

УДК 517.95

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. А. АКОПЯН, А. А. СААЖЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В этой заметке вводится шкала систем дифференциальных уравнений, включающая (при $l=k-1$) систему, рассмотренную в [1]. Для систем этой шкалы доказывается теорема о существовании и единственности. Затем приводится рекуррентный метод решения таких систем. Далее описывается выбор независимых начальных условий, основанный на соответствующем выборе, данному в [1].

Пусть

$$X = \{x^1, \dots, x^n\} \subset R^k \setminus \{0\}.$$

Фиксируем целое число l , $0 \leq l < \dim \langle X \rangle$, где $\langle X \rangle := \text{лин. обол. } \{X\}$.

Обозначим

$$Y = Y(X) = Y_l(X) = \{Y \subset X; \dim \langle X \setminus Y \rangle = l, Y \cap \langle X \setminus Y \rangle = \emptyset\},$$

$$Z = Z(X) = Z_l(X) = \{Z \subset X; \dim \langle X \setminus Z \rangle > l\}.$$

Заметим, что $\emptyset \in Z \setminus Y$ при $l < \dim \langle X \rangle$ и $\emptyset \in Y \setminus Z$ при $l = \dim \langle X \rangle$.

Выберем L -аффинное подпространство R^k такое, что

$$\dim L = k - l - 1; \dim \{L \cap \langle A \rangle\} = 0 \quad \forall A \subset X, \dim \langle A \rangle = l + 1 \quad (1)$$

($\dim B = 0$ означает $\# B := \text{мощность } B = 1$).

Пусть $D_Y = \prod_{y \in Y} D_y$, где D_y — производная по направлению y , т. е.

$D_y = y \cdot \text{grad } f$ (точка — скалярное произведение в R^k , при $Y = \emptyset$ полагаем $D_Y f = f$).

Рассмотрим систему

$$D_Y f = \varphi_Y, \quad Y \in Y \quad (2)$$

с условиями согласованности правых частей

$$D_{Y' \setminus Y} \varphi_Y = D_{Y \setminus Y'} \varphi_{Y'}, \quad Y, Y' \in Y. \quad (3)$$

Начальные условия для системы (2) пока будем задавать с помощью некоторой функции Ψ :

$$D_Z f(x) = D_Z \Psi(x), \quad x \in L, Z \in Z. \quad (4)$$

Естественно, заданные функции φ_Y, Ψ предполагаются достаточно гладкими.

Заметим, что в случае $l = \dim \langle X \rangle$ условия (3) и (4) отсутствуют, а система (2) состоит из одного (решенного) уравнения:

$$f = \varphi_{\sigma}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Система (2) с условиями согласованности (3) и с начальными условиями (4) имеет единственное решение.

Нижеследующая теорема играет решающую роль в доказательстве теоремы 1 и содержит рекуррентный метод решения системы (2).

Для $Y \subset X$, $\dim \langle X \setminus Y \rangle = l$ положим $\Phi_Y = D_{Y \setminus \hat{Y}} \varphi_{\hat{Y}}$, где $\hat{Y}$:

$\hat{Y} := Y \setminus \langle X \setminus Y \rangle$, т. е. $\hat{Y} \in Y$, $\hat{Y} \subset Y$.

Теорема 2. Пусть $A \subset X$, $\dim \langle A \rangle = \# A = l + 1$. Функция f является решением системы (2) с начальными условиями (4) тогда и только тогда, когда f удовлетворяет системе

$$D_Y f = F_Y, \quad y \in A \quad (5)$$

с начальными условиями

$$f(x) = \Psi(x), \quad x \in L, \quad (6)$$

где F_Y удовлетворяет развешенной системе

$$D_Y F_Y = \Phi_{\{y\} \cup Y}, \quad Y \in Y(X \setminus \{y\}), \quad (7)$$

с начальными условиями

$$D_Z F_Y(x) = D_{Z \cup \{y\}} \Psi(x), \quad x \in L, \quad Z \in Z(X \setminus \{y\}). \quad (8)$$

Доказательство теоремы 2. Пусть f является решением системы (2) с начальными условиями (4). Определим функции F_Y , $y \in A$ равенствами (5). Тогда ввиду того, что $\emptyset \in Z$ ($l < \dim \langle X \rangle$) и $Z \in Z(X \setminus \{y\})$ эквивалентно $Z \cup \{y\} \in Z$, имеют место начальные условия (6) и (8). Для $Y \in Y(X \setminus \{y\})$, обозначая $Y' = Y \cup \{y\}$, имеем, что

$$D_Y F_Y = D_{Y'} f = D_{Y \setminus \hat{Y}'} \varphi_{\hat{Y}'} = \Phi_{Y'}.$$

т. е. F_Y удовлетворяет системе (7).

Пусть теперь f является решением системы (5) с начальными условиями (6), где F_Y , $y \in A$ — решения систем (7) с начальными условиями (8).

Докажем, что f является решением системы (2). Для любого $Y \in Y$ имеем, что $Y \cap A \neq \emptyset$, так как $\dim \langle X \setminus Y \rangle = l$. Пусть $y \in Y \cap A$, тогда $Y \setminus \{y\} \in Y(X \setminus \{y\})$ и в силу (5) и (7)

$$D_Y f = D_{Y \setminus \{y\}} F_Y = \Phi_{\{y\} \cup (Y \setminus \{y\})} = \Phi_{Y'}.$$

Теперь проверим выполнение начальных условий (4). При $Z = \emptyset$ (4) совпадает с (6).

Если $Z \in Z$ и $y \in Z \cap A$, то $Z \setminus \{y\} \in Z(X \setminus \{y\})$ и согласно (5) и (8) находим, что

$$D_Z f(x) = D_{Z \setminus \{y\}} F_Y = D_Z \Psi(x), \quad x \in L.$$

Остается рассмотреть случай $Z \in Z$, $Z \neq \emptyset$, $Z \cap A = \emptyset$.

Пусть $Z = \{z\} \cup Z'$. Предположим, что $L = x^0 + L_0$, где $x^0 \in L$ и L_0 — линейное подпространство R^k .

В силу (1) имеем следующее прямое разложение

$$R^k = L_0 \oplus \langle A \rangle.$$

Следовательно получаем, что

$$z = z_0 + \sum_{x \in A} \lambda_x x, \quad z_0 \in L_0, \quad \lambda_x \in R,$$

и тогда

$$D_z = D_{z' \cup \{z_0\}} + \sum_{x \in A} \lambda_x D_{z' \cup \{x\}},$$

причем $\lambda_x = 0$, если $\{x\} \cup Z' \not\subset Z$, так как в этом случае $\dim \langle (A \setminus \{x\}) \cup \{z\} \rangle = l$.

Вышеуказанным разложением рассматриваемый случай сводится к доказательству равенства

$$D_{z_0} f(x) = D_z \Psi(x), \quad x \in L;$$

при $z_0 \in L_0$, что очевидно ввиду (6).

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1 проводим индукцией по $n = \#X$. В случае $\#X = \dim \langle X \rangle = l + 1$ система (2) сводится к системе

$$D_y f = \varphi_y, \quad y \in X$$

с соответствующими условиями согласованности

$$D_{y'} \varphi_y = D_y \varphi_{y'}, \quad y, y' \in X$$

и с начальными условиями

$$f(x) = \Psi(x), \quad x \in L.$$

Пусть $M := \langle X \rangle$. Для фиксированного $x \in R^k$ рассмотрим выше указанную систему в аффинном пространстве $M_x := x + M$, параллельном M , с начальным условием в точке $M_x \cap L$. Для этой системы существование и единственность решения (в M_x) общеизвестно. Остается заметить, что $\bigcup_{x \in R^k} M_x = R^k$.

Допустим, что теорема верна для системы, мощность множества условий которого меньше n , и докажем для n .

Воспользуемся теоремой 2. Достаточно доказать существование и единственность решений систем (5) и (7). Согласно индукционному предположению, для этого достаточно проверить соблюдение условий согласованности правых частей этих систем.

Условия согласованности системы (7) имеют вид:

$$D_{Y' \cup Y} \Phi_{Y \cup \{y\}} = D_{Y' \cup Y'} \Phi_{Y' \cup \{y\}}; \quad Y, Y' \in Y(X \setminus \{y\}).$$

При $Y, Y' \in Y$ или $Y \cup \{y\}, Y' \cup \{y\} \in Y$ эти условия сразу следуют из (3). В случае же $Y, Y' \cup \{y\} \in Y$ имеем, что

$$D_{Y \setminus Y} \Phi_{Y \cup \{y\}} = D_{(Y \cup \{y\}) \setminus Y} \Phi_Y = D_{Y \setminus (Y \cup \{y\})} \Phi_{Y \cup \{y\}} = D_{Y \setminus Y} \Phi_{Y \cup \{y\}}.$$

Докажем согласованность правых частей системы (5), т. е. равенство

$$D_Y F_Y = D_Y F_{Y'}, \quad y, y' \in A. \quad (9)$$

Сначала рассмотрим случай $\dim \langle X \setminus \{y\} \rangle = \langle X \setminus \{y'\} \rangle = l$. Легко видеть, что тогда среди уравнений системы (2) имеются следующие: $D_Y f = \Psi_Y$, $D_{Y'} f = \Psi_{Y'}$. Следовательно $F_Y = \Psi_Y$, $F_{Y'} = \Psi_{Y'}$ и равенство (9) есть не что иное как одно из условий согласованности (3).

В случае $\dim \langle X \setminus \{y, y'\} \rangle \geq l$ рассмотрим следующую повторно разветвленную систему с множеством узлов $X \setminus \{y, y'\}$:

$$D_Y F = \Phi_{Y \cup \{y, y'\}}, \quad Y \in Y(X \setminus \{y, y'\}) \quad (10)$$

с начальными условиями

$$D_Z F = D_{Z \cup \{y, y'\}} \Psi, \quad Z \in Z(X \setminus \{y, y'\}). \quad (11)$$

Ясно, что функции $D_Y F_Y$ и $D_{Y'} F_{Y'}$ удовлетворяют системе (10) и начальным условиям (11). Легко убедиться также, что правые части системы (10) согласованы. Согласно индукционному предположению система (10) с начальными условиями (11) имеет единственное решение и следовательно равенство (9) доказано. Этим завершается доказательство теоремы 1.

Следствие. Пусть $B \subset X$, $\dim \langle B \rangle \geq l+1$. Тогда система (2) с начальными условиями (4) эквивалентна системе

$$D_Y f = F_Y, \quad Y \in Y(B),$$

с начальными условиями

$$D_Z f(x) = D_Z \Psi(x); \quad x \in L, \quad Z \in Z(B),$$

где F_Y удовлетворяет разветвленной системе

$$D_Y F_Y = \Phi_{Y \cup Y'}, \quad Y' \in Y(Y \setminus X)$$

начальными условиями

$$D_Z F_Y(x) = D_{Z \cup Y} \Psi(x); \quad x \in L, \quad Z \in Z(X \setminus Y).$$

Выбор независимых начальных условий из (4) равносильно нахождению базиса в следующем полиномиальном пространстве:

$$\pi(X, l) = \langle \{ \prod_{x^i \in Z} (x^i \cdot x); \quad Z \in Z_l(X) \} \rangle,$$

где $\prod_{x^i \in Z} (x^i \cdot x) = 1$ при $Z = \emptyset$.

Пусть

$$X = \{X' \subset X; \langle X' \rangle \cap X = X, \dim \langle X' \rangle \geq l\},$$

$$q \cdot \pi(X, l) = \{q \cdot p; p \in \pi(X, l)\}.$$

Лемма 1. Имеет место следующее прямое разложение:

$$\pi(X, l) = \sum_{X' \in X} \prod_{x^i \in X \setminus X'} (x^i \cdot x) \pi(X', \dim X' - 1)$$

Доказательство. Достаточно доказать, что сумма пространств в правой части равенства—прямая, так как каждый элемент простран-

ства $\pi(X, l)$ вида $\prod_{x^i \in Z} (x^i \cdot x)$. $Z \in Z_l(X)$ принадлежит одному из слагаемых пространств.

Итак допустим, что

$$\sum_{x' \in X} \prod_{x^i \in X' / X'} (x^i \cdot x) p_{X'}(x) = 0, \quad (12)$$

где

$$p_{X'} \in \pi(X', \dim X' - 1). \quad (13)$$

Будем считать, что слагаемые полиномы (12) однородны одинакового порядка— m .

Разделив (12) на $\prod_{x^i \in X} (x^i \cdot x)$, получаем, что

$$\sum_{x' \in X} \frac{p_{X'}(x)}{\prod_{x^i \in X'} (x^i \cdot x)} = 0. \quad (14)$$

Для каждого слагаемого этой суммы, согласно (13) имеем, что

$$q_{X'}(x) := \frac{p_{X'}(x)}{\prod_{x^i \in X'} (x^i \cdot x)} = \sum_{\substack{X'' \subset X' \\ \# X'' = n-m}} \lambda_{X''} \frac{1}{\prod_{x^i \in X''} (x^i \cdot x)}.$$

Обозначим через $N_{X'}$ — нормальное дополнение $\langle X' \rangle$ в R^k :

$$N_{X'} := \{x; (x \cdot x') = 0 \quad \forall x' \in X'\}.$$

Теперь рассмотрим слагаемые $q_{X'}$, для которых линейные оболочки $X' \in X$ имеют наименьшую размерность: $\dim \langle X' \rangle = l + 1$. Для этих слагаемых размерности $N_{X'}$ максимальны: $\dim N_{X'} = k - l - 1$. С другой стороны, N_{X_1} и N_{X_2} различных для различных X_1 и X_2 . Следовательно

для каждого $X' \in X$, $\dim \langle X' \rangle = l + 1$ можно найти точку $x' \in N_{X'} \setminus (\bigcup_{X'' \in X, X'' \neq X'} N_{X''})$. Теперь, устремив в равенстве (14) x к x' по прямой,

не принадлежащей $\bigcup_{X'' \in X} N_{X''}$, получим, что $q_{X'} \equiv 0$. Действительно, иначе это слагаемое стремится к бесконечности с максимальным, среди остальных слагаемых, порядком: $\rho(x, x')^{-(n-m)}$ (ρ —расстояние в R^k).

Аналогично доказывается, что $q_{X'} = 0$ для любого $X' \in X$, $\dim X' = l + 2$ и так далее. Итак, все слагаемые в левой части (12) равны нулю, что и требовалось доказать.

Следствие. *Имеет место равенство*

$$\dim \pi(X, l) = \# \{X' \subset X; \# X' = \dim \langle X' \rangle > l\}.$$

Доказательство сразу вытекает из леммы 1 и равенства (см. следствие 9 [1]):

$$\dim \pi(X', \dim X' - 1) = \# \{X'' \subset X'; \# X'' = \dim \langle X'' \rangle = \dim \langle X' \rangle\}.$$

Заметим, что лемма 1 и конструкция базиса в пространстве $\pi(X', \dim X' - 1)$ (см. следствие 6 [1]) дают конструкцию базиса в пространстве $\pi(X, l)$.

Институт математики

АН Армянской ССР

Ереванский государственный университет

УДК 517.512.2

3

Поступила 7. IX. 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Акопян, А. А. Саакян. О системе дифференциальных уравнений, связанной с полноразмерным классом сдвигов бокс-сплайна, Мат. заметки, т. 44, № 6, 1988, 705—724.