ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 1, 1989 Математика

УДК 517.95

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. А. АКОПЯН, А. А. СААКЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В этой заметке вводится шкала систем дифференциальных уравнений, включающая (при $l=k-1$) систему, рассмотренную в [1]. Для систем этой шкалы доказывается теорема о существовании и единственности. Затем приводится рекуррентный метод решения таких систем. Далее описывается выбор независимых начальных условий, основанный на соответствующем выборе, данном в [1].

Пусть

$$X=\{x^1,\cdots,x^n\}\subset R^k\setminus\{0\}.$$

Фиксируем целое число l, $0\leqslant l\leqslant \dim\langle X\rangle$, где $\langle X\rangle:=$ лин. обол. $\{X\}$.

Обозначим

$$\mathbf{Y}=\mathbf{Y}(X)=\mathbf{Y}_l(X)=\{Y\subset X;\ \dim\langle X\setminus Y\rangle=l,\ Y\cap\langle X\setminus Y\rangle=\varnothing\},$$
$$\mathbf{Z}=\mathbf{Z}(X)=\mathbf{Z}_l(X)=\{Z\subset X;\ \dim\langle X\setminus Z\rangle>l\}.$$

Заметим, что $\varnothing\in\mathbf{Z}\setminus\mathbf{Y}$ при $l<\dim\langle X\rangle$ и $\varnothing\in\mathbf{Y}\setminus\mathbf{Z}$ при $l=\dim\langle X\rangle$.

Выберем L-аффинное подпространство R^k такое, что

$$\dim L=k-l-1;\ \dim\{L\cap\langle A\rangle\}=0\ \forall A\subset X,\ \dim\langle A\rangle=l+1 \quad (1)$$

($\dim B=0$ означает $\# B:=$ мощность $B=1$).

Пусть $D_Y=\prod\limits_{y\in Y}D_y$, где D_y—производная по направлеиию y, т. е. $D_y=y\cdot\operatorname{grad}f$ (точка— склярное произведение в R^k, при $Y=\varnothing$ полагаем $D_Y f=f$).

Рассмотрим систему

$$D_Y f=\varphi_Y,\ Y\in\mathbf{Y} \quad (2)$$

с условиями согласованности правых частей

$$D_{Y'\setminus Y}\,\varphi_Y=D_{Y\setminus Y'}\,\varphi_{Y'},\ Y,\ Y'\in\mathbf{Y}. \quad (3)$$

Начальные условия для системы (2) пока будем задавать с помощью некоторой функции Ψ:

$$D_Z f(x)=D_Z\Psi(x),\ x\in L,\ Z\in\mathbf{Z}. \quad (4)$$

Естественно, заданные функции φ_Y, Ψ предполагаются достаточно гладкими.

Заметим, что в случае $l = \dim \langle X \rangle$ условия (3) и (4) отсутствуют, а система (2) состоит из одного (решенного) уравнения:

$$f = \varphi_{\varnothing}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Система (2) с условиями согласованности (3) и с начальными условиями (4) имеет единственное решение.*

Нижеследующая теорема играет решающую роль в доказательстве теоремы 1 и содержит рекуррентный метод решения системы (2).

Для $Y \subset X$, $\dim \langle X \setminus Y \rangle = l$ положим $\Phi_Y = D_{Y \setminus \widehat{Y}} \varphi_{\widehat{Y}}$, где $\widehat{Y} :$ $:= Y \setminus \langle X \setminus Y \rangle$, т. е. $\widehat{Y} \in \mathbf{Y}$, $\widehat{Y} \subset Y$.

Теорема 2. *Пусть $A \subset X$, $\dim \langle A \rangle = \# A = l+1$. Функция f является решением системы (2) с начальными условиями (4) тогда и только тогда, когда f удовлетворяет системе*

$$D_y f = F_y, \ y \in A \tag{5}$$

с начальными условиями

$$f(x) = \Psi(x), \ x \in L, \tag{6}$$

где F_y удовлетворяет разветвленной системе

$$D_Y F_y = \Phi_{\{y\} \cup Y}, \ Y \in \mathbf{Y}(X \setminus \{y\}), \tag{7}$$

с начальными условиями

$$D_Z F_y(x) = D_{Z \cup \{y\}} \Psi(x), \ x \in L, \ Z \in \mathbf{Z}(X \setminus \{y\}). \tag{8}$$

Доказательство теоремы 2. Пусть f является решением системы (2) с начальными условиями (4). Определим функции F_y, $y \in A$ равенствами (5). Тогда ввиду того, что $\varnothing \in \mathbf{Z}$ $(l < \dim \langle X \rangle)$ и $Z \in \mathbf{Z}(X \setminus \{y\})$ эквивалентно $Z \cup \{y\} \in \mathbf{Z}$, имеют место начальные условия (6) и (8). Для $Y \in \mathbf{Y}(X \setminus \{y\})$, обозначая $Y' = Y \cup \{y\}$, имеем, что

$$D_Y F_y = D_{Y'} f = D_{Y' \setminus \widehat{Y'}} \varphi_{\widehat{Y'}} = \Phi_{Y'},$$

т. е. F_y удовлетворяет системе (7).

Пусть теперь f является решением системы (5) с начальными условиями (6), где F_y, $y \in A$—решения систем (7) с начальными условиями (8).

Докажем, что f является решением системы (2). Для любого $Y \in \mathbf{Y}$ имеем, что $Y \cap A \neq \varnothing$, так как $\dim \langle X \setminus Y \rangle = l$. Пусть $y \in$ $\in Y \cap A$, тогда $Y \setminus \{y\} \in \mathbf{Y}(X \setminus \{y\})$ и в силу (5) и (7)

$$D_Y f = D_{Y \setminus \{y\}} F_y = \Phi_{\{y\} \cup (Y \setminus \{y\})} = \varphi_Y.$$

Теперь проверим выполнение начальных условий (4). При $Z = \varnothing$ (4) совпадает с (6).

Если $Z \in \mathbf{Z}$ и $y \in Z \cap A$, то $Z \setminus \{y\} \in \mathbf{Z}(X \setminus \{y\})$ и согласно (5) и (8) находим, что

$$D_Z f(x) = D_{Z \setminus \{y\}} F_y = D_Z \Psi(x), x \in L.$$

Остается рассмотреть случай $Z \in \mathbf{Z}$, $Z \neq \varnothing$, $Z \cap A = \varnothing$.

Пусть $Z = \{z\} \cup Z'$. Предположим, что $L = x^\circ + L_\circ$, где $x^\circ \in L$ и $L_\circ$ — линейное подпространство R^k.

В силу (1) имеем следующее прямое разложение

$$R^k = L_\circ \oplus \langle A \rangle.$$

Следовательно получаем, что

$$z = z_\circ + \sum_{x \in A} \lambda_x x, \; z_\circ \in L_\circ, \; \lambda_x \in R,$$

и тогда

$$D_Z = D_{Z' \cup \{z_\circ\}} + \sum_{x \in A} \lambda_x D_{Z' \cup \{x\}},$$

причем $\lambda_x = 0$, если $\{x\} \cup Z' \in \mathbf{Z}$, так как в этом случае $\dim \langle (A \setminus \{x\}) \cup \{z\} \rangle = l$.

Вышеуказанным разложением рассматриваемый случай сводится к доказательству равенства

$$D_{Z_\circ} f(x) = D_{Z_\circ} \Psi(x), \; x \in L,$$

при $Z_0 \subset L_0$, что очевидно ввиду (6).

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1 проводим индукцией по $n = \# X$. В случае $\# X = \dim \langle X \rangle = l + 1$ система (2) сводится к системе

$$D_y f = \varphi_y, \; y \in X$$

с соответствующими условиями согласованности

$$D_{y'} \varphi_y = D_y \varphi_{y'}, \; y, \; y' \in X$$

и с начальными условиями

$$f(x) = \Psi(x), \; x \in L.$$

Пусть $M := \langle X \rangle$. Для фиксированного $x \in R^k$ рассмотрим выше указанную систему в аффинном пространстве $M_x := x + M$, параллельном M, с начальным условием в точке $M_x \cap L$. Для этой системы существование и единственность решения (в M_x) общеизвестно. Остается заметить, что $\bigcup\limits_{x \in R^k} M_x = R^k$.

Допустим, что теорема верна для системы, мощность множества узлов которого меньше n, и докажем для n.

Воспользуемся теоремой 2. Достаточно доказать существование и единственность решений систем (5) и (7). Согласно индукционному предположению, для этого достаточно проверить соблюдение условий согласованности правых частей этих систем.

Условия согласованности системы (7) имеют вид:

$$D_{Y' \setminus Y} \Phi_{Y \cup \{y\}} = D_{Y \setminus Y'} \Phi_{Y' \cup \{y\}}; \; Y, \; Y' \in \mathbf{Y}(X \setminus \{y\}).$$

При $Y, Y' \in \mathbf{Y}$ или $Y \cup \{y\}, Y' \cup \{y\} \in \mathbf{Y}$ эти условия сразу следуют из (3). В случае же $Y, Y' \cup \{y\} \in \mathbf{Y}$ имеем, что

$$D_{Y'\setminus Y}\,\Phi_{Y\cup\{y\}}=D_{(Y'\cup\{y\})\setminus Y}\,\varphi_Y=D_{Y\setminus(Y'\cup\{(y\})}\varphi_{Y'\cup\{y\}}=D_{Y\setminus Y'}\,\Phi_{Y'\cup\{y\}}\,.$$

Докажем согласованность правых частей системы (5), т. е. равенство

$$D_{y'}\,F_y=D_y\,F_{y'},\ y,\ y'\in A. \qquad (9)$$

Сначала расамотрим случай $\dim<X\setminus\{y\}>=<X\setminus\{y'\}>=l$. Легко видеть, что тогда среди уравнений системы (2) имеются следующие: $D_y f=\Psi_y$, $D_{y'}f=\Psi_{y'}$. Следовательно $F_y=\Psi_y$, $F_{y'}=\Psi_{y'}$ и равенство (9) есть не что иное как одне из условий согласованности (3).

В случае $\dim<X\setminus\{y,\ y'\}>\geqslant l$ рассмотрим следующую повторно разветвленную систему с множеством узлов $X\setminus\{y,\ y'\}$:

$$D_Y\,F=\Phi_{Y\cup\{y,\,y'\}},\ \ Y\in\mathbf{Y}(X\setminus\{y,\ y'\}) \qquad (10)$$

с начальными условиями

$$D_Z\,F=D_{Z\cup\{y,\,y'\}}\,\Psi,\ \ Z\in\mathbf{Z}\,(X\setminus\{y,\ y'\}). \qquad (11)$$

Ясно, что функции $D_y'F_y$ и D_yF_y' удовлетворяют системе (10) и начальным условиям (11). Легко убедиться также, что правые части системы (10) согласованы. Согласно индукционному предположению система (10) с начальными условиями (11) имеет единственное решение и следовательно равенство (9) доказано. Этим завершается доказательство теоремы 1.

Следствие. *Пусть* $B\subset X$, $\dim<B>\geqslant l+1$. *Тогда система* (2) *с начальными условиями* (4) *эквивалентна системе*

$$D_Y f=F_Y,\ \ Y\in\mathbf{Y}\,(B),$$

с начальными условиями

$$D_Z\,f(x)=D_Z\,\Psi\,(x);\ x\in L,\ Z\in\mathbf{Z}\,(B),$$

где F_Y *удовлетворяет разветвленной системе*

$$D_{Y'}\,F_Y=\Phi_{Y'\cup Y},\ \ Y'\in\mathbf{Y}\,(Y\setminus X)$$

начальными условиями

$$D_Z\,F_Y(x)=D_{Z\cup Y}\,\Psi\,(x);\ x\in L,\ Z\in\mathbf{Z}\,(X\setminus\mathbf{Y}).$$

Выбор независимых начальных условий из (4) равносилен нахождению базиса в следующем полиномиальном пространстве:

$$\pi\,(X,\ l)=<\{\prod_{x^l\in Z}(x^l\cdot x);\ Z\in\mathbf{Z}_l\,(X)\}>,$$

где [illegible]м, что $\prod\limits_{x^l\in Z}(x^l\cdot x)=1$ при $Z=\varnothing$.

Пусть

$$\mathbf{X}=\{X'\subset X;\ <X>\cap X=X,\ \dim<X'>>l\},$$

$$q\cdot\pi\,(X,\ l)=\{q\cdot p;\ p\in\pi(X,\ l)\}.$$

Лемма 1. *Имеет место следующее прямое разложение:*

$$\pi\,(X,\ l)=\sum_{X'\in\mathbf{X}}\ \prod_{x^l\in X\setminus X'}(x^l\cdot x)\,\pi\,(X',\ \dim X'-1)$$

Доказательство. Достаточно доказать, что сумма пространств в правой части равенства—прямая, так как каждый элемент пространства $\pi(X, l)$ вида $\prod\limits_{x^l \in Z} (x^l \cdot x)$, $Z \in \mathbf{Z}_l(X)$ принадлежит одному из слагаемых пространств.

Итак допустим, что

$$\sum_{x' \in X} \prod_{x^l \in X / X'} (x^l \cdot x)\, p_{X'}(x) = 0, \tag{12}$$

где

$$p_{X'} \in \pi(X', \dim X' - 1). \tag{13}$$

Будем считать, что слагаемые полиномы (12) однородны одинакового порядка—m.

Разделив (12) на $\prod\limits_{x^l \in X} (x^l, \ x)$, получаем, что

$$\sum_{x' \in X} \frac{p_{X'}(x)}{\prod\limits_{x^l \in X'} (x^l \cdot x)} = 0. \tag{14}$$

Для каждого слагаемого этой суммы, согласно (13) имеем, что

$$q_{X'}(x) := \frac{p_{X'}(x)}{\prod\limits_{x^l \in X'} (x^l \cdot x)} = \sum_{\substack{X'' \subset X \\ \langle X'' \rangle = \langle X' \rangle \\ \# X'' = n-m}} \lambda_{X''} \frac{1}{\prod\limits_{x^l \in X''} (x^l \cdot x)}.$$

Обозначим через $N_{X'}$ -- нормальное дополнение $\langle X' \rangle$ в R^k:

$$N_{X'} := \{x;\ (x \cdot x') = 0 \ \ \forall x' \in X'\}.$$

Теперь рассмотрим слагаемые $q_{X'}$, для которых линейные оболочки $X' \in \mathbf{X}$ имеют наименьшую размерность: $\dim \langle X' \rangle = l+1$. Для этих слагаемых размерности $N_{X'}$ максимальны: $\dim N_{X'} = k - l - 1$. С другой стороны, $N_{X_1'}$ и $N_{X_2'}$ различных для различных X_1' и X_2'. Следовательно для каждого $X' \in \mathbf{X}$, $\dim \langle X' \rangle = l+1$ можно найти точку $x' \in N_{X'} \setminus \big(\bigcup\limits_{\substack{X'' \in X \\ X'' \neq X'}} N_{X''} \big)$. Теперь, устремив в равенстве (14) x к x' по прямой, не принадлежащей $\bigcup\limits_{X'' \in X} N_{X''}$, получим, что $q_{X'} \equiv 0$. Действительно, иначе это слагаемое стремится к бесконечности с максимальным, среди остальных слагаемых, порядком: $\rho(x, x')^{-(n-m)}$ (ρ—расстояние в R^k).

Аналогично доказывается, что $q_{X'} = 0$ для любого $X' \in \mathbf{X}$, $\dim X' = l + 2$ и так далее. Итак, все слагаемые в левой части (12) равны нулю, что и требовалось доказать.

Следствие. *Имеет место равенство*

$$\dim \pi(X, l) = \# \{X' \subset X;\ \# X' = \dim \langle X' \rangle > l\}.$$

Доказательство сразу вытекает из леммы 1 и равенства (см. следствие 9 [1]):

$$\dim \pi(X', \dim X' - 1) = \# \{X'' \subset X';\ \# X'' = \dim \langle X'' \rangle = \dim \langle X' \rangle\}.$$

Заметим, что лемма 1 и конструкция базиса в пространсве $\pi(X', \dim X' - 1)$ (см. следствие 6 [1]) дают конструкцию базиса в пространстве $\pi(X, l)$.

Институт математики
АН Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Поступила 7. IX. 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Акопян, А. А. Саакян.* О системе дифференциальных уравнений, связанной с полиномиальным классом сдвигов бокс-сплайна, Мат. заметки, т. 44, № 6, 1988, 705—724.