beta} u_t^2 dx dt \leq c_2 T \text{mes } K_\zeta, \quad (5.3)$$

где c_2 зависит от тех же величин, что c_1 в (5.2).

Нивковед, умножая уравнение на ζu и интегрируя по Q_T , получим оценку

$$\int_{Q_T} \sum_{i=1}^2 [v u_{x_i}^2 + u^{l_1} |u_{x_i}|^{m_i}] dx dt \leq c_3 T \text{mes } K_\zeta, \quad (5.4)$$

где c_3 зависит от тех же величин, что и c_1, c_2 .

6. Предельный переход

Полученных оценок достаточно для того, чтобы совершить предельный переход по $\varepsilon \rightarrow 0$. Мы его проведем подробно только для задачи Коши, поскольку для начально-краевой задачи он проводится совершенно аналогично с той лишь разницей, что не нужно устремлять к $\pm \infty$ числа $N_i^\pm$.

Пометим в (1.1) все функции индексом ε : $a_i^\varepsilon, u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon, f^\varepsilon, v = \varepsilon^{\beta_0}$, $\beta_0 \geq \frac{l_1 + m_l - 2}{m_l - 1}$, $i = 1, 2$. Будем считать, что числа $N_i^\pm$ тоже зависят от ε , причем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_i^\pm(\varepsilon) = \pm \infty$, $i = 1, 2$.

Пусть функции φ^ε (продолженные на все R^2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся равномерно на любом компакте к функции φ из условия теоремы 1, причем $(\varphi^\varepsilon)^{1/m_i} |\varphi_{x_i}^\varepsilon|$ равномерно ограничены по $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Функции f^ε (продолженные на R_T^2) равномерно по $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ограничены вместе с производными по x и при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся в L_2 на любом компакте из R_T^2 к функции f из условия теоремы 1.

Возможность построения таких последовательностей φ^ε и f^ε по произвольным функциям φ и f с указанными свойствами очевидна.

Оценки $0 \leq u \leq M$ (см. (1, 2)), (3.5), (5.3) и (5.4) равномерны по ε .

Пусть $Q_k, k = 1, 2, \dots$ — последовательность бесконечно расширяющихся компактов в R^2 . Зафиксируем произвольный номер k . Из (1.2), (3.5) и (5.3) следует, что для функций $(u^\varepsilon)^{1+\beta}$ равномерно ограничены нормы в анизотропном соболевском пространстве $W_{m_i, 2}^1(Q_k)$, $Q_k = Q_k \times [0, T]$, которое (см., напр., [9]) компактно вкладывается в $C(\overline{Q_k})$. Из (5.4) следует, что семейство $\{(u^\varepsilon)^{1/m_i} u_{x_i}^\varepsilon\}$ слабо компактно в $L_{m_i}(Q_k)$. Выберем для каждого k сходящиеся последовательности, а затем с помощью диагонального процесса построим последовательность $\{u_j\}$ (индекс j будем опускать) такую, что $u^\varepsilon \rightarrow u$ сильно в $C(G)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $(u^\varepsilon)^{1/m_i} u_{x_i}^\varepsilon \rightarrow u^{1/m_i} u_{x_i}$ слабо в $L_{m_i}(G)$, $(u^\varepsilon)^\beta u_{x_i}^\varepsilon \rightarrow u^\beta u_{x_i}$ слабо в $L_2(G)$, $(u^\varepsilon)^{1/m_i} |u_{x_i}^\varepsilon|^{m_i-2} u_{x_i}^\varepsilon \rightarrow L_i$ слабо в $L_{m_i'}(G)$, $m_i' = m_i/m_i - 1$, где C — произвольный компакт из R_T^2 .

Очевидно, что $u(x, t) \geq 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$. Докажем, что функция u будет решением задачи (0.1), (0.3). Для доказательства применим известный метод монотонности (см., напр., [5, 8]).

Умножив уравнение из (1.1) на гладкую финитную по x функцию $\eta(x, t)$, интегрируя получим

$$\int_{R_T^2} \left| -u^\varepsilon \eta_t + \sum_{i=1}^2 a_i^\varepsilon(u^\varepsilon, u_{x_i}^\varepsilon) \eta_{x_i} - f_i \eta \right| dx dt = - \int_{R^2} u^\varepsilon \eta dx \Big|_0^T. \quad (6.1)$$

Устремляя ε к нулю, получим

$$\int_{R_T^2} \left[-u \eta_t + \sum_{i=1}^2 L_i u^{1/m_i} \eta_{x_i} - f \eta \right] dx dt = - \int_{R^2} u \eta dx \Big|_0^T. \quad (6.2)$$

Положим $\bar{u} = \max\{u - \delta, 0\}$, $\delta > 0$. Очевидно, в силу (3.5) и (5.3), в (6.2) можно положить $\eta = \bar{u} \zeta(x)$, где $\zeta \geq 0$ — гладкая финитная функция. Устремляя теперь δ к нулю, пользуясь тем, что $\bar{u}_t = u_t$, $\bar{u}_{x_i} = u_{x_i}$ при $u \geq \delta$, $\bar{u}_t = 0$, $\bar{u}_{x_i} = 0$ при $u < \delta$,

в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега получим*

$$\int_{R_T^2} \left| \sum_{l=1}^{n_2} L_l u^{l/m_l} (u_{x_l} \zeta + u \zeta_{x_l}) - f u \zeta \right| dx dt = -\frac{1}{2} \int_{R^2} u^2 \zeta dx \Big|_0^T. \quad (6.3)$$

В силу монотонности функций a_i^* по p_i для любой гладкой функции $\xi(x, t)$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{l=1}^2 \int_{R_T^2} (a_l^*(u^*, u_{x_l}^*) - a_l^*(u^*, \xi_{x_l})) (u_{x_l}^* - \xi_{x_l}) \zeta dx dt = \\ &= \sum_{l=1}^2 \int_{R_T^2} \left[a_l^*(u^*, u_{x_l}^*) \zeta u_{x_l}^* - a_l^*(u^*, u_{x_l}^*) \zeta \xi_{x_l} - \right. \\ &\quad \left. - a_l^*(u^*, \xi_{x_l}) \zeta (u_{x_l}^* - \xi_{x_l}) \right] dx dt. \end{aligned}$$

Из (6.1) с $\eta = \zeta u^*$

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^2 \int_{R_T^2} a_l^*(u^*, u_{x_l}^*) \zeta u_{x_l}^* dx dt = \\ &= \int_{R_T^2} \left[f^* u^* - \sum_{l=1}^2 a_l^*(u^*, u_{x_l}^*) \zeta_{x_l} u^* \right] dx dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{R^2} (u^*)^2 \zeta dx \Big|_0^T. \end{aligned}$$

Тогда, устремляя ε к нулю, получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{R_T^2} \left\{ f \zeta u - \sum_{l=1}^2 \left[L_l u^{l/m_l} (u \zeta_{x_l} + \zeta \xi_{x_l}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + u^{l_l} |\xi_{x_l}|^{m_l-2} \xi_{x_l} \zeta (u_{x_l} - \xi_{x_l}) \right] \right\} dx dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{R^2} u^2 \zeta dx \Big|_0^T, \end{aligned}$$

откуда, в силу (6.3)

$$\sum_{l=1}^2 \int_{R_T^2} (u^{l_l/m_l} L_l - u^{l_l} |\xi_{x_l}|^{m_l-2} \xi_{x_l}) \zeta (u_{x_l} - \xi_{x_l}) dx dt \geq 0.$$

*Аналогичные приемы использовались в [10, 11] при рассмотрении соответствующих эллиптических уравнений.

Теперь, как и при доказательстве (6.3), положим $\xi = \bar{u} + \lambda \eta(x, t)$, где η — произвольная гладкая финитная по x функция, $\lambda = \text{const} > 0$, затем устремим δ к нулю и, считая $\zeta = 1$ на носителе η , после деления на λ получим

$$\sum_{l=1}^2 \int_{R_T^2} \left[u^{l/m_l} L_l - u^{l_l} |u_{x_l}|^{m_l-2} (u_{x_l} + \lambda \eta_{x_l}) \eta_{x_l} \right] dx dt \geq 0.$$

Устремив λ к нулю, получим

$$\sum_{l=1}^2 \int_{R_T^2} (u^{l/m_l} L_l - u^{l_l} |u_{x_l}|^{m_l-2} u_{x_l}) \eta_{x_l} dx dt > 0. \quad (6.4)$$

Поменяв η на $-\eta$, заключаем, что в (6.4) имеет место равенство. Но тогда в силу (6.2) функция u удовлетворяет интегральному тождеству (0.5). Теорема 1 доказана.

Как уже отмечалось, теорема 2 доказывается аналогично. Только нужно считать числа $N_i^\pm$ не зависящими от ε . Более того, оставляя одно, два, три числа из $N_i^\pm$ постоянными, а остальные устремляя к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$, можно доказать разрешимость начально-краевой задачи в $\Omega \times [0, T]$, где Ω — полупространство, четверть пространства, бесконечная полоса, полуполоса.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 26. I. 1987

Գ. Զ. ՄԿՐՏՅՅԱՆ. Ոչ ստացիոնար ֆիլտրացիայի ածուրյունում առաջացող մի վերածվող ԲՊՊԳԳՅՅԱՅԻՆ պարարտվան հավասարման մասին (ամփոփում)

$$u_t - \sum_{l=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_l} (u^{l_l} |u_{x_l}|^{m_l-2} u_{x_l}) = f(x, t)$$

Հավասարման համար ստացված են բերրիմեներ Կոշուև և երկրորդ սկզբնա-ևզրային խնդիրներին լուծելիության մասին:

P. Z. MKRTYCHYAN. A degenerate quasilinear parabolic equation arising in non stationary filtration theory (summary)

Solvability theorems for the Cauchy and second initial-boundary value problems for the equation

$$u_t - \sum_{l=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_l} (u^{l_l} |u_{x_l}|^{m_l-2} u_{x_l}) = f(x, t)$$

are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. A. Raviart. Sur la resolution de certaines équations paraboliques non linéaires, J. Func. Anal., 1970, v. 5, № 2, 299—328.
2. A. Bamberger. Etude d'une equation doublement non lineaire, J. Func. Anal, 1977, v. 24, № 2, 148—155.
3. А. С. Калашников. Об одном нелинейном уравнении, возникающем в теории нестационарной фильтрации, Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1978, вып. 4, 137—146.
4. А. С. Калашников. О квазилинейных вырождающихся параболических уравнениях с конечной скоростью распространения возмущений, в сб. «Дифференциальные уравнения с частными производными», Новосибирск, 1980, 80—83.
5. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., «Наука», 1967, 736 с.
6. А. В. Иванов. Квазилинейные вырождающиеся и неравномерно эллиптические и параболические уравнения второго порядка, Труды МИАН, т. CLX, Л., «Наука», 1982, 285 с.
7. D. E. Edmund., L. A. Peletier. Quasilinear parabolic equations—Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Ser 3, 1971, 5. 25, 397—421.
8. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., «Наука», 1973, 576 с.
9. Лу Вень-Туан. К теоремам вложения для пространств функций с частными производными, суммируемыми с различными степенями, Вестник ЛГУ, 1961, № 7, вып. 2, 23—37.
10. П. З. Мкртычян. О разрешимости задачи Дирихле для одного класса вырождающихся квазилинейных уравнений эллиптического типа, Зап. научн. семина. ЛОМН, 1980, т. 102, 181—189.
11. П. З. Мкртычян. О разрешимости задачи Дирихле для вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений, там же, 1982, т. 115, 178—190.