

УДК 515.518+519.11

Р. И. ОВСЕПЯН

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ХААРА И ЦЕНТРИРОВАННЫХ СИСТЕМ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Вопросы единственности представления тригонометрическими рядами возникли, как известно [1], в непосредственной связи с проблемой Римана о представлении функций всюду сходящимися тригонометрическими рядами.

Некоторое расширение постановки Римана позволило (см., например, [2]) получить положительные результаты общего характера сначала для тригонометрической системы (Д. Е. Меньшов), а затем, по существу, для произвольных полных ортонормированных систем (А. А. Талалян, Ф. Г. Арутюнян, Н. Б. Погосян).

С другой стороны, теория единственности, основательно разработанная для классических систем (тригонометрическая, с. Уолша, с. Хаара), пока не поддается распространению на более или менее общие классы ортогональных систем. По-видимому классические формулировки этой теории не могут иметь места в широком диапазоне, во всяком случае известны примеры (с. [3, 4]) полных ортонормированных систем (подчиненных довольно суровым условиям), для которых неверна даже теорема Кантора.

Поэтому один из аспектов развития теории единственности, естественно, связан с поисками новых постановок (см., например, [5] [6]). Такое расширение рассматриваемого вопроса может иметь и самостоятельный интерес, поскольку доставляет новые средства для распознавания рядов Фурье по тем или иным системам.

В настоящей работе устанавливаются некоторые теоремы единственности нового типа самой системы Хаара и для одного класса ортогональных систем, а именно, центрированных систем непрерывных функций. Эти последние (без требования непрерывности) являются объектом исследования теории мартингалов (см. [7, 8]).

Определение 1 (см. [8], стр. 207). Последовательность функций f_n , $n \geq 1$, принадлежащих пространству $L^1(\mathcal{Q}, A, P)$ называется центрированной системой, если для любого n и произвольного элемента e $\mathcal{F}$ -алгебры $\mathcal{F}_n$, порожденной функциями $f_1, f_2, \dots, f_n$, выполняется равенство $\int_e f_{n+1} dP = 0$.

Последовательность $S_n = \sum_{i=1}^n f_i$ называется мартингалом. Ясно, что определяющим свойством мартингала является равенство

$$\int_c S_n = \int_c S_{n+1} \quad \forall c \in \sigma_n.$$

Если $f_n \in L^2$, то система $(f_n)_1^\infty$ будет ортогональной (см. [8], стр. 208).

В настоящей работе предполагается, что все f_n непрерывны на $[0; 1]$. Заметим, что по теореме Ганди (см. [9], а также [10]) центрированные системы непрерывных функций не могут быть полными в $L^2 [0; 1]$; однако они могут быть системами представления почти всюду, в чем можно убедиться, используя технику работы [11]. В определенном смысле класс центрированных систем непрерывных функций довольно широк, о чем свидетельствует теорема А. В. Бахшечяна [11]: для произвольной системы непрерывных на $[0; 1]$ функций φ_n , $n \geq 1$ с условием $\int_0^1 \varphi_n = 0$, $n \geq 2$, существует центрированная

система непрерывных функций f_n , $n \geq 1$, такая, что f_n и φ_n равноизмеримы при любом $n \geq 1$.

Мы предполагаем, что определение системы Хаара (см., например, [2]) известно читателю.

Определение 2. Вложенную последовательность двоичных интервалов постоянства γ_l функций Хаара χ_{n_l} , $|\gamma_{n_l+1}| = 2^{-1} \cdot |\gamma_l|$ будем называть цепочкой.

Перейдем к формулировкам наших утверждений (анонсированных ранее в [12]).

Теорема 1. Если для ряда

$$\sum a_n \cdot \chi_n \quad (1)$$

выполнены условия:

1. $\sum a_n^2 \cdot \chi_n^2 < \infty$ всюду, исключая, быть может, некоторое множество не более, чем счетное (кратко: и. с. м.)
2. для любой цепочки γ_l верно

$$\lim \left| \int_{\gamma_l} a_{n_l} \cdot \chi_{n_l} = 0 \right| \quad (3)$$

3. Ряд (1) сходится п. в. к $\Phi \in L^{**}$, то (1) — ряд Фурье—Хаара функции Φ .

Для теорем единственности рядов Хаара условие 1 представляет собой условие нового типа. В отличие от предыдущих теорем подобного рода, данная позволяет выявлять такие ряды Фурье—Хаара, которые во

* Условие (3) в несколько иной записи впервые появляется в работе [13] (см. также [14]).

** D — класс функций, интегрируемых в смысле широкого интеграла Данажу.

многих точках могут сходиться к бесконечности*). Заметим еще, что для справедливости теоремы 1 существенно требование счетности исключительного множества в условии 1. даже, если $\Phi \equiv 0$,

$$|a_n \cdot \chi_n|_n = 0 \text{ и } \sum_i |a_n \cdot \chi_n(t)|^p < \infty \quad \forall t, \quad \forall p > 2 \text{ (см. [15]).}$$

Теорема А. Если для ряда (1) выполнены условия:

$$1. \sup_i |S_{m_i}(t)| \equiv \sum_i^m |a_n \cdot \chi_n(t)| < \infty \text{ и. с. м.},$$

2. для любой цепочки верно (3),

3. $\lim S_m \leq \Phi \leq \overline{\lim} S_m$ п. в.; $\Phi \in L^1$, то (1) — ряд Фурье функции Φ .

Это утверждение фактически является частным случаем теоремы В. А. Скворцова [21].

Следующее утверждение представляет собой гибридный вариант первых двух теорем.

Теорема 2. Пусть для ряда (1) выполнены условия:

$$1. \min \left(\sum_i a_n^2 \cdot \chi_n^2(t); \sup_i |S_{m_i}(t)| \right) < \infty \text{ и. с. м.}, \quad (4)$$

2. для любой цепочки верно (3),

$$4. \lim S_m \leq \Phi \leq \overline{\lim} S_m \text{ п. в. } \Phi \in L^1.$$

Тогда (1) — ряд Фурье функции Φ .

Пусть f обозначает центрированную систему непрерывных функций $f_1, f_2, \dots$ на $[0; 1]$. Положим $\|f_n\|_2 = 1$. Класс таких систем обозначим через F . Пусть S_n обозначает n -ую частную сумму ряда

$$\sum_i a_i \cdot f_i. \quad (5)$$

Теорема 3. Если $f \in F$ и

$$1. \sup_i |S_{n_i}| < \infty \text{ и. с. м.}, \quad (6)$$

$$2. \sup_i |a_i \cdot f_i| \in L^1, \quad (7)$$

$$3. \lim S_n \leq \Phi \leq \overline{\lim} S_n \text{ п. в. и } \Phi \in L^1, \quad (8)$$

то (5) — ряд Фурье функции Φ (и, следовательно, сходится к ней в L^1 и почти всюду).

Заметим, что условие 2 можно опустить, если f такова, что множества уровней ее линейных комбинаций (т. е. $\left\{ t : \sum_i^n b_i \cdot f_i(t) = \text{const} \right\}$) имеют нулевую меру, а в общем случае условие 2 близко к необходимому (см. замечание 3 в тексте).

* Существуют тривиальные ряды Фурье—Хаара, сходящиеся всюду, причем на множестве мощности континуума к бесконечности.

В случае же ограниченной Φ первые два условия теоремы 4 можно опустить, если полагать, что условие 3 [выполняется всюду, за исключением, быть может, некоторого счетного множества (и это верно при любой перестановке ряда (5))].

Теорема 4. Если $f \in F$ и

$$1. \min \left(\sum_1^{\infty} a_i \cdot f_i^2(t); \sup_i |S_{n_i}(t)| \right) < \infty \text{ и. с. м.}, \quad (9)$$

$$2. \sup |a_i \cdot f_i| \in L^2, \quad (10)$$

$$3. \lim S_n < \Phi \leq \overline{\lim} S_n \text{ п. в. и } \Phi \in L^1, \quad (11)$$

то (5) — ряд Фурье функции Φ .

Доказательства наших утверждений мы строим, отправляясь от схем, предложенных в работах [13, 16].

Доказательство теоремы 1. Как известно, утверждение, что ряд (1) является рядом Фурье суммируемой функции Φ , равносильно тому, что при любом m на каждом из двух двоичных интервалов постоянства δ_m функции χ_m выполняется равенство

$$\int_{\delta_m} S_m = \int_{\delta_m} \Phi, \quad \forall m. \quad (12)$$

Это утверждение справедливо и в том случае, когда $\Phi \in D$ [16].

Лемма 1. Пусть для ряда (1) выполнены условия:

$$1. \lim S_n \leq \Phi < \overline{\lim} S_n \text{ п. в.}, \quad \Phi \in D, \quad (13)$$

2. существует пара (n, δ_n) , для которой нарушено (12).

Тогда для произвольного $A > 0$ существуют $m > n$ и $\delta_m \subset \delta_n$ (кратко: $(m, \delta_m) \vdash (n, \delta_n)$), такие, что:

$$\text{для пары } (m, \delta_m) \text{ нарушено равенство (12)}, \quad (14)$$

$$\sum_1^m a_i^2 \cdot \chi_i^2(t) > A, \quad \forall t \in \delta_m. \quad (15)$$

Доказательство леммы 1. Сумма Σ' будет обозначать сужение ряда (1) (аналогично для ряда $\sum a_i^2 \cdot \chi_i^2$) на интервал δ_n из условия 2 леммы 1, причем сумму первых слагаемых, которые постоянны на δ_n , т. е. $S_n(t)$, $t \in \delta_n$ будем считать за первый член ряда Σ' .

Теперь заметим, что ряд $\sum_1^{\infty} a_i^2 \cdot \chi_i^2$ не может быть равномерно ограниченным на δ_n , так как в противном случае по теореме Б. Леви получим, что $\sum_1^{\infty} a_i^2 < \infty$, а это (надо учесть, что функции Хаара, сосредоточенные на δ_n , образуют ортонормированную систему сходимости п. в.), в свою очередь, повлечет сходимость в L^2 и почти всюду на δ_n , причем к функции Φ , что явствует из условия (13). Но если учесть, что функция $S_n(t)$, $t \in \delta_n$ является первым членом ряда $\Sigma' a_i \cdot \chi_i$, то из вышесказанного мгновенно будет следовать, что для

пары (n, δ_n) выполнено равенство (12), а это противоречит условию 2 леммы 1. Итак, на δ_n

$$|\sum a_i^2 \cdot \chi_{\delta_n}^2| = \infty. \quad (16)$$

Если теперь предположить, что лемма 1 неверна, то это будет означать существование такого A , что как только для какой-нибудь пары $(m, \delta_m) \vdash (n, \delta_n)$ выполняется условие (15), то для нее не имеет места (14), т. е. верно равенство (12). Если учесть, что функция χ_m^2 постоянна на объединении обоих интервалов постоянства δ_m^+ , δ_m^- функции χ_m , то будет ясно, что мы имеем две пары $(m, \delta_m^+) \vdash (n, \delta_n)$ и $(m, \delta_m^-) \vdash (n, \delta_n)$, удовлетворяющие одновременно условиям (15) и (12).

Пусть m — первое из таких чисел. Тогда ясно, что для пары (m_1, δ_{m_1}) , где $\delta_{m_1} = \delta_m^+ \cup \delta_m^-$ выполнены соотношения

$$\sum_1^{m_1} a_i^2 \cdot \chi_i^2(t) < A, t \in \delta_{m_1}; \int_{\delta_{m_1}} S_{m_1} = (D) \int \Phi. \quad (17)$$

Пусть Σ_1 обозначает ряд Σ' , из которого выброшены те χ_n , носители которых сосредоточены на δ_{m_1} . Повторив процедуру для ряда Σ_1 (вместо Σ'), мы придем к ряду Σ_2 и т. д. Через конечное или бесконечное количество таких процедур мы получим ряд Σ_{∞} со свойствами:

существует бесконечное количество пар (m_i, δ_{m_i}) (δ_{m_i} попарно не пересекаются), для которых имеют место соотношения типа (17), откуда

$$\sum_1 a_i^2 \cdot \chi_i^2(t) \leq A, \forall t \in \delta_n. \quad (18)$$

Из (13), (17) и (18) следует, что ортогональный ряд Σ_{∞} сходится в L^2 и почти всюду на δ_n к функции $\tilde{\Phi} \in L^2$, которая совпадает с Φ на множестве $\delta_n \setminus (\bigcup_1^{\infty} \delta_{m_i})$, а на каждом из интервалов δ_{m_i} она постоянна и

$$(L) \int_{\delta_{m_i}} \tilde{\Phi} = (D) \int_{\delta_{m_i}} \Phi \quad \forall i. \quad (19)$$

Но в таком случае (см. [17], стр. 370) получим

$$(L) \int_{\delta_n} \tilde{\Phi} = (D) \int_{\delta_n} \Phi \quad (20)$$

и поскольку ряд Σ_{∞} сходится к $\tilde{\Phi}$ по метрике L^2 , то будем иметь $\int_{\delta_n} S_n = \int_{\delta_n} \tilde{\Phi}$ (напомним, что постоянная $S_n(t)$, $t \in \delta_n$ является первым слагаемым ряда Σ' , а следовательно, и ряда Σ_{∞}), а это вместе с (20)

приводит к равенству $\int_{\delta_n} S_n = (D) \int_{\delta_n} \Phi$, что противоречит исходному предположению.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть для ряда (1) помимо условий 1 и 2 леммы 1 выполнено требование (3).

Тогда для произвольного $A > 0$ существуют пары $(m, \delta_m) \vdash (n, \delta_n)$ и $(l, \delta_l) \vdash (n, \delta_n)$ такие, что $\delta_m \cap \delta_l = \emptyset$, и для них справедливо утверждение леммы 1, т. е. выполнены (14) и (15).

Доказательство леммы 2. Поскольку для пары (n, δ_n) нарушено (12), то имеем

$$\int_{\delta_n} S_n = (D) \int_{\delta_n} \Phi + \alpha, \alpha \neq 0. \quad (21)$$

В силу леммы 1 ясно, что предположение о неверности леммы 2 равносильно существованию бесконечной „монотонной“ последовательности пар $(m_1, \delta_{m_1}) \vdash (m_2, \delta_{m_2}) \vdash \dots$; $\delta_n \supset \delta_{m_1}$; $2 \cdot |\delta_{m_{l+1}}| = |\delta_{m_l}|$, для которых нарушено равенство (12), причем для любой другой пары $(m, \delta_m) \vdash (n, \delta_n)$ это равенство выполнено. Это последнее обстоятельство в сочетании с (21) приводит к соотношениям

$$\int_{\delta_{m_l}} S_{m_l} = (D) \int_{\delta_{m_l}} \Phi + \alpha, \forall l. \quad (22)$$

Так как неопределенный D -интеграл функции Φ является непрерывной (а следовательно, и равномерно непрерывной) функцией на $[0; 1]$, то ясно, что первое слагаемое в (22) стремится к нулю. Пусть i_0 настолько велико, что выполнено неравенство

$$\left| (D) \int_{\delta} \Phi \right| < \frac{\alpha}{10}, \forall \delta \subset \delta_{m_{i_0}}. \quad (23)$$

В таком случае для всех $i \geq i_0$ будем иметь

$$\left| \int_{\delta_{m_i}} S_{m_i} \right| > \frac{9}{10} \cdot \alpha \quad \forall i \geq i_0. \quad (24)$$

Для каждого i одна из половин интервала δ_{m_i} совпадает с $\delta_{m_{i+1}}$, а на другой половине $\delta_{m_{i+1}}$ интегралы функций Φ и $S_{m_{i+1}}$ совпадают. Далее, на $\delta_{m_{i+1}}$ и $\delta_{m_{i+1}}$ $S_{m_{i+1}} = S_{m_i} + \alpha_{m_{i+1}} \cdot \chi_{m_{i+1}}$. Так как S_{m_i} постоянна на δ_{m_i} , то из (24) следует

$$\left| \int_{\delta_{m_{i+1}}} S_{m_{i+1}} \right| > \frac{9}{20} \cdot \alpha \quad \forall i \geq i_0. \quad (25)$$

Из (23), (25) и равенства интегралов функций Φ и $S_{m_{i+1}}$ на $\delta_{m_{i+1}}$, следует

$$\left| \int_{\delta_{m_i+1}} a_{m_i+1} \cdot \chi_{m_i+1} \right| = \left| \int_{\delta_{m_i+1}} a_{m_i+1} \cdot \chi_{m_i+1} \right| > \left(\frac{9}{20} - \frac{1}{10} \right) \cdot 2 \quad \forall i \geq i_0. \quad (26)$$

Но это противоречит предпосылкам леммы 2, а именно условию (3).

Лемма 2 доказана.

Теперь ясно, что если предположить, что теорема 1 неверна, то по лемме 2 для произвольного A_1 найдутся пары (m_1, δ_{m_1}) и (l_1, δ_{l_1}) , $\delta_{m_1} \cap \delta_{l_1} = \emptyset$, для которых выполнены условия (14) и (15). Затем при $A_2 > A_1 + 1$ надо применить лемму 2 к каждой из пар, определенных на предыдущем шаге, и т. д. Поскольку $A_n \uparrow \infty$, то через бесконечное число шагов мы придем к некоторому множеству мощности континуум, в точках которого будет нарушено первое условие теоремы 1. Подобные выкладки хорошо известны и потому мы опустим их.

Теорема 1 доказана.

Пусть σ_i — σ -алгебра множеств, порожденная функциями Хаара χ_j , $1 \leq j \leq m_i$, а $\tau_i (\in \tau_i)$ — система всех двоичных интервалов, на каждом из которых функция S_{m_i} постоянна (m_i — последовательность из теоремы 2).

Замечание 1. Условие (12) равносильно соотношениям

$$\int_{\Delta} S_{m_i} = \int_{\Delta} \Phi, \quad \forall \Delta \in \tau_i, \quad \forall i. \quad (27)$$

В самом деле, если условие (12) нарушено для какой-нибудь пары (m, δ_m) , то на одной из половинок интервала δ_m оно опять будет нарушено (для соответствующей пары). Повторяя это рассуждение, мы придем к некоторой паре (m_i, Δ) , $\Delta \in \tau_i$, для которой (27) не будет выполняться.

Замечание 2. Если последовательность S_{m_i} равномерно ограничена на некотором $\Delta \in \tau_i$, то ряд (1) сходится на Δ в метрике L^2 и почти всюду к функции Φ (в силу условия 3 теоремы 2) и поэтому

$$\int_{\Delta} S_{m_i} \neq \int_{\Delta} \Phi, \quad \Delta \in \tau_i.$$

Это утверждение легко следует из того, что функции Хаара, сосредоточенные на Δ , образуют ортономированную систему сходимости почти всюду и сужение ряда (1) на Δ по условию замечания принадлежит классу L^2 .

Лемма 3. Пусть для ряда (1) выполнены условия:

$$1. \quad \lim S_n \leq \Phi \leq \overline{\lim} S_n \text{ п. в.}, \quad \Phi \in L^1, \quad (28)$$

2. существует пара (m_i, Δ_i) , $\Delta_i \in \tau_i$, для которой нарушено (27).

Тогда для произвольного $A > 0$ существует пара $(m_j, \Delta_j) \vdash (m_i, \Delta_i)$ (т. е. $j > i$, $\Delta_j \in \tau_j$, $\Delta_j \subset \Delta_i$), для которой тоже нарушено (27) и, кроме того

$$|S_{m_j}(t)| > A, \quad t \in \Delta_j. \quad (29)$$

Доказательство леммы 3. Как и раньше сумма Σ' обозначает сужение ряда (1) на нужный интервал, в данном случае на Δ_1 , причем $S_{m_l}(t)$, $t \in \Delta_1$ — первое слагаемое ряда Σ' . За частными суммами ряда Σ' мы сохраним прежнее обозначение S_m . В силу условия 2 леммы 3 и замечания 2, последовательность S_{m_j} не может быть равномерно ограниченной на Δ_1 , и поэтому предположение, что лемма 3 не имеет места равносильно утверждению: существует такое $A > 0$, что

$$|S_{m_j}(t)| > A, \quad t \in \Delta_j, \quad (m_j, \Delta_j) \vdash (m_1, \Delta_1) \Rightarrow \int_{\Delta_j} S_{m_j} = \int_{\Delta_j} \Phi. \quad (30)$$

Пусть m_{j_1} — первый такой номер. Через ω_1 обозначим объединение всех $\Delta_{j_1} \in \tau_{j_1}$, которые вместе с m_{j_1} удовлетворяют соотношениям (30). Пусть теперь Σ_1 — ряд, полученный из Σ' после того, как из последнего изъяты те функции Хаара, которые сосредоточены на ω_1 (т. е. на каком-нибудь Δ_{j_1}). Тогда

$$|S_{m_j}(t)| \leq A \quad \forall j < j_1, \quad \forall t \in \Delta_j, \quad \forall \Delta_j \in \tau_j, \quad (31)$$

$$\int_{\Delta_{j_1}} S_{m_{j_1}} = \int_{\Delta_{j_1}} \Phi, \quad \forall \Delta_{j_1} \subset \omega_1. \quad (32)$$

Если учесть, что S_{m_j} при $j > j_1$ постоянна на каждом из интервалов $\Delta_{j_1} \subset \omega_1$, то из (32) можно извлечь такое соотношение

$$|S_{m_j}(t)| \leq \frac{1}{|\Delta_{j_1}|} \cdot \int_{\Delta_{j_1}} |\Phi|, \quad \forall j \geq j_1, \quad \forall t \in \Delta_{j_1}, \quad \forall \Delta_{j_1} \subset \omega_1. \quad (33)$$

Теперь, продолжив это рассуждение уже для ряда Σ_1 , получим номер m_{j_2} , множества $\Delta_{j_2} \in \tau_{j_2}$, ω_2 ($\omega_2 \cap \omega_1 = \emptyset$), такие, что для ряда Σ_2 , который получается из Σ_1 после выбрасывания из него тех функций Хаара, которые сосредоточены на ω_2 , будут выполняться соотношения

$$|S_{m_j}(t)| \leq A, \quad \forall j < j_2, \quad \forall t \in \Delta_j, \quad \forall \Delta_j \in \tau_j, \quad \Delta_j \cap \omega_1 = \emptyset, \quad (34)$$

$$\int_{\Delta_{j_2}} S_{m_{j_2}} = \int_{\Delta_{j_2}} \Phi, \quad \forall \Delta_{j_2} \subset \omega_2, \quad (35)$$

$$|S_{m_j}(t)| \leq \frac{1}{|\Delta_{j_2}|} \cdot \int_{\Delta_{j_2}} |\Phi|, \quad \forall j \geq j_2, \quad \forall t \in \Delta_{j_2}, \quad \forall \Delta_{j_2} \subset \omega_2. \quad (36)$$

Продолжим этот процесс. Ясно, что через конечное или бесконечное число шагов мы придем к ряду Σ_∞ , который удовлетворяет условиям

$$|S_{m_j}(t)| \leq A, \quad \forall j, \quad \forall t \in \Delta_j \setminus \left(\bigcup_1^\infty \omega_l \right), \quad (37)$$

$$|S_{m_j}(t)| \leq A, \quad \forall j < j_r, \quad \forall t \in \Delta_j, \quad \forall \Delta_j \in \tau_j, \quad \Delta_j \cap \left(\bigcup_1^{r-1} \omega_l \right) = \emptyset, \quad \forall r, \quad (38)$$

$$\int_{\Delta_{j,r}} S_{m_j} = \int_{\Delta_{j,r}} \Phi, \quad \forall \Delta_{j,r} \subset \omega_r, \quad \forall r, \quad (39)$$

$$|S_{m_j}(t)| \leq \frac{1}{|\Delta_{j,r}|} \cdot \int_{\Delta_{j,r}} |\Phi|, \quad \forall j \geq j_r, \quad \forall t \in \Delta_{j,r}, \quad \forall \Delta_{j,r} \subset \omega_r, \quad \forall r. \quad (40)$$

Но так как функция Φ суммируема, то такой же будет и функция

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t \in \Delta_l \setminus \left(\bigcup_1^{\infty} \omega_l \right) \\ \frac{1}{|\Delta_{j,r}|} \cdot \int_{\Delta_{j,r}} |\Phi|, & t \in \Delta_{j,r}, \quad \forall r. \end{cases}$$

Из соотношений (37)–(40) следует, что частные суммы S_{m_j} ряда $\sum_{j=1}^{\infty}$ имеют суммируемую мажоранту $\tilde{\Phi}$, откуда вытекает, что последовательность S_{m_j} слабо компактна в L^1 . Но S_{m_j} — подпоследовательность частных сумм некоторого ряда $\sum_{j=1}^{\infty}$ по системе Хаара, являющейся базисом в L^1 , и поэтому ряд $\sum_{j=1}^{\infty}$ будет разложением некоторой функции $\varphi \in L^1$. Теперь учтем, что $\sum_{j=1}^{\infty}$ сходится п. в. на Δ_l (из условия 2 леммы 3), причем на множестве $\Delta_l \setminus \left(\bigcup_1^{\infty} \omega_l \right)$ он совпадает с рядом (1), и поэтому в силу (28), получим, что функции φ и Φ совпадают на $\Delta_l \setminus \left(\bigcup_1^{\infty} \omega_l \right)$. А из (39) следует

$$\int_{\bigcup_1^{\infty} \omega_r} \varphi = \int_{\bigcup_1^{\infty} \omega_r} \Phi.$$

В итоге получим

$$\int_{\Delta_l} \varphi = \int_{\Delta_l} \Phi.$$

Но так как

$$\int_{\Delta_l} \varphi = \int_{\Delta_l} \sum_{j=1}^{\infty} S_{m_j} = \int_{\Delta_l} S_{m_l}, \quad \Delta_l \in \tau_l,$$

то приходим к равенству

$$\int_{\Delta_l} S_{m_l} = \int_{\Delta_l} \Phi, \quad \Delta_l \in \tau_l,$$

противоречащему условию 2 леммы 3.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть для ряда (1) помимо условий 1 и 2 леммы 3 выполнено требование (3). Тогда для произвольного $A > 0$ суще-

составляют пары $(m_j, \Delta_j) \vdash (m_l, \Delta_l)$, $(m_l, \Delta_l) \vdash (m_j, \Delta_j)$, $\Delta_j \cup \Delta_l = \emptyset$, для каждой из которых нарушено (27) и выполнено (29).

В силу замечания 1, доказательство леммы 4 сводится к таким же рассуждениям, с помощью которых была доказана лемма 2.

Доказательство теоремы А проводится рассуждением от противного по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.

Теорема А доказана.

Доказательство теоремы 2. Начиная рассуждение от противного используя лемму 2, найдем для произвольного $A_1 > 0$ пары (m, δ_m) и (l, δ_l) , $\delta_m \cap \delta_l = \emptyset$, для которых выполнены условия

$$\sum_1^m a_i^2 \cdot \chi_i^2(t) > A_1, \quad t \in \delta_m; \quad \sum_1^l a_i^2 \cdot \chi_i^2(t) > A_1, \quad t \in \delta_l, \quad (41)$$

$$\int_{\delta_m} S_m \neq \int \Phi; \quad \int_{\delta_l} S_l \neq \int \Phi.$$

Теперь, применяя лемму 3 для $A_1 > 0$ к каждой из уже определенных пар, найдем новые пары

$$(m_{j_1}, \Delta_{j_1}), (m_{l_1}, \Delta_{l_1}), \quad \Delta_{j_1} \cap \Delta_{l_1} = \emptyset, \quad (42)$$

для которых (с учетом (41)) выполняются условия

$$\sum_1^{m_{j_1}} a_i^2 \cdot \chi_i^2(t) > A_1, \quad t \in \Delta_{j_1}; \quad \sum_1^{m_{l_1}} a_i^2 \cdot \chi_i^2(t) > A_1, \quad t \in \Delta_{l_1},$$

$$|S_{m_{j_1}}(t)| > A_1, \quad t \in \Delta_{j_1}; \quad |S_{m_{l_1}}(t)| > A_1, \quad t \in \Delta_{l_1},$$

$$\int_{\Delta_{j_1}} S_{m_{j_1}} \neq \int \Phi; \quad \int_{\Delta_{l_1}} S_{m_{l_1}} \neq \int \Phi.$$

На втором шаге надо повторить всю процедуру применительно к парам (42) и числу $A_2 > A_1 + 1$ и т. д. Поскольку $A_n \uparrow \infty$, то ясно, что в результате всех этих действий получится некоторое множество мощности континуум, в точках которого будет нарушено условие 1 теоремы 2.

Теорема 2 доказана.

Лемма 5. Центрированная система функций $f_n \in L^r(\Omega, A, P)$ $r > 1$ является базисной последовательностью (т. е. базисом в своем линейном замыкании) и все разложения сходятся почти всюду.

Доказательство. Для произвольного ряда $\sum a_k f_k$ его частные суммы S_n образуют мартингал, и следовательно, последовательность $|S_n|^r$ будет полумартингалом (см. [7], стр. 256), а математическое ожидание полумартингала — возрастающая функция (см. [7], стр. 280), т. е. в нашем случае

$$\int_{\Omega} \left| \sum_1^n a_k \cdot f_k \right|^r dP < \int_{\Omega} \left| \sum_1^{n+m} a_k \cdot f_k \right|^r dP, \quad \forall n, \quad \forall m, \quad \forall \{a_k\}. \quad (43)$$

Неравенство (43) означает, что $(f_n)_1^\infty$ — базис в своем линейном замыкании (см., например, [18], стр. 116). Согласно неравенству Дуба (см. например, [19], стр. 59) для мажоранты $S_n^* = \max_{1 \leq l \leq n} |S_l|$ выполняется соотношение

$$P\{S_n^* > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{\{S_n^* > \lambda\}} |S_n| dP \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{\Omega} |S_n| dP, \quad \forall \lambda > 0, \quad (44)$$

откуда следует, что для произвольного разложения $\sum_1^\infty a_n \cdot f_n$ мажоранта S_n^* будет конечной почти всюду. Но отсюда уже вытекает, что все разложения сходятся почти всюду, надо только учесть, что f_n — базисная последовательность и повторить хорошо известные рассуждения (см., например, [20], стр. 307). Суть этих рассуждений такова: если некоторое разложение $\sum a_n \cdot f_n$ расходится на множестве положительной меры, то найдутся числа $a_l \uparrow \infty$ и $n_k \uparrow$ такие, что ряд $\sum_{l=1}^\infty a_l \cdot \sum_{k=n_l}^{n_{l+1}-1} a_k \cdot f_k$ будет разложением, которое неограниченно расходится на множестве положительной меры.

Замечание 3. Из первого неравенства (44) следует (см. [19], стр. 25) при $p > 1$

$$\|S_n^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \cdot \|\Phi\|_p \quad (45)$$

в предположении, что ряд $\sum a_n \cdot f_n$ является разложением функции Φ .

Лемма 6. Пусть $(\psi_n)_1^\infty$ — центрированная система непрерывных функций на $[0; 1]$, $\|\psi_n\|_2 = 1$. Чтобы $\sum a_n \cdot \psi_n$ был рядом Фурье функции Φ из линейного L^1 -замыкания системы ψ_n , необходимо и достаточно, чтобы для любого сегмента J и любого n имело место

$$\int_{\psi_n^{-1}(J)} S_n = \int_{\psi_n^{-1}(J)} \Phi. \quad (46)$$

Доказательство. Необходимость очевидным образом следует из леммы 5.

Достаточность. Зафиксируем n и заметим, что если соотношение (46) справедливо для произвольного сегмента J , то оно, очевидно, имеет место и для любого полусегмента. Пусть $\psi_n([0; 1]) \subset [a; \beta]$. Разложим $[a; \beta]$ на сумму $\bigcup_1^l \lambda_l$ попарно непересекающихся полусегментов λ_l , длины которых меньше наперед заданного ε . Ясно, что $\bigcup_{l=1}^l \psi_n^{-1}(\lambda_l) = [0; 1]$. В силу ортонормированности ψ_n имеем

$$a_n = \int_0^1 S_n \cdot \psi_n, \quad \text{Пусть } c_l \in \lambda_l \text{ и } \Lambda_l = \psi_n^{-1} \lambda_l,$$

$$a_n = \int_0^1 S_n \cdot \psi_n = \sum_{l=1}^l \int_{\Lambda_l} S_n \cdot \psi_n = \sum_{l=1}^l \int_{\Lambda_l} S_n \cdot (\psi_n - c_l) + \sum_{l=1}^l \int_{\Lambda_l} S_n \cdot c_l.$$

Первая сумма по модулю не превышает $\varepsilon \cdot \|S_n\|_1$, а вторая, в силу (46) равна $\sum_{l=1}^l \int_{\Lambda_l} \Phi \cdot \psi_n + \sum_{l=1}^l \int_{\Lambda_l} \Phi \cdot (c_l - \psi_n)$. А здесь первая сумма совпадает с

$$\int_0^1 \Phi \cdot \psi_n, \text{ а вторая оценивается через } \varepsilon \cdot \|\Phi\|_1. \text{ Теперь, если учесть, что}$$

эти выкладки справедливы при фиксированном n и произвольном ε , то

$$\text{получим } a_n = \int_0^1 \Phi \cdot \psi_n, \text{ чем завершается доказательство леммы 6.}$$

Лемма 7. Пусть $f \in F$, n_i — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, Ω — замкнутое множество, принадлежащее σ -алгебре σ_k , порожденной функциями $(f_i)_1^\infty$, S_k — k -ая частичная сумма ряда (5), Φ — суммируемая функция, удовлетворяющая условию (8). Если выполнено неравенство

$$\int_{\Omega} S_k \neq \int_{\Omega} \Phi, \quad (47)$$

то для $\forall c > 0$ существуют сегмент $I \subset (-\infty; -c) \cup (c; \infty)$ и число $n_i > k$ (n_i из условия (6)), такие, что

$$\int_{\Omega_i} S_{n_i} \neq \int_{\Omega_i} \Phi, \quad \Omega_i \equiv \Omega \cap S_{n_i}^{-1}(I) \cap \bigcap_{\substack{n_j > k \\ j < i}} (|S_{n_j}| \leq c). \quad (48)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что сужение системы f_i , $i \geq k$ на Ω является центрированной последовательностью. Далее, S_{n_i} не может быть равномерно ограниченной на Ω , так как в силу ортогональности системы f_i , $i \geq k$ на Ω и леммы 5 отсюда следовало бы, что ряд (5) сходится на Ω в метрике L^2 , причем к Φ (см. (8)), а это противоречило бы неравенству (47).

Если в данной ситуации предположить, что лемма 7 неверна, то это будет означать, что существует такое $c > 0$, что при каждом $n_i > k$ на любом множестве вида Ω_i из (48) должно выполняться равенство

$$\int_{\Omega_i} Q_i = \int_{\Omega_i} \Phi, \quad Q_i(t) \equiv S_{n_i}(t), \quad t \in \Omega. \quad (49)$$

Ясно, что равенство (49) будет выполняться и в том случае, когда I , входящее в определение множества Ω_i , будет обозначать произвольный полусегмент, лежащий на множестве $(-\infty; -c) \cup (c; \infty)$.

Теперь заметим, что последовательность Q_i образует мартингал. Определим для нее и вышеуказанной постоянной c момент останова

$$\tau(t) = \min_{n_l \leq k} |n_l: |Q_l(t)| \geq c|. \quad (50)$$

Пусть B_j обозначают множества уровней функции τ , т. е.

$$B_j = \{\tau = n_l\} \neq \emptyset, \quad B_\infty = \{\tau = \infty\}. \quad (51)$$

Ясно, что B_j попарно не пересекаются

$$\Omega = \bigcup_{j < \infty} B_j \cup B_\infty. \quad (52)$$

Образует новую последовательность $T_m = Q_{\tau \wedge m}$, $m > k$, $\tau \wedge m = \min(\tau, m)$. Как известно (см. [8], стр. 146), T_m будет мартингалом. Легко проверить, что в силу (49) и (50) на каждом из B_j выполняются соотношения

$$|T_m| \leq c, \quad \forall m < n_l; \quad T_m = S_{n_l}, \quad \forall m \geq n_l; \quad \forall j < \infty. \quad (53)$$

$$|T_m(t)| \leq c, \quad \forall m, \quad \forall t \in B_\infty. \quad (54)$$

$$\int_{B_j} T_{n_l} = \int_{B_j} \Phi, \quad \forall j. \quad (55)$$

Теперь вспомним, что при фиксированном j для произвольного допустимого сегмента (полусегмента) I будет выполняться равенство

$$\int_A T_{n_l} = \int_A \Phi, \quad A \equiv B_j \cap T_{n_l}^{-1}(I). \quad (56)$$

Из (56) путем несложных выкладок, аналогичных тем, которые уже проводились при доказательстве леммы 3, придем к заключению, что мажоранта $\sup |T_{n_l}|$ — суммируемая на Ω функция. Тогда, в силу леммы 5 и соображений слабой компактности, T_{n_l} будет сходиться на Ω и в метрике L^1 и почти всюду к функции Φ , равной Φ на B_∞ и T_{n_l} на каждом из B_j , $j < \infty$. Но в силу (55) интегралы функций Φ и Φ на Ω совпадают и если еще учесть мартингаловое соотношение

$$\int_{\Omega} S_k = \int_{\Omega} T_{n_l}, \quad \forall n_l > k,$$

то получится противоречие с условием (47).

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Если к условиям леммы 7 добавить требование (7), то из (47) следует: для произвольного $c > 0$ существуют непустые, пересекающиеся замкнутые множества $\omega_j \subset \Omega$, $\omega_j \subset B_{n_l}$, $j = 1, 2$, такие что

$$|S_{n_l}| \geq c, \quad t \in \omega_j; \quad \int_{\omega_j} S_{n_l} \neq \int_{\omega_j} \Phi, \quad j=1, 2. \quad (57)$$

Доказательство. В силу леммы 7 мы можем ограничиться установлением интегральных неравенств (57). Положим $\alpha = \min S_k$.

$\beta = \max S_k$, где S_k удовлетворяет соотношению (47). Пусть $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Если существуют множества $\omega_1 \subset \Omega \subset S_k^{-1}[\alpha; \gamma)$, $\omega_2 \subset \Omega \cap S_k^{-1}[\gamma; \beta]$, $\omega_j \in \sigma_{n_j}$, удовлетворяющие второму неравенству (57), то доказательство леммы 8 завершается. В противном случае, для одного из множеств, например, $[\gamma; \beta]$, выполняются такие условия: для произвольно-го $\omega \subset \Omega \cap S_k^{-1}[\gamma; \beta]$, $\omega \in \sigma_n$, $n > k$ имеет место равенство

$$\int_{\omega} S_m = \int_{\omega} \Phi, \quad \forall m > n, \quad (58)$$

Далее, повторяем все эти рассуждения, отправляясь от отрезка $[z, \gamma)$ и т. д. На этом пути возможны два случая: 1) на каком-нибудь шаге произойдет „расщепление“ (как выше уже описано), чем и завершится доказательство леммы 8; 2) найдется уровень a_k [такой, что для множества $A_k \equiv \Omega \cap \{S_k = a_k\}$ выполнено соотношение

$$\int_{A_k} S_k = \int_{A_k} \Phi + a, \quad a \neq 0. \quad (59)$$

Так как $A_k \in a_k$, то $\int_{A_k} S_k = \int_{A_k} S_{k+1}$.

Теперь повторим всю процедуру для S_{k+1} и A_k . Если произойдет „расщепление“, то лемма 8 будет доказана, в противном случае найдется уровень a_{k+1} такой, что для

$$A_{k+1} \equiv A_k \cap \{S_{k+1} = a_{k+1}\} \text{ имеем}$$

$$\int_{A_{k+1}} S_{k+1} = \int_{A_{k+1}} \Phi + a. \quad (60)$$

Если допустить, что при продолжении этих рассуждений ни на одном шаге не произойдет „расщепления“, то значит появится последовательность множеств $A_k \supset A_{k+1} \supset \dots$, удовлетворяющая условиям (59), (60), ...

Если $|A_n| \rightarrow 0$, то оставшуюся часть рассуждений надо проводить по той же схеме, как при доказательстве леммы 2 и тогда получится противоречие с условием (7) леммы (8).

Если же $|A_n| \neq 0$, то сопоставляя (59), (60), ... и (7), получим, что S_n на $\bigcap_{n=k} A_n$ сходится (очевидно равномерно) к функции Φ , а это

приведет к соотношению $\int_{\Omega} S_n \rightarrow \int_{\Omega} \Phi$, противоречащему исходной предпосылке (47). Подробные выкладки провести нетрудно, и мы их опустим.

Итак, лемма 8 доказана, а вместе с ней и теорема 3 (рассуждения проводятся по той же схеме, что и при доказательстве теоремы 1,

в данном случае надо пользоваться леммой 6 и сопоставлять соотношения (57) с исходным предположением (6)).

Лемма 9. Если $f \in F$ и для ряда $\sum a_i \cdot f_i$ выполнены условия (10), (11) и

$$\sum_1^{\infty} a_i^2 \cdot f_i^2 < \infty \text{ и. с. м.}, \quad (61)$$

то этот ряд является разложением функции Φ .

Доказательство. Если предположить противное, то по лемме 6 найдется замкнутое множество $\Omega \in \sigma_k$, удовлетворяющее неравенству (47), а по лемме 8 найдутся такие замкнутые множества ω_i , что

$$\omega_i \subset \Omega, \quad \omega_i \in \sigma_{m_i}, \quad \omega_i \cap \omega_j = \emptyset, \quad \int_{\omega_i} S_{m_i} \neq \int_{\omega_i} \Phi, \quad i = 1, 2. \quad (62)$$

Теперь к каждому из ω_i надо применить рассуждения, которые мы изложим для Ω из (47). Сумма ряда (61) не может быть ограниченной на Ω , ибо в противном случае сужение ряда (5) на Ω сходилось бы в метрике L^2 и почти всюду к функции Φ (ведь f_n , $n > k$ на Ω — центрированная и, следовательно, ортогональная система), а это противоречило бы неравенству (47). Покажем, что для произвольной постоянной $c > 0$ существует замкнутое множество ω с условиями

$$\omega \subset \Omega; \quad \omega \in \sigma_n, \quad n > k; \quad \int_{\omega} S_n \neq \int_{\omega} \Phi; \quad \sum_1^n a_i^2 \cdot f_i^2(t) > c, \quad \forall t \in \omega. \quad (63)$$

Противоположное допущение повлекло бы, что существует постоянная $a > 0$ такая, что для любого $n > k$ имеет место

$$\int_{\omega} S_n = \int_{\omega} \Phi, \quad \omega \equiv \Omega \cap \left\{ \sum_1^n a_i^2 \cdot f_i^2 > a \right\} \cap \left\{ \sum_1^{n-1} a_i^2 \cdot f_i^2 \leq a \right\}. \quad (64)$$

Определим момент остановки τ

$$\tau(t) = \min_{n > k} \left\{ n: \sum_1^n a_i^2 \cdot f_i^2(t) \geq a \right\}, \quad t \in \Omega. \quad (65)$$

Пусть B_j — множества уровней функции τ , т. е.

$$B_j = \{(\tau = n_j) \neq \emptyset\}, \quad j < \infty; \quad B_{\infty} = (\tau = \infty). \quad (66)$$

Очевидно, B_j попарно не пересекаются и верно (52). Новая последовательность $T_m \equiv S_{\tau \wedge m}$, $m \geq k$ ($\tau \wedge m \equiv \min(\tau, m)$) также будет мартингалом, причем в силу условия (10) сумма квадратов членов ряда, соответствующего мартингалу T_m , не превышает величину $a + \sup_i a_i^2 \cdot f_i^2$ на Ω . Отсюда (по соображениям ортогональности) следует, что мартингал T_m сходится на Ω в метрике L^2 и почти всюду к некоторой функции $\tilde{\Phi}$ с условиями (см. доказательство леммы 7)

$$\tilde{\Phi} = \Phi, \quad t \in B_{\infty}; \quad \int_{B_j} \tilde{\Phi} = \int_{B_j} \Phi, \quad \forall j < \infty. \quad (67)$$

Сопоставляя (67) и (52) получим, что функции $\bar{\Phi}$ и Φ имеют одинаковые интегралы на Ω . Следовательно, $\int_2 T_m - \int_2 \Phi$. Остается еще учесть, что $\int_2 T_m = \int_2 S$, для любого $m \geq k$, что приведет к противоречию с исходной предпосылкой (47).

Итак, (63) установлено. Сопоставляя (63) с (62), найдем для произвольного $c > 0$ непересекающиеся замкнутые ω_i , которые удовлетворяют условиям (62) и еще неравенствам

$$\sum_1^{m_i} a_k^2 \cdot f_k^2(t) > c, \quad \forall t \in \omega_i. \quad (68)$$

Оставшуюся часть рассуждений надо проводить так, как в конце доказательства теоремы 1.

Лемма 9 доказана.

Доказательство теоремы 4 проводится по такой же схеме, что и доказательство теоремы 2, только в данном случае надо пользоваться соотношениями (57), из леммы 8 и (63) из леммы 9, которые будут в нашем распоряжении, если исходить из того, что теорема 4 неверна. Последовательное применение этих соотношений по упомянутой схеме в конце концов приведет к противоречию с условием (9).

Теорема 4 доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 27.IV.198

Ռ. Ի. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ. Միակության բնույթի որոշ պնդումներ Հաարի սխեմայի և անընդհատ ֆունկցիաներից բաղկացած կենտրոնավորված սխեմաների համար (ամփոփում)

Աշխատանքում ապացուցվում են նոր բնույթի պնդումներ Հաարի շարքերի միակության վերաբերյալ և ցույց է տրվում, որ այդ պնդումները պահպանվում են օրթոգոնալ սխեմաների որոշ դասերի համար:

R. I. HOVSEPIAN, *Some theorems on uniqueness of series by Haar and continuous martingal differences systems (summary)*

In this paper we prove new type theorems on uniqueness of Haar series and show that these results hold for some classes of orthogonal systems.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Паплаускас. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега, Изд. «Наука», М., 1966.
2. Б. С. Кашин, А. А. Саакян. Ортогональные ряды, Изд. «Наука», М., 1984.
3. Г. М. Мушегян, Р. И. Овсепян. О единственности ортогональных рядов, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», IV, № 4, 1969, 259—266.
4. Р. И. Овсепян. О пустом множестве как M -множестве в классе общих ортонормированных систем, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIII, № 4, 1978, 261—274.

5. Г. Г. Геворкян. О единственности рядов по центрированным Н-системам, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 45 (1—2), 1982, 1—10.
6. Л. А. Шагинян. О единственности тригонометрических рядов, *ДАН Арм.ССР*, LXXVIII, № 3, 1984, 101—104.
7. Дж. Л. Дуб. Вероятностные процессы, Изд. ИЛ, М., 1956.
8. Ж. Невё. Математические основы теории вероятностей, Изд. «Мир», М., 1969.
9. R. F. Gundy. Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 124, 1966, 228—248.
10. А. В. Бахшеян. О структуре некоторых классов центрированных систем, *Изв. АН Арм.ССР, «Математика»*, XIII, № 4, 1978, 301—314.
11. А. В. Бахшеян. О центрированных системах в $C[0; 1]$, *Acta Sci. Math.*, 47, № 1—2, 1984, 223—231.
12. Р. И. Овсепян. О теоремах единственности для некоторых ортогональных систем, *Abstracts, Alfred Haar Memorial Conference, Budapest, 1985*, 43.
13. Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян. О единственности рядов по системам Хаара и Уолша, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 28:61, 1964, 1391—1408.
14. А. А. Талалян. О единственности двойных тригонометрических рядов, *Изв. АН Арм.ССР, «Математика»*, XX, № 6, 1985, 426—462.
15. М. Б. Петровская. О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности, *Изв. АН Арм.ССР, сер. матем.*, 28, № 4, 1964, 773—798.
16. Ф. Г. Арутюнян. Восстановление коэффициентов рядов по системам Хаара и Уолша, сходящихся к функциям, интегрируемым по Денжу, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 30, № 2, 1966, 325—344.
17. С. Сакс. Теория интеграла, Изд. ИЛ, М., 1949.
18. В. Д. Мильман. Геометрическая теория пространств Банаха, *УМН*, 25, № 3, 1970, 113—174.
19. Adriano M. Garsia. Topics in almost everywhere convergence, Chicago, 1970.
20. А. М. Олевский. Об одной ортонормальной системе и ее приложениях, *Матем. сб., новая серия*, 71, № 3, 1966, 297—336.
21. В. А. Скворцов. Некоторые обобщения теоремы единственности для рядов по системе Уолша, *Матем. заметки*, 13, № 3, 1973, 367—372.