ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIV, № 1, 1989 Математика

УДК 517.51

А. А. ТАЛАЛЯН и Ф. А. ТАЛАЛЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Введение

Как известно ([1], стр. 564) абсолютно непрерывная на прямоугольнике $J=[a,\ b]\times[c,\ d]$ функция двух переменных F представляется в виде

$$F(x,\ y)=g(x)+h(y)+\int_a^x\int_c^y f(s,\ t)\,ds\,dt, \tag{1.1}$$

где g и h — абсолютно непрерывные функции одной переменной на отрезках $[a,\ b]$ и $[c,\ d]$ соответственно и $f\in L^1(J)$.

В работе [2] приводится новое доказательство этого утверждения, основанное на теоремах Рисса о представлении и Радона—Никодима. Там же оно применяется при исследовании вопроса функциональной характеризации операторов вида $C+iD$, где D и C — коммутирующие вполне ограниченные операторы, действующие в заданном банаховом пространстве.

В настоящей работе с помощью теоремы сходимости мартингалов установлена справедливость формулы (1.1) для произвольной размерности и при более слабых ограничениях на свойство абсолютной непрерывности.

Будем пользоваться следующими обозначениями:

N — множество натуральных чисел,

R^n — n-мерное евклидово пространство,

$\{\mathbf{e}_1\cdots\mathbf{e}_n\}$ — стандартный базис пространства R^n,

μ_n — n-мерная мера Лебега,

$$D_k=\left\{\frac{l}{2^k}:l=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\right\},\quad k=0,\ 1,\ 2,\cdots;\quad D=\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k.$$

D_k^m (соответственно D^m) — прямое произведение m экземпляров $D_k\,(D)$.

Если $\mathbf{x}\in R^m$, то через x^i $(1\leqslant i\leqslant m)$ мы обозначим i-ю координату $\mathbf{x}$. Таким образом, $\mathbf{x}=(x^1,\cdots,\ x^m)$. Аналогично $\mathbf{a}=(a^1,\cdots,\ a^m)$, $\mathbf{b}=(b^1,\cdots,\ b^m)$, $\mathbf{u}=(u^1,\cdots,\ u^m)$ и т. д.

Пусть $\mathbf{x}\in R^m$ и $i_1,\cdots,\ i_k$ — произвольный набор натуральных чисел таких, что $1\leqslant k\leqslant m-1$ и $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m$. Обозначим через $r^{i_1,\cdots,i_k}(\mathbf{x})$ точку из R^{m-k}, полученную из $\mathbf{x}$ удалением координат $x^{i_1},\cdots,\ x^{i_k}$, через $t^{i_1,\cdots,i_k}(\mathbf{x})$ — точку из R^k, полученную из $\mathbf{x}$ сохранением указанных координат и удалением остальных.

Если $E \subset R^m$, то полагаем

$$r^{i_1, \dots, i_k}(E) = \{r^{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in E\}$$

и

$$t^{i_1, \dots, i_k}(E) = \{t^{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in E\}.$$

Пусть, как и выше, $1 \leqslant k \leqslant m-1$, $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m$ — натуральные числа и $w^1, \dots, w^k$ — действительные числа. Для любого $\mathbf{x} \in R^m$ через $s^{i_1, \dots, i_k}_{w^1, \dots, w^k}(\mathbf{x})$ мы будем обозначать точку из R^m, полученную из $\mathbf{x}$ заменой x^{i_p} на w^p, $p=1, \dots, k$. Заметим, что если $\mathbf{y}=(y^1, \dots, y^m) \in R^m$, то $s^{i_1, \dots, i_k}_{y^{i_1}, \dots, y^{i_k}}(\mathbf{x})$ есть точка пересечения k-мерной плоскости, параллельной векторам $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}$, проходящей через $\mathbf{x}$ с $(m-k)$-мерной плоскостью, перпендикулярной векторам $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}$, проходящей через $\mathbf{y}$.

Если $E \subset R^m$, то мы полагаем

$$E^{i_1, \dots, i_k}_{w^1, \dots, w^k} = \{r^{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in E,\ t^{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x}) = (w^1, \dots, w^k)\}.$$

Наконец, если F — функция m переменных, то через $F^{i_1, \dots, i_k}_{w^1, \dots, w^k}$ мы обозначим функцию $m-k$ переменных, определенную равенством

$$F^{i_1, \dots, i_k}_{w^1, \dots, w^k}(r^{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x})) = F(s^{i_1, \dots, i_k}_{w^1, \dots, w^k}(\mathbf{x})).$$

В дальнейшем мы будем иметь дело с многомерными сегментами, грани которых параллельны координатным подпространствам (т. е. подпространствам, порожденным векторами из стандартного базиса). Каждый такой m-мерный сегмент J задается двумя точками $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из R^m такими, что $a^i \neq b^i$ для всех $i = 1, \dots, m$, а именно, J совпадает с множеством

$$J(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in R^m : \min(a^i, b^i) \leqslant x^i \leqslant \max(a^i, b^i),\ i = 1, \dots, m\}, \quad (1.2)$$

Вершины сегмента $J(\mathbf{a}; \mathbf{b})$, заданного равенством (1.2) — это те точки $\mathbf{v} \in R^m$, для которых при любом $i=1, \dots, m$ либо $v^i=a^i$, либо $v^i=b^i$. При этом, очевидно, сегмент J может быть задан любой другой парой своих вершин $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ таких, что $u^i \neq v^i$, $i=1, \dots, m$. В этом случае мы будем говорить, что пара вершин $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ является определяющей для J

Будем говорить, что сегмент J ориентирован, если каждой вершине J приписан знак $+$ или $-$ так, что знаки, приписанные соседним вершинам (т. е. вершинам, у которых все координаты кроме одной совпадают) различны.

Пусть $\mathbf{a}$ — некоторая фиксированная вершина сегмента J. Каждой вершине $\mathbf{v}$ припишем знак $(-1)^{q(\mathbf{v}; \mathbf{a})}$, где $q(\mathbf{v}; \mathbf{a})$ — число координат v^i вершины $\mathbf{v}$, совпадающих с соответствующими координатами a^i выбранной вершины $\mathbf{a}$. Таким образом, выбор одной вершины задает определенную ориентацию на данном сегменте. Справедливо и обратное. Каждая ориентация определяется некоторой вершиной. Как следует из леммы 4 для любых двух фиксированных вершин $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ сегмента J разность $q(\mathbf{v};\ \mathbf{a}) - q(\mathbf{v};\ \mathbf{c})$ имеет постоянную четность. Поэтому на каждом сегменте возможны только две ориентации.

Будем говорить, что m-мерный сегмент J ориентирован положительно, если его ориентация совпадает с ориентацией, определяемой вершиной с минимальными координатами. В противном случае J называется отрицательно ориентированной. Если $\mathbf{v}$ — вершина ориентированного сегмента J, то приписанный ей знак будем обозначать через $s(\mathbf{v};\ J)$.

Если m-мерный сегмент J ориентирован по вершине $\mathbf{a}$ и $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant m$, то $(m-k)$-мерный сегмент $r^{i_1, \cdots, i_k}(J)$ всегда будем считать ориентированным по вершине $r^{i_1, \cdots, i_k}(\mathbf{a})$. Аналогично понимается выражение $t^{i_1, \cdots, i_k}(J)$. Ориентированные сегменты $r^{i_1, \cdots, i_k}(J)$ и $t^{i_1, \cdots, i_k}(J)$ будем называть ориентированными проекциями ориентированного сегмента J.

Пусть теперь J есть ориентированный m-мерный сегмент и F — действительная функция, область определения которой содержит все вершины J. Положим

$$\Delta_m(F;\ J) = \sum s(\mathbf{v};\ J)\, F(\mathbf{v}), \tag{1.3}$$

где сумма берется по всем вершинам $\mathbf{v}$ сегмента J.

Величину $\Delta_m(F;\ J)$ принято называть смешанной разностью F на J. Очевидно при переходе к противоположной ориентации смешанная разность меняет знак.

Пусть, наконец, J есть m-мерный сегмент и f — действительная измеримая функция на J. Пусть на J выбрана некоторая ориентация. Тогда интеграл

$$\int\limits_J f\, d\mu_m$$

по ориентированному сегменту J полагается, по определению, равным обычному интегралу Лебега помноженному на коэффициент $+1$ или -1 в зависимости от того, положительно или отрицательно ориентирован J.

Теперь мы можем привести основные определения и формулировки результатов.

Определение 1. Пусть F — действительная функция, заданная на R^m и $E \subset R^m$ — измеримое множество. Функция F называется абсолютно непрерывной по Витали на E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что каково бы ни было конечное семейство $\{J_k;\ k = 1, \cdots, n\}$ попарно неперекрывающихся m-мерных сегментов с вершинами из E и с суммой мер

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_m(J_k) < \delta,$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta_m(F;\ J_k)| < \varepsilon.$$

F называется абсолютно непрерывной по Витали почти всюду на m-мерном сегменте J, если F абсолютно непрерывна по Витали на некотором множестве $E \subset J$ с $\mu_m(J \setminus E) = 0$.

Определение 2. Пусть J—m-мерный сегмент, F—действительная функция, заданная на J и $E \subset J$—измеримое множество с $\mu_m(J \setminus E) = 0$. Функция F называется абсолютно непрерывной на E, если выполняются следующие условия:

а) F абсолютно непрерывна по Витали на E.

б) Для каждого набора натуральных чисел $i_1, \cdots, i_k$ таких, что $1 \leqslant k \leqslant m-1$ и $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant m$, для μ_k-почти всех $\mathbf{y} = (y^1, \cdots \cdots y^k) \in t^{i_1, \cdots, i_k}(J)$ функция $F^{i_1, \cdots, i_k}_{y^1, \cdots, y^k}$ абсолютно непрерывна по Витали μ_{m-k}-почти всюду на $(m-k)$-мерном сегменте $r^{i_1, \cdots, i_k}(J)$.

F называется абсолютно непрерывной почти всюду на J, если F абсолютно непрерывна на некотором множестве $E \subset J$ с $\mu_m(J \setminus E) = 0$.

Теорема 1. *Пусть J—m-мерный сегмент и F—действительная функция, абсолютно непрерывная по Витали почти всюду на J. Тогда существуют точка $\mathbf{a} \in J$ и функция $f \in L^1(J)$ такие, что для почти всех $x \in J$ имеет место равенство*

$$\Delta_m(F;\ J(\mathbf{a};\ \mathbf{x})) = \int\limits_{J(\mathbf{a};\ \mathbf{x})} f\, d\mu_m,$$

где $J(\mathbf{a}; \mathbf{x})$—ориентированный сегмент, определенный точками $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}$.

Указанным свойством обладают почти все точки $\mathbf{a} \in J$.

Теорема 2. *Пусть J—m-мерный сегмент и F—действительная функция, абсолютно непрерывная почти всюду на J. Тогда какова бы ни была точка $\mathbf{a} \in J$ существуют постоянная C и функции $f \in L^1(J)$ и $f_{i_1, \ldots, i_k} \in L^1(r^{i_1, \cdots, i_k}(J))$ для всех наборов натуральных чисел $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant m$ такие, что для почти всех $\mathbf{x} \in J$ имеет место равенство*

$$F(\mathbf{x}) = \int\limits_{J(\mathbf{a},\ \mathbf{x})} f\, d\mu_m + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant m} \int\limits_{r^{i_1, \cdots, i_k}(J(\mathbf{a};\ \mathbf{x}))} f_{i_1, \ldots, i_k}\, d\mu_{m-k} + C, \quad (1.5)$$

где $J(\mathbf{a}; \mathbf{x})$ считается ориентированным по вершине $\mathbf{a}$ и $r^{i_1, \cdots, i_k} J(\mathbf{a}; \mathbf{x}))$ — ориентированная проекция $J(\mathbf{a};\ \mathbf{x})$.

Теорема 3. *Пусть $T_0 \subset R^m$ есть измеримое множество положительной меры и F—измеримая функция, абсолютно непрерывная по Витали на множестве $\mathbf{t} + D^m$ для каждого $\mathbf{t} \in T_0$. Тогда F абсолютно непрерывна по Витали почти всюду на R^m.*

Непосредственным следствием теорем 2 и 3 является следующая

Теорема 4. *Пусть F—измеримая функция m переменных, определенная на m-мерном сегменте J, удовлетворяющая условиям*

а) Существует множество $T_0 \subset R^m$ с $\mu_m(T_0) > 0$ такое, что при любом $\mathbf{t} \in T_0$ функция F абсолютно непрерывна по Витали на множестве $(\mathbf{t} + D^m) \cap J$.

б) *Для каждого набора натуральных чисел* $i_1, \cdots, i_k$ *таких, что* $1 \leqslant k \leqslant m-1$ *и* $1 \leqslant i_1 < \cdots i_k \leqslant m$, *и для* μ_m*-почти всех* $(y^1, \cdots, y^k) \in t^{i_1, \cdots, i_k}(J)$ *существует множество*

$$T(i_1, \cdots, i_k;\ y^1, \cdots, y^k) \subset R^{m-k} \text{ с } \mu_{m-k}(T(i_1, \cdots, i_k;\ y^1, \cdots, y^k)) > 0$$

такое, что при любом $\mathbf{t} \in T(i_1, \cdots, i_k;\ y^1, \cdots, y^k))$ *функция* $F^{i_1, \cdots, i_k}_{y^1, \cdots, y^k}$ *абсолютно непрерывна по Витали на множестве* $(\mathbf{t} + D^{m-k}) \cap \cap r^{i_1, \cdots, i_k}(J)$.

Тогда для функции F *справедливо представление* (1.5).

§ 2. Предварительные леммы

Лемма 1. *Пусть* $E \subset R^m$ — *измеримое множество с* $\mu_m(R^m \diagdown \diagdown E) = 0$. *Тогда для почти всех* $\mathbf{u} \in R^m$ *справедливо включение*

$$\mathbf{u} + D^m \subset E.$$

Доказательство. Имеем

$$\mu_m(R^m \diagdown \{\mathbf{u} \in R^m : \mathbf{u} + D^m \subset E\}) = \mu_m(R^m \diagdown \bigcap_{\mathbf{x} \in D^m} \{\mathbf{u} \in R^m : \mathbf{u} + \mathbf{x} \in E\}) =$$

$$= \mu_m(\bigcap_{\mathbf{x} \in D^m} \{\mathbf{u} \in R^m : \mathbf{u} + \mathbf{x} \,\overline{\in}\, E\}) \leqslant \sum_{\mathbf{x} \in D^m} \mu_m \{\mathbf{u} \in R^m : \mathbf{u} \,\overline{\in}\, E - \mathbf{x}\} =$$

$$= \sum_{\mathbf{x} \in D^m} \mu_m(R^m \diagdown E - \mathbf{x}) = 0.$$

Лемма 2. *Пусть* $E \subset R^m$ — *измеримое множество с* $\mu_m(R^m \diagdown \diagdown E) = 0$. *Тогда почти каждой точке* $\mathbf{u} \in R^m$ *соответствует измеримое множество* $H(\mathbf{u})$ *с* $\mu_m(R^m \diagdown H(\mathbf{u})) = 0$ *такое, что если* $\mathbf{v} \in \in H(\mathbf{u})$, *то*

$$s^{i_1, \cdots, i_k}_{v^{i_1}, \cdots, v^{i_k}}(\mathbf{u}) \in E \text{ и } s^{i_1, \cdots, i_k}_{u^{i_1}, \cdots, u^{i_k}}(\mathbf{v}) \in E \tag{2.1}$$

для всех $k,\ i_1, \cdots, i_k$, *где* $1 \leqslant k \leqslant m$, $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k < m$.

Доказательство. Пусть $k,\ i_1, \cdots, i_k$ зафиксированы, и пусть $j_1, \cdots, j_{m-k}$ — все натуральные числа, не превосходящие m, отличные от всех $i^1, \cdots, i_k$, занумерованные в порядке возрастания.

В силу теоремы Фубини существует измеримое множество $A_{i_1, \cdots, i_k} \subset R^k$ с $\mu_k(R^k \diagdown A_{i_1, \cdots, i_k}) = 0$ такое, что для любого $\mathbf{a} = (a^1, \cdots \cdots, a^{\nu}) \in A_{i_1, \cdots, i_k}$ имеет место

$$\mu_{m-k}(R^{m-k} \diagdown E^{i_1, \cdots, i_k}_{a^1, \cdots, a^k}) = 0. \tag{2.2}$$

С другой стороны, существует множество $B_{i_1, \cdots, i_k} \subset R^{m-k}$ с $\mu_{m-k}(R^{m-k} \diagdown B_{i_1, \cdots, i_k}) = 0$ такое, что для любого $\mathbf{b} = (b^1, \cdots, b^{m-k}) \in \in B_{i_1, \cdots, i_k}$ имеет место

$$\mu_k(R^k \diagdown E^{j_1, \cdots, j_{m-k}}_{b^1, \cdots, b^{m-k}}) = 0. \tag{2.3}$$

Пусть

$$G_{i_1,\dots,i_k}=\{\mathbf{x}\in R^m : t^{i_1,\dots,i_k}(\mathbf{x})\in A_{i_1,\dots,i_k},\ r^{i_1,\dots,i_k}(\mathbf{x})\in B_{i_1,\dots,i_k}\} \tag{2.4}$$

и для каждого $\mathbf{u}\in G_{i_1,\dots,i_k}$ пусть

$$H_{i_1,\dots,i_k}(\mathbf{u})=\{\mathbf{x}\in R^m : t^{i_1,\dots,i_k}(\mathbf{x})\in E^{j_1,\dots,j_{m-k}}_{u^{j_1},\dots,u^{j_{m-k}}};\ r^{i_1,\dots,i_k}(\mathbf{x})\in E^{i_1,\dots,i_k}_{u^{i_1},\dots,u^{i_k}}\}. \tag{2.5}$$

Тогда, очевидно, имеем

$$\mu_m(R^m\setminus G_{i_1,\dots,i_k})=0. \tag{2.6}$$

Так как $(u^{i_1},\dots,u^{i_k})\in A_{i_1,\dots,i_k}$ и $(u^{j_1},\dots,u^{j_{m-k}})\in B_{i_1,\dots,i_k}$, то в силу (2.2) и (2.3) имеем также

$$\mu_m(R^m\setminus H_{i_1,\dots,i_k}(\mathbf{u}))=0 \text{ для любого } \mathbf{u}\in G_{i_1,\dots,i_k}. \tag{2.7}$$

Теперь положим

$$G=\bigcap_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant m} G_{i_1,\dots,i_k}$$

и для каждого $\mathbf{u}\in G$

$$H(\mathbf{u})=\bigcap_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant m} H_{i_1,\dots,i_k}(\mathbf{u}).$$

Тогда из (2.6) и (2.7) имеем

$$\mu_m(R^m\setminus G)=0 \tag{2.8}$$

и

$$\mu_m(R^m\setminus H(\mathbf{u}))=0 \text{ для каждого } \mathbf{u}\in G. \tag{2.9}$$

Далее пусть $\mathbf{u}\in G$, $\mathbf{v}\in H(\mathbf{u})$ и $i_1,\dots,i_k$ заданы. Тогда $\mathbf{u}\in G_{i_1,\dots,i_k}$, $\mathbf{v}\in H_{i_1,\dots,i_k}(\mathbf{u})$. Поэтому, в силу (2.5) имеем

$$t^{i_1,\dots,i_k}(\mathbf{v})\in E^{j_1,\dots,j_{m-k}}_{u^{j_1},\dots,u^{j_{m-k}}} \text{ и } r^{i_1,\dots,i_k}(\mathbf{v})\in E^{i_1,\dots,i_k}_{u^{i_1},\dots,u^{i_k}}.$$

Отсюда получаем

$$s^{i_1,\dots,i_k}_{v^{i_1},\dots,v^{i_k}}(\mathbf{u}),\ s^{i_1,\dots,i_k}_{u^{i_1},\dots,u^{i_k}}(\mathbf{v})\in E \text{ для } \mathbf{u}\in G,\ \mathbf{v}\in H(\mathbf{u}).$$

Так как справедливы (2.8) и (2.9), то этим лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $E\subset R^m$ — измеримое множество с $\mu_m(R^m\setminus E)=0$. Тогда для почти всех $\mathbf{u}\in R^m$ выполняются следующие условия:*

1) $\mathbf{u}+D^m\subset E$.

2) *Существует измеримое множество $H(\mathbf{u})\subset R^m$ с $\mu_m(R^m\setminus H(\mathbf{u}))=0$ такое, что при $\mathbf{v}\in H(\mathbf{u})$*

$$s^{i_1,\dots,i_k}_{v^{i_1}+y^{i_1},\dots,v^{i_k}+y^{i_k}}(\mathbf{u}+\mathbf{x})\in E \text{ и } s^{i_1,\dots,i_k}_{u^{i_1}+x^{i_1},\dots,u^{i_k}+x^{i_k}}(\mathbf{v}+\mathbf{y})\in E$$

для всех $\mathbf{x},\mathbf{y}\in D^m$, $1\leqslant k\leqslant m$ и $1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant m$.

Доказательство. Для каждой пары точек $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D^m$ положим

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigcap_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} [(E - s^{i_1, \ldots, i_k}_{y^{i_1}, \ldots, y^{i_k}}(\mathbf{x})) \cap (E - s^{i_1, \ldots, i_k}_{x^{i_1}, \ldots, x^{i_k}}(\mathbf{y}))]. \quad (2.10)$$

Очевидно, $\mu_m(R^m \setminus E(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 0$. Применяя лемму 2 к множеству $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, построим соответствующее множество $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и положим

$$G = \bigcap_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D^m} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Тогда

$$\mu_m(R^m \setminus G) = 0 \quad (2.11)$$

и каждому $\mathbf{u} \in G$ при заданных $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D^m$ соответствует множество $H(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, для которого справедливо утверждение леммы 2. Положим

$$H(\mathbf{u}) = \bigcap_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D^m} H(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Тогда

$$\mu_m(R^m \setminus H(\mathbf{u})) = 0 \text{ для всех } \mathbf{u} \in G, \quad (2.12)$$

Пусть $\mathbf{u} \in G$ и $\mathbf{v} \in H(u)$. Тогда $\mathbf{u} \in G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\mathbf{v} \in H(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D^m$. Следовательно будем иметь

$$s^{i_1, \ldots, i_k}_{v^{i_1}, \ldots, v^{i_k}}(\mathbf{u}) \in E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ и } s^{i_1, \ldots, i_k}_{u^{i_1}, \ldots, u^{i_k}}(\mathbf{v}) \in E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D^m$ и $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$. Отсюда, в силу (2.10) получаем

$$s^{i_1, \ldots, i_k}_{v^{i_1}, \ldots, v^{i_k}}(\mathbf{u}) \in E - s^{i_1, \ldots, i_k}_{y^{i_1}, \ldots, y^{i_k}}(\mathbf{x}) \text{ и } s^{i_1, \ldots, i_k}_{u^{i_1}, \ldots, u^{i_k}}(\mathbf{v}) \in E - s^{i_1, \ldots, i_k}_{x^{i_1}, \ldots, x^{i_k}}(\mathbf{y})$$

или

$$s^{i_1, \ldots, i_k}_{v^{i_1}+y^{i_1}, \ldots, v^{i_k}+y^{i_k}}(\mathbf{u} + \mathbf{x}) \in E \text{ и } s^{i_1, \ldots, i_k}_{u^{i_1}+x^{i_1}, \ldots, u^{i_k}+x^{i_k}}(\mathbf{v} + \mathbf{y}) \in E$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in D^m$ и $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$.

Тем самым, учитывая (2.11) и (2.12), мы видим, что доказано условие 2) леммы 3. Справедливость условия 1) для почти всех $\mathbf{u} \in R^m$ следует из леммы 1.

Следующие три леммы относятся к свойствам смешанной разности.

Лемма 4. *Пусть J — m-мерный сегмент, F — действительная функция, заданная на J, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ — вершины J, $J^{\mathbf{a}}$ и $J^{\mathbf{c}}$ — соответствующие ориентированные сегменты с ориентациями, определяемыми вершинами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ соответственно. Тогда*

$$\Delta_m(F; J^{\mathbf{c}}) = (-1)^{m-q(\mathbf{c}, \mathbf{a})} \Delta_m(F; J^{\mathbf{a}}). \quad (2.13)$$

Доказательство. Пусть $i_1, \cdots, i_{q(\mathbf{c}; \mathbf{a})}$ — все натуральные числа между 1 и m, для которых $c^{i_r} = a^{i_r}$, $1 \leq r \leq q(\mathbf{c}; \mathbf{a})$. Рассмотрим произвольную вершину $\mathbf{v}$ сегмента J. Пусть p — число тех i_r, $1 \leq r \leq q(\mathbf{c}; \mathbf{a})$, для которых $v^{i_r} = a^{i_r}$. Тогда, очевидно имеем

$q(\mathbf{v};\ \mathbf{c}) = p + m - q(\mathbf{c};\ \mathbf{a}) - (q(\mathbf{v};\ \mathbf{a}) - p) = 2p + m - q(\mathbf{c};\ \mathbf{a}) - q(\mathbf{v};\ \mathbf{a})$,

откуда следует (2.13).

Лемма 5. *Пусть G — действительная функция, заданная на m-мерном сегменте $J(\mathbf{a};\ \mathbf{b})$. Если $J(\mathbf{a};\ \mathbf{b})$ ориентирован по вершине $\mathbf{a}$, то имеет место равенство*

$$\Delta_m(G;\ J(\mathbf{a};\ \mathbf{b})) = G(\mathbf{b}) -$$

$$-\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{1 \leqslant l_1 < \cdots < l_k \leqslant m} \Delta_{m-k}\left(G^{l_1,\dots,l_k}_{a^{l_1},\dots,a^{l_k}};\ r^{l_1,\dots,l_k}(J(\mathbf{a};\ \mathbf{b}))\right) - G(\mathbf{a}), \quad (2.14)$$

где $r^{l_1,\dots,l_k}(J(\mathbf{a};\ \mathbf{b}))$ — ориентированные проекции ориентированного сегмента $J(\mathbf{a};\ \mathbf{b})$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную вершину $\mathbf{v} = (v^1, \cdots, v^m)$ сегмента $J(\mathbf{a};\ \mathbf{b})$. Пусть $q(\mathbf{v};\ \mathbf{a}) = n$, $1 \leqslant n \leqslant m$. Тогда непосредственное вычисление показывает, что $G(\mathbf{v})$ входит в правую часть (2.14) с коэффициентом $-\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}$.

Далее, из формулы

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k} = 1$$

следует, что указанный коэффициент равен $(-1)^n$, что и требовалось.

Следствие. Пусть J — m-мерный сегмент, $\mathbf{a} \in J$ — фиксированная точка и G — действительная функция, заданная на J. Тогда для всех $\mathbf{x} \in J$ имеет место равенство

$$G(\mathbf{x}) = \Delta_m(G;\ J(\mathbf{a};\ \mathbf{x})) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{1 \leqslant l_1 < \cdots < l_k \leqslant m} \Delta_{m-k}\left(G^{l_1,\dots,l_k}_{a^{l_1},\dots,a^{l_k}};\ r^{l_1,\dots,l_k}(J(\mathbf{a};\ \mathbf{x}))\right) + G(\mathbf{a}), \quad (2.15)$$

где $J(\mathbf{a}:\ \mathbf{x})$ предполагается ориентированным по вершине $\mathbf{a}$.

Лемма 6. *Пусть m-мерный сегмент J разбит на конечное число попарно непрекрывающихся сегментов $J_1, \cdots, J_n$, и пусть F — действительная функция, область определения которой содержит вершины всех сегментов $J_1, \cdots, J_n$. Тогда, предполагая сегменты $J, J_1, \cdots, J_n$ одинаково ориентированными, будем иметь*

$$\Delta_m(F:\ J) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_m(F;\ J_k). \quad (2.16)$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть тот случай, когда J разбит на два сегмента J_1 и J_2. При этом, очевидно, можно считать, что все они ориентированы положительно. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — вершины, определяющие J, причем $a^i < b^i$ для всех $i = 1, \cdots, m$. Тогда существуют натуральное число $j \leqslant m$ и действительное число $t \in (a^j, b^j)$ такие, что J_1 определяется точками $\mathbf{a}$ и $s_t^j(\mathbf{b})$, а J_2 — точками $s_t^j(\mathbf{a})$ и $\mathbf{b}$.

Точки $\mathbf{v}$, являющиеся общими вершинами J_1 и J_2, характеризуются условием

$$v^i = \begin{cases} t \text{ при } i = j \\ a^i \text{ или } b^i \text{ при } i \neq j, \end{cases}$$

откуда следует, что $q(\mathbf{v};\ s_i^j(\mathbf{a})) = q(\mathbf{v};\ \mathbf{a}) + 1$. Тогда, в силу положительной ориентированности J_1 и J_2, имеем

$$s(\mathbf{v};\ J_2) = -s(\mathbf{v};\ J_1). \tag{2.17}$$

С другой стороны, имеем следующее. Если $\mathbf{v}$ является вершиной для J и $v^j = a^j$, то $\mathbf{v}$ будет также вершиной для J_1, причем

$$s(\mathbf{v};\ J) = s(\mathbf{v};\ J_1). \tag{2.18}$$

Аналогично, если $\mathbf{v}$ есть вершина для J и $v^j = b^j$, то $\mathbf{v}$ будет также вершиной для J_2, причем

$$s(\mathbf{v};\ J) = s(\mathbf{v};\ J_2). \tag{2.19}$$

Теперь из (1.4), (2.17), (2.18) и (2.19) получаем

$$\Delta_m(F;\ J) = \Delta_m(F;\ J_1) + \Delta_m(F;\ J_2),$$

что и требовалось.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится также следующая

Лемма 7. *Пусть J — m-мерный сегмент, $E \subset J$ — измеримое множество, содержащее $D^m \cap J$ с $\mu_m(J \setminus E) = 0$ и F — действительная функция, абсолютно непрерывная по Витали на E. Тогда величина $V_m(F;\ E)$, определенная равенством*

$$V_m(F;\ E) = \sup \sum_l |\Delta_m(F;\ J_l)|, \tag{2.20}$$

где супремум берется по всем конечным системам попарно непрекрывающихся сегментов $\{J_l\}$ с вершинами из $D^m \cap E$, конечна.

Доказательство. Выберем такое число $\delta > 0$, что как только $\{I_r\}$ есть конечная система попарно непрекрывающихся сегментов с вершинами из E и $\sum_r \mu_m(I_r) < \delta$, то $\sum_r |\Delta_m(F; I_r)| < 1$.

Пусть $\{J_l\}$ — некоторая конечная система попарно неперекрывающихся сегментов с вершинами из $D^m \cap E$. Возьмем настолько большое натуральное число k, чтобы вершины всех сегментов J_l принадлежали D_k^m и чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{2^{km}} < \frac{\delta}{2}. \tag{2.21}$$

Тогда каждый сегмент J_l можно разбить на элементарные сегменты k-го ранга. Пусть $I_1, \cdots, I_n$ — все элементарные сегменты k-го ранга, участвовавшие во всех указанных разбиениях. Тогда, в силу леммы 6 имеем

$$\sum_{i} |\Delta_m(F;\ J_i)| \leqslant \sum_{r=1}^{n} |\Delta_m(F;\ I_r)|. \tag{2.22}$$

Так как $\mu_m(I_r) = 1/2^{km}$; $r = 1, \cdots, n$, то в силу (2.21) сумму, стоящую в правой части (2.22), можно представить в виде

$$\sum_{r=1}^{n} |\Delta_m(F;\ I_r)| = \sum_{j=1}^{l} \sum_{r=r_j}^{r_{j+1}-1} |\Delta_m(F;\ I_r)| + c_{l+1}, \tag{2.23}$$

где

$$1 = r_1 < r_2 < \cdots < r_{l+1} - 1 \leqslant n, \tag{2.24}$$

$$\frac{\delta}{2} < \sum_{r=r_j}^{r_{j+1}-1} \mu_m(I_r) < \delta;\ j = 1, \cdots, l \tag{2.25}$$

и

$$c_{l+1} = \begin{cases} 0, \text{ если } r_{l+1} = n+1, \\ \sum\limits_{r=r_j}^{n} |\Delta_m(F;\ I_r)|, \text{ если } r_{l+1} < n+1. \end{cases} \tag{2.26}$$

При этом, если $r_{l+1} < 1$, то имеем

$$\sum_{r=r_{l+1}}^{n} \mu_m(I_r) \leqslant \frac{\delta}{2}. \tag{2.27}$$

Из (2.24) и левого неравенства (2.25) следует, что

$$l < \frac{2\mu_m(J)}{\delta}. \tag{2.28}$$

С другой стороны, в силу выбора δ, из правого неравенства (2.25) и из (2.26) следуют соответственно

$$\sum_{r=r_j}^{r_{j+1}-1} |\Delta_m(F;\ I_r)| < 1,\ j = 1, \cdots, l \tag{2.29}$$

и

$$0 \leqslant c_{l+1} < 1. \tag{2.30}$$

Из (2.22), (2.23), (2.28), (2.29) и (2.30) получаем оценку

$$\sum_{i} |\Delta_m(F;\ J_i)| \leqslant \frac{2\mu_m(J)}{\delta} + 1,$$

откуда следует конечность $V_m(F;\ E)$. Лемма 7 доказана.

§ 3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть $E \subset J$, $\mu_m(J \setminus E) = 0$ и F—действительная функция, абсолютно непрерывная по Витали на E. В силу леммы 3 существует точка $a \in E$ и множество $H \subset E$ с $\mu_m(J \setminus H) = 0$ такие, что

$$(a + D^m) \cap J \subset E \tag{3.1}$$

и

$$s^{i_1,\dots,i_k}_{v^{i_1}+y^{i_1},\dots,v^{i_k}+y^{i_k}}(\mathbf{a}+\mathbf{x}),\ s^{i_1,\dots,i_k}_{v^{i_1}+x^{i_1},\dots,v^{i_k}+x^{i_k}}(\mathbf{v}+\mathbf{y})\in E\cup(R^m\setminus J) \quad (3.2)$$

для всех $\mathbf{v}\in H$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\in D^m$, $1\leqslant k\leqslant m$ и $1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant m$.

Зафиксируем некоторую точку $\mathbf{a}\in E$, обладающую свойствами (3.1) и (3.2). Далее, построим последовательность $\{f_k;\ k\in N\}$ функций, определенных почти всюду на J следующим образом. Для заданного $k\in N$ пусть $J^{(k)}$ — это наибольший сегмент, содержащийся в J, вершины которого принадлежат $\mathbf{a}+D^m_k$ и $\{J^{(k)}_{k,i},\ i=1,\cdots,l(k)\}$ — разбиение $J^{(k)}$ на элементарные сегменты k-го ранга с вершинами из $\mathbf{a}+D^m_k$. При этом будем считать сегменты $J^{(k)}$ и $J^{(k)}_{k,i}$; $i=1,\cdots,l(k)$ положительно ориентированными. Положим

$$f_k(\mathbf{x})=\begin{cases}\dfrac{\Delta_m(F;\ J^{(k)}_{k,i})}{\mu_m(J^{(k)}_{k,i})}, & \text{при } \mathbf{x}\in\operatorname{int}(J^{(k)}_{k,i})\\ 0, & \text{при } \mathbf{x}\in J\setminus J^{(k)}.\end{cases}$$

Пусть $q\in N$ — фиксированное число. Для каждого $k\geqslant q$ пусть $B(q,k)$ это σ-алгебра подмножеств $J^{(q)}$, порожденная элементарными сегментами k-го ранга $J^{(q)}_{k,i}$, $i=1,\cdots,l(q,k)$ с вершинами из $\mathbf{a}+D^m_k$, содержащимися в $J^{(q)}$. Докажем, что последовательность $\{f_k,\ B(q,k);\ k\geqslant q\}$ есть равномерно интегрируемый мартингал.

Действительно, представив каждый сегмент $J^{(q)}_{k,i}$ в виде объединения сегментов $(k+1)$-го ранга: $J^{(q)}_{k,i}=\bigcup\limits_{r=1}^{2^m} I_r$ и считая их положительно ориентированными, в силу леммы 6 будет иметь

$$\int\limits_{J^{(q)}_{k,i}} E(f_{k+1}\mid B(q,k))\,d\mu_m=\int\limits_{J^{(q)}_{k,i}} f_{k+1}\,d\mu_m=\sum_{r=1}^{2^m}\int\limits_{I_r} f_{k+1}\,d\mu_m=$$

$$=\sum_{r=1}^{2^m}\Delta_m(F;\ I_r)=\Delta_m(F;\ J^{(q)}_{k,i})=\int\limits_{J^{(q)}_{k,i}} f_k\,d\mu_m.$$

Отсюда, в силу $B(q,k)$-измеримости функций $E(f_{k+1}\mid B(q,k))$ и f_k, получаем

$$E(f_{k+1}\mid B(q,k))=f_k.$$

Таким образом, $\{f_k,\ B(q,k);\ k\geqslant q\}$ есть мартингал. Докажем его равномерную интегрируемость.

Пусть $\varepsilon>0$ задано. Выберем $\eta>0$ так, чтобы из $\sum\limits_r \mu_m(J_r)\leqslant\eta$ вытекало $\sum\limits_r|\Delta_m(F;\ J_r)|\leqslant\varepsilon$, где $\{J_r\}$ — произвольная конечная система попарно неперекрывающихся сегментов с вершинами из $E\cap J^{(q)}$, и положим $\delta=\eta\varepsilon$.

Пусть, теперь, $A\subset J^{(q)}$ — произвольное измеримое множество с $\mu_m(A)<\delta$ и $k\geqslant q$ — натуральное число. Положим

$$N_1 = \left\{ i \in N : 1 \leqslant i < l(q,\ k),\quad \mu_m (J^{(q)}_{k,\,i}) < \frac{1}{\varepsilon}\, \mu_m (J^{(q)}_{k,\,i} \cap A) \right\}$$

и $N_2 = \{1, \cdots, l(q,\ k)\} \setminus N_1$. Тогда

$$\sum_{i \in N_1} \mu_m (J^{(q)}_{k,\,i}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\, \mu_m (A) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\, \delta = \eta,$$

откуда, в силу выбора η, имеем

$$\sum_{i \in N_1} |\Delta_m (F;\ J^{(q)}_{k,\,i})| \leqslant \varepsilon. \tag{3.3}$$

С другой стороны, выполняется неравенство

$$\sum_{i \in N_2} \frac{|\Delta_m (F;\ J^{(q)}_{k,\,i})|}{\mu_m (J^{(q)}_{k,\,i})}\, \mu_m (J^{(q)}_{k,\,i} \cap A) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \cdot \sum_{i \in N_2} |\Delta_m (F;\ J^{(q)}_{k,\,i})| \leqslant \varepsilon\, V_m (F;\ E \cap J^{(q)}). \tag{3.4}$$

В силу неравенств (3.3) и (3.4) имеем

$$\int_A |f_k|\, d\mu_m = \sum_{i=1}^{l(q,\,k)} \int_{J^{(q)}_{k,\,i} \cap A} |f_k|\, d\mu_m = \sum_{i \in N_1} \frac{|\Delta_m (F;\ J^{(q)}_{k,\,i})|}{\mu_m (J^{(q)}_{k,\,i})} \cdot \mu_m (J^{(q)}_{k,\,i} \cap A) +$$

$$+ \sum_{i \in N_2} \frac{|\Delta_m (F;\ J^{(q)}_{k,\,i})|}{\mu_m (J^{(q)}_{k,\,i})}\, \mu_m (J^{(q)}_{k,\,i} \cap A) \leqslant \varepsilon + \varepsilon\, V_m (F;\ E \cap J^{(q)}). \tag{3.5}$$

Так как, согласно лемме 7, величина $V_m (F;\ E \cap J^{(q)})$ конечна, то из (3.5) следует равномерная интегрируемость последовательности $\{f_k;\ k \geqslant q\}$.

Далее, применяя теорему о сходимости мартингалов (см., например, [3], стр. 64) к последовательности $\{f_k;\ k > q\}$, получаем, что предел

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{k \to \infty} f_k (\mathbf{x}) \tag{3.6}$$

существует для почти всех $\mathbf{x} \in J^{(q)}$, $f \in L^1 (J^{(q)})$ и

$$f_k \to f \text{ в } L^1 (J^{(q)}). \tag{3.7}$$

Очевидно, $J^{(k)} \subset J^{(k+1)}$ для любого $k \in N$ и объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} J^{(k)}$ отличается от J на множество нулевой меры. Отсюда следует, что равенство (3.6) выполняется почти всюду на J.

Далее, для любого $q \in N$ и $k \geqslant q$, имеем

$$\int_{J^{(q)}} |f_k|\, d\mu_m = \sum_{i=1}^{l(q,\,k)} \int_{J^{(q)}_{k,\,i}} |f_k|\, d\mu_m = \sum_{i=1}^{l(q,\,k)} |\Delta_m (F;\ J^{(q)}_{k,\,i})| \leqslant V_m (F;\ E). \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3,8) следует, что для любого $q \in N$

$$\int_{J^{(q)}} |f|\, d\mu_m \leqslant V_m (F;\ E),$$

откуда, предельным переходом, получаем

$$\int\limits_{J} |f|\, d\mu_m \leqslant V_m(F;\ E). \tag{3.9}$$

В силу леммы 7, из (3.9) следует, что $f \in L^1(J)$.

Теперь докажем равенство

$$\Delta_m(F;\ J(\mathbf{a};\ \mathbf{v})) = \int\limits_{J(\mathbf{a};\ \mathbf{v})} f\, d\mu_m,\quad \mathbf{v} \in H, \tag{3.10}$$

считая, без ограничения общности, что сегмент $J(\mathbf{a};\ \mathbf{v})$ ориентирован положительно.

Зафиксируем произвольную точку $\mathbf{v} \in H$. Для любого $q \in N$ наибольший сегмент с вершинами из $\mathbf{a} + D_q^m$, содержащийся в $J(\mathbf{a};\ \mathbf{v})$, имеет вид $J(\mathbf{a};\ \mathbf{a}+\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D_q^m$, $z^i = \theta_i (v^i - a^i)$, $0 < \theta_i < 1$. При этом имеем также

$$J(\mathbf{a};\ \mathbf{v}) \setminus J(\mathbf{a};\ \mathbf{a}+\mathbf{z}) = \bigcup_{i=1}^{m} J\left(s^i_{a^i+z^i}(\mathbf{a});\ s^{1,\dots,i-1}_{a^1+z^1,\dots,a^{i-1}+z^{i-1}}(\mathbf{v})\right), \tag{3.11}$$

где, при $i=1$ положено

$$s^{1,\dots,i-1}_{a^1+z^1,\dots,a^{i-1}+z^{i-1}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}.$$

Сегменты, стоящие в правой части (3.11), попарно не перекрываются и их вершины имеют вид $s^{i_1,\dots,i_k}_{a^{i_1}+x^{i_1},\dots,a^{i_k}+x^{i_k}}(\mathbf{v})$, где $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m) \in D_q^m$. Отсюда, в силу условий $\mathbf{a} \in J$, $\mathbf{v} \in J$ и (3.2) получаем, что все указанные вершины принадлежат множеству E. Тогда, если q достаточно велико будет выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} \left|\Delta_m\left(F;\ J\left(s^i_{a^i+z^i}(\mathbf{a});\ s^{1,\dots,i-1}_{a^1+z^1,\dots,a^{i-1}+z^{i-1}}(\mathbf{v})\right)\right)\right| < \varepsilon, \tag{3.12}$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное неперед заданное число. Очевидно, мы можем одновременно обеспечить также выполнение неравенства

$$\left| \int\limits_{J(\mathbf{a};\ \mathbf{v}) \setminus J(\mathbf{a};\ \mathbf{a}+\mathbf{z})} f\, d\mu_m \right| < \varepsilon. \tag{3.13}$$

Далее, в силу (3.7) и очевидного равенства

$$\int\limits_{J(\mathbf{a};\ \mathbf{a}+\mathbf{z})} f_k\, d\mu_m = \Delta_m(F;\ J(\mathbf{a}:\ \mathbf{a}+\mathbf{z})),\quad k \geqslant q$$

получаем равенство

$$\Delta_m(F;\ J(\mathbf{a};\ \mathbf{a}+\mathbf{z})) = \int\limits_{J(\mathbf{a};\ \mathbf{a}+\mathbf{z})} f\, d\mu_m. \tag{3.14}$$

Из (3.12), (3.13) и (3.14) следует, что

$$\left|\Delta_m(F;\ J(\mathbf{a};\ \mathbf{v})) - \int\limits_{J(\mathbf{a};\ \mathbf{v})} f\,d\mu_m\right| < 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $\mathbf{v} \in H$ и $\varepsilon > 0$, отсюда получим (3.10).

Замечание. Как видно из приведенного доказательства, в качестве $\mathbf{a}$ можно взять любую точку, удовлетворяющую условиям (3.1) и (3.2). Следовательно, в том случае, когда функция F абсолютно непрерывна по Витали на всем сегменте J, (1.4) будет иметь место для любого $\mathbf{a} \in J$.

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем следующее: если G — действительная функция, абсолютно непрерывная почти всюду на J, и $\mathbf{a} \in J$ — произвольная точка, то существует функция $g \in L^1(J)$ такая, что для почти всех $\mathbf{x} \in J$ имеет место равенство

$$G(\mathbf{x}) = \int\limits_{J(\mathbf{a};\ \mathbf{x})} g\,d\mu_m + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} G_{i_1,\ldots,i_k}(r^{i_1,\ldots,i_k}(\mathbf{x})) + C, \tag{3.15}$$

где при любом $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$, $G_{i_1,\ldots,i_k}$ есть функция $m-k$ переменных, абсолютно непрерывная почти всюду на сегменте $r^{i_1,\ldots,i_k}(J)$, C — постоянная и сегмент $J(\mathbf{a};\ \mathbf{x})$ предполагается ориентированным по вершине $\mathbf{a}$.

Действительно, согласно теореме 1 существует точка $\mathbf{a}_0 \in J$ и функция $g_0 \in L^1(J)$ такие, что для почти всех $\mathbf{x} \in J$

$$\Delta_m(G;\ J(\mathbf{a}_0;\ \mathbf{x})) = \int\limits_{J(\mathbf{a}_0;\ \mathbf{x})} g_0\,d\mu_m. \tag{3.16}$$

В силу равенства (2.15) из (3.16) получим

$$G(\mathbf{x}) = \int\limits_{J(\mathbf{a}_0;\ \mathbf{x})} g_0\,d\mu_m +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \Delta_{m-k}(G^{i_1,\ldots,i_k}_{a_0^{i_1},\ldots,a_0^{i_k}};\ r^{i_1,\ldots,i_k}(J(\mathbf{a}_0;\ \mathbf{x}))) + C_0. \tag{3.17}$$

Все слагаемые

$$\Delta_{m-k}(G^{i_1,\ldots,i_k}_{a_0^{i_1},\ldots,a_0^{i_k}};\ r^{i_1,\ldots,i_k}(J(\mathbf{a}_0;\ \mathbf{x}))) \tag{3.18}$$

в правой части равенства (3.17) абсолютно непрерывны μ_{m-k}-почти всюду на соответствующих сегментах $r^{i_1,\ldots,i_k}(J)$. Проверим это сначала для функций

$$\Delta_{m-1}(G^1_{a_0^1};\ r^1(J(\mathbf{a}_0;\ \mathbf{x}))), \cdots, \Delta_{m-1}(G^m_{a_0^m};\ r^m(J(\mathbf{a}_0;\ \mathbf{x}))), \tag{3.19}$$

составляющих группу слагаемых в (3.17), соответствующую значению $k = 1$. Рассмотрим, например, функцию

$$\Delta_m(G^1_{a_0^1};\ r^1(J(\mathbf{a}_0;\ \mathbf{x}))).$$

По условию для μ_1-почти всех $t \in r^{2, \cdots, m}(J)$ функция $G(t, x^2, \cdots$ $\cdots, x^m)$ абсолютно непрерывна по Витали μ_{m-1}-почти всюду на $r^1(J)$ относительно переменных $x^2, \cdots, x^m$. Фиксируя t из (3.17) получим

$$\Delta_{m-1}\left(G^1_{a^1_0};\ r^1(J(\mathbf{a}_0;\ \mathbf{x}))\right) = G(t,\ x^2, \cdots, x^m) - \int\limits_{J(\mathbf{a}_0;\ s^1_l(\mathbf{x}))} g_0\, d\mu_m + \Sigma, \tag{3.20}$$

где первые два слагаемых в правой части абсолютно непрерывны по Витали μ_{m-1}-почти всюду на $r^1(J)$, а Σ представляет собой сумму конечного числа функций, каждая из которых зависит от не более чем $m-2$ координат точки $\mathbf{x}$.

С другой стороны, легко видеть, что если некоторая функция Φ, заданная на k-мерном сегменте I, зависит от не более чем $k-1$ переменных, то $\Delta_k(\Phi;\ I) = 0$. В силу этого замечания из (3.20) получаем, что функция

$$\Delta_{m-1}\left(G^1_{a^1_0};\ r^1(J(\mathbf{a}_0;\ \mathbf{x}))\right)$$

абсолютно непрерывна по Витали почти всюду на $r^1(J)$. Таким образом, она удовлетворяет условию а) определения 2. Аналогично проверяется выполнение условия б).

Далее, после того как установлена абсолютная непрерывность функций (3.19), мы переходим к рассмотрению функций

$$\Delta_{m-2}\left(G^{i_1,\ i_2}_{a^{i_1}_0,\ a^{i_2}_0};\ r^{i_1, i_2}(J(\mathbf{a}_0;\ \mathbf{x}))\right),\ 1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant m,$$

соответствующих значению $k = 2$. Используя приведенные выше рассуждения, мы установим абсолютную непрерывность каждой из этих функций на соответствующем сегменте $r^{i_1, i_2}(J)$ и т. д. Переходя по возрастанию k от 1 до $m-1$, мы установим абсолютную непрерывность всех функций (3.18).

Пусть теперь задана произвольная точка $\mathbf{a} \in J$. Интеграл

$$\int\limits_{J(\mathbf{a}_0,\ \mathbf{x})} g_0\, d\mu_m, \tag{3.21}$$

фигурирующий в (3.17), является абсолютно непрерывной функцией на всем сегменте J. Поэтому, в силу замечания, приведенного в конце доказательства теоремы 1, мы, согласно равенству (3.17) (примененному к указанному интегралу, взятому в качестве G), получим для почти всех $\mathbf{x} \in J$ представление

$$\int\limits_{J(\mathbf{a}_0;\ \mathbf{x})} g_0\, d\mu_m = \int\limits_{J(\mathbf{a};\ \mathbf{x})} g\, d\mu_m + \Sigma_0, \tag{3.22}$$

где $g \in L^1(J)$ и Σ_0 — сумма конечного числа функций, каждая из которых зависит не более чем от $m-1$ переменных, причем все они абсолютно непрерывны на соответствующих сегментах.

Подставляя в (3.17) вместо интеграла (3.21) правую часть (3.22) и группируя слагаемые, зависящие от одних и тех же переменных, мы получим (3.15).

Теперь непосредственно перейдем к доказательству (1.6). Пусть точка $\mathbf{a} \in J$ задана. Применяя (3.15) к функции F, мы получим

$$F(\mathbf{x}) = \int\limits_{J(\mathbf{a};\,\mathbf{x})} f\,d\mu_m + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{1 \le l_1 < \cdots < l_k < m} F^{(1)}_{l_1,\cdots,l_k}(r^{l_1,\cdots,l_k}(\mathbf{x})) + C_1, \tag{3.23}$$

для почти всех $\mathbf{x} \in J$.

Далее применяя (3.15) к функциям $F_l^{(1)}$ на $r^l(J)$ и соответствующим точкам $r^l(\mathbf{a})$, подставляя полученные выражения в (3.23) и группируя слагаемые, зависящие от одних и тех же координат точки $\mathbf{x}$ мы получим

$$F(\mathbf{x}) = \int\limits_{J(\mathbf{a};\,\mathbf{x})} f\,d\mu_m + \sum_{l=1}^{m} \int\limits_{r^l(\mathbf{a};\,\mathbf{x})} f_l\,d\mu_m +$$

$$+ \sum_{k=2}^{m-1} \sum_{1 \le l_1 < \cdots < l_k < m} F^{(2)}_{l_1,\cdots,l_k}(r^{l_1,\cdots,l_k}(\mathbf{x})) + C_2. \tag{3.24}$$

Перейдем к следующему шагу. Применяем (3.15) к функциям $F^{(2)}_{l_1 l_2}$ на $r^{l_1, l_2}(J)$ и соответствующим точкам $r^{l_1, l_2}(\mathbf{a})$, полученные выражения подставляем в (3.24) и группируем слагаемые, зависящие от одних и тех же координат точки $\mathbf{x}$.

Продолжая этот процесс, мы через m шагов придем к равенству (1.5). Теорема 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Пусть E есть множество точек аппроксимативной непрерывности F. Тогда, как известно ([4], стр.199), $\mu_m(R^m \setminus E) = 0$. Докажем, что F абсолютно непрерывна по Витали на E. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Для каждого $p \in N$ обозначим через T_p множество всех точек $\mathbf{t} \in T_0$, обладающих следующим свойством: для каждого конечного семейства попарно неперекрывающихся m-мерных сегментов $\{I_1, \cdots, I_n\}$ с вершинами из D^m и с суммой мер

$$\sum_{l=1}^{n} \mu_m(I_l) < \frac{1}{p}$$

справедливо неравенство

$$\sum_{l=1}^{n} |\Delta_m(F;\ \mathbf{t} + I_l)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда имеем

$$\bigcup_{p=1}^{\infty} T_p = T_0 \text{ и } T_p \subset T_{p+1} \text{ для всех } p \in N,$$

откуда, в силу условия $\mu_m(T_0) > 0$, следует, что при некотором $p_0 \in N$, $\mu_m(T_{p_0}) > 0$. Положим $T = T_{p_0}$ и $\delta = \dfrac{1}{p_0}$. Тогда

$$\mu_m(T) > 0 \tag{3.25}$$

и для каждого конечного семейства попарно неперекрывающихся m-мерных сегментов $I_1, \cdots, I_n$ с вершинами из D^m и с суммой мер

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_m(I_i) < \delta \tag{3.26}$$

ля всех $\mathbf{t} \in T$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta_m(F; \mathbf{t} + I_i)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.27}$$

Кроме того, без ограничения общности, можно считать, что начало координат является точкой плотности для T.

Пусть, теперь, $\{J_1, \cdots, J_n\}$ — произвольное конечное семейство попарно не перекрывающихся m-мерных сегментов с вершинами из E и с суммой мер

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_m(J_i) < \delta \tag{3.28}$$

и пусть $\mathbf{v}_{i,1}, \ldots \mathbf{v}_{i,2^m}$ — вершины сегмента J_i; $i = 1, \cdots, n$.

Для любого $a > 0$ обозначим через C_a m-мерный куб со стороной a и с центром в начале координат.

Возьмем число $\eta > 0$ так, чтобы имело место

$$\mu_m(T \cap C_\eta) > \frac{1}{2}\eta^m \tag{3.29}$$

и чтобы для всех $i = 1, \cdots, n$ и $k = 1, \cdots, 2^m$ существовало множество $E_{i,k} \subset \mathbf{v}_{i,k} + C_\eta$ с мерой

$$\mu_m(E_{i,k}) > \left(1 - \frac{1}{n\,2^{m+1}}\right)\eta^m \tag{3.30}$$

такое, что для любого $\mathbf{x} \in E_{i,k}$ выполнялось неравенство

$$|F(\mathbf{v}_{i,k}) - F(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{n\,2^{m+1}}. \tag{3.31}$$

Далее выбираем положительное число $\zeta < \eta$ настолько малым, чтобы для всех $i = 1, \cdots, n$ и $k = 1, \cdots, 2^m$ множество $G_{i,k} = E_{i,k} \cap (\mathbf{v}_{i,k} + C_{\eta-\zeta})$ имело меру

$$\mu_m(G_{i,k}) > \left(1 - \frac{1}{n\,2^{m+1}}\right)\eta^m. \tag{3.32}$$

Наконец, возьмем точки $\mathbf{w}_{i,k} \in D^m$; $i = 1, \cdots, n$; $k = 1, \cdots, 2^m$ так, чтобы выполнялись условия

$$\mathbf{w}_{i,k} \in D^m \cap J_i \cap (\mathbf{v}_{i,k} + C_\zeta) \tag{3.33}$$

и чтобы при каждом $i = 1, \cdots, n$ точки $\mathbf{w}_{i,1}, \cdots, \mathbf{w}_{i,2^m}$ являлись вершинами некоторого m-мерного сегмента I_i.

Заметим, что сегменты I_i, $i=1,\cdots,n$ попарно не перекрываются, так как по построению $I_i\subset J_i$; $i=1,\cdots,n$.

В силу определения множеств $G_{i,k}$ и условия (3.33) имеем включение

$$G_{i,k}-\mathbf{w}_{i,k}\subset C_\eta;\ i=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,2^m. \tag{3.34}$$

Далее, в силу (3.29), (3.32) и (3.34) будем иметь

$$\mu_m(C_\eta\setminus(T\cap C_\eta)\cap(\bigcap_{i,k}(G_{i,k}-\mathbf{w}_{i,k})))\leqslant$$
$$\leqslant\mu_m(C_\eta\setminus(T\cap C_\eta))+\sum_{i,k}\mu_m(C_\eta\setminus(G_{i,k}-\mathbf{w}_{i,k}))<\eta^m,$$

откуда получаем

$$\mu_m(T\cap(\bigcap_{i,k}(G_{i,k}-\mathbf{w}_{i,k})))>0. \tag{3.35}$$

Пусть

$$\mathbf{t}\in T\cap(\bigcap_{i,k}(G_{i,k}-\mathbf{w}_{i,k})).$$

Тогда, в силу (3.28) и (3.33) будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_m(\mathbf{t}+I_i)=\sum_{i=1}^{n}\mu_m(I_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mu_m(J_i)<\delta,$$

откуда, в силу выбора δ, имеем

$$\sum_{i=1}^{n}|\Delta_m(F;\ \mathbf{t}+I_i)|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{3.36}$$

С другой стороны, так как $\mathbf{t}+\mathbf{w}_{i,k}\in G_{i,k}\subset E_{i,k}$ для всех $i=1,\cdots,n$ и $k=1,\cdots,2^m$, то, в силу (3.31), будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n}|\Delta_m(F;\ J_i)-\Delta_m(F;\ \mathbf{t}+I_i)|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i,k}|F(v_{i,k})-F(\mathbf{t}+\mathbf{w}_{i,k})|<n2^m\cdot\frac{\varepsilon}{n2^{m+1}}=\frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{3.37}$$

Из (3.36) и (3.37) получим

$$\sum_{i=1}^{n}|\Delta_m(F;\ J_i)|<\varepsilon,$$

что и требовалось.

Ереванский государственный университет,
Институт прикладных проблем физики
АН Армянской ССР

Поступила 25. IX. 1988

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ և Ֆ. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ Բազմաթիվ փոփոխականների բացարձակ անընդհատ ֆունկցիաների ներկայացման մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ուսումնասիրված է բազմաթիվ փոփոխականների ֆունկցիաների ընդհանրացված իմաստով բացարձակ անընդհատության հատկությունը։ Մարտինգալների զուգամիտության թեորեմի օգնությամբ ստացված է նշված ֆունկցիաների ներկայացումը ինտեգրալով։

A. A. TALALIAN and F. A TALALIAN. *On the representation of absolutely continuous functions of several variables* (summary)

The property of generalized absolute contiouity of functions of several variables is investigated. With the aid of martingale convergence theorem representation of those functions by integrals is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *C. Caratheodorg.* Vorlesungen über reele funktionen, Leipzig und Beriin, 1927.
2. *E. Berkson and T. A. Gillesple.* Absolutely continuous functions on two variables and well—bounded operators, J. London Math. Soc., (2). 30, 1984, 305—321.
3. *J. Neveu.* Martingales a temps discret, Masson, Paris, 1972.
4. *С. Сакс.* Теория интеграла, ИИЛ, М., 1949.

Дорогой Александр Андраникович!

Редакция журнала „Математика" поздравляет Вас с шестидесятилетием и искренне желает Вам крепкого здоровья и дальнейшей плодотворной творческой деятельности.