ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXIII, № 6, 1988 Математика

УДК 517.53

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. С. ЗАХАРЯН, И. В. ОГАНИСЯН

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ТЕЙЛОРА ПРОИЗВЕДЕНИЙ М. М. ДЖРБАШЯНА $B_\alpha(z;\ z_k)$

Пусть $\{z_k\}_1^\infty$, $(0<|z_k|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, пронумерованных в порядке неубывания их модулей ($|z_k|\leqslant|z_{k+1}|$, $k=1, 2,\cdots$).

Как известно [1], если

$$\sum_{k=1}^\infty (1-|z_k|)^{1+\alpha}<\infty \quad (-1<\alpha<+\infty), \tag{1}$$

то бесконечное произведение М. М. Джрбашяна

$$B_\alpha(z;\ z_k)=\prod_{k=1}^\infty\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z;\,z_k)}, \tag{2}$$

где

$$W_\alpha(z;\ \xi)=\int\limits_{|\xi|}^1\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-\sum_{k=1}^\infty\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\cdot\Gamma(1+k)}\times$$

$$\times\left\{\xi^{-k}\int\limits_0^{|\xi|}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx-\overline{\xi}^k\int\limits_{|\xi|}^1(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\right\}z^k,\ |z|<1,\ |\xi|<1 \tag{3}$$

сходится в единичном круге $|z|<1$ и представляет там аналитическую функцию, обращающуюся в нуль на последовательности $\{z_n\}_1^\infty$.

Функция $B_\alpha(z;\ z_k)$ является естественным обобщением произведения Бляшке

$$B(z;\ z_k)=\prod_{k=1}^\infty\frac{|z_k|}{z_k}\,\frac{z_k-z}{1-\overline{z}_k z}$$

и совпадает с ним при значении параметра $\alpha=0$, то есть $B_0(z;z_k)\equiv\equiv B(z;\ z_k)$.

Обозначим через $\widehat{B}_\alpha(n)$ n-ный коэффициент ряда Тейлора функции $B_\alpha(z;\ z_k)$. Для тех $B(z;\ z_k)$, нули которых удовлетворяют условию Ньюмана

$$\sup_{k\geqslant1}(1-|z_{k+1}|)/(1-|z_k|)<1, \tag{N}$$

получена [4] оценка

$$\widehat{B}_0(n)=O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4}$$

В работе [5] доказано и обратное утверждение: из условия (4) следует, что множество нулей $\{z_k\}_1^\infty$ состоит из конечного объединения (N) последовательностей.

Для значений параметра $\alpha\in(-1;\,0]$ в работе [2] доказывается, что если выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-|z_k|}{|e^{i\theta}-z_k|}\right)^{1+\alpha}<+\infty, \tag{5}$$

то в точке $e^{i\theta}$ существует радиальный предел

$$B_\alpha(e^{i\theta};\,z_k)=\lim_{r\to1-0}B_\alpha(re^{i\theta},\,z_k). \tag{6}$$

При $\alpha=0$ условие (5) является [3] необходимым и достаточным для существования радиального предела (6), равного по модулю единице.

В данной работе получена оценка коэффициентов Тейлора $\hat{B}_\alpha(n)$ для $-1<\alpha\leqslant0$ при условии, что все нули расположены на одном радиусе и по модулю, со скоростью геометрической прогрессии, стремятся к единице. Из этой оценки видно, что тогда функция $B_\alpha(z;\,z_k)$ при $-1<\alpha<0$ становится непрерывной в замкнутом круге $|z|\leqslant1$. Полученная оценка показывает, что при $-1<\alpha<0$ условие (5) является только достаточным для существования радиального предела (6).

Для доказательства теоремы сначала приведем вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Для всех значений $r\in(0;\,1)$ и $\alpha\in(-1;\,\infty)$ имеет место соотношение*

$$W_\alpha(r;\,r)=\ln(1-r)+\int_0^r\frac{(1-x)^\alpha-1}{x}\,dx+\int_r^1\frac{1-x}{x\left(1-\frac{r^2}{x}\right)^{\alpha+1}}\,dx.$$

Доказательство. Согласно (3)

$$W_\alpha(r;\,r)=\int_r^1\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\cdot\Gamma(1+k)}\times$$

$$\times\left\{\int_0^r(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx-r^{2k}\int_r^1(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\right\}=\int_r^1\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-$$

$$-\int_0^r\left\{\frac{(1-x)^\alpha}{x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\cdot\Gamma(1+k)}x^k\right\}dx+$$

$$+\int_r^1\left\{\frac{(1-x)^\alpha}{x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\frac{r^{2k}}{x^k}\right\}dx.$$

Применяя разложение

$$\frac{1}{(1-\omega)^{1+\alpha}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+k)\cdot\Gamma(1+\alpha)}\cdot\omega^k,\ |\omega|<1,$$

получим

$$W_\alpha(r;r)=\int_r^1\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-\int_0^r\left\{\frac{(1-x)^\alpha}{x}\left[\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}}-1\right]\right\}dx+$$

$$+\int_r^1\left\{\frac{(1-x)^\alpha}{x}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{r^2}{x}\right)^{1+\alpha}}-1\right]\right\}dx=\int_r^1\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-$$

$$-\int_0^r\left[\frac{1}{x(1-x)}-\frac{(1-x)^\alpha}{x}\right]dx+\int_r^1\frac{(1-x)^\alpha}{x\left(1-\frac{r^2}{x}\right)^{\alpha+1}}\,dx-\int_r^1\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx=$$

$$=\ln(1-r)+\int_0^r\frac{(1-x)^\alpha-1}{x}\,dx+\int_r^1\frac{(1-x)^\alpha}{x\left(1-\frac{r^2}{x}\right)^{\alpha+1}}\,dx.$$

Лемма доказана.

Приведем также две леммы, доказательства которых можно найти в работах [6] и [9]. Они нам понадобятся при доказательстве теоремы.

Лемма 2. *Если последовательность* $\{z_k\}$ *удовлетворяет условию* (N), *то для любого* $\beta>0$, *при* $n\to\infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^n(1-|z_k|)^\beta=O\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

Лемма 3. *Если множество нулей* $\{z_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* (N), *то имеет место неравенство*

$$|B'(z_n;\,z_k)|>\frac{b}{1-|z_n|},$$

где $b>0$ — *некторая постоянная.*

Докажем теперь основную теорему.

Теорема. *Пусть множество нулей* $\{z_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет следующему условию:*

$$z_k=(1-a^k)\,e^{i\varphi},\ k=1,2,\cdots,\ 0<a<1,\ 0\leqslant\varphi<2\pi, \tag{7}$$

тогда

$$|\widehat{B}_\alpha(n)|=O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha/\ln a}}\right),\ -1<\alpha\leqslant 0.$$

Доказательство. Во-первых заметим, что произведение $B_\alpha(z;z_k)$ сходится, так как из (7) следует, что выполняется условие (1).

Имеем, далее

$$\widehat{B}_\alpha(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}B_\alpha(e^{i\theta};\,z_k)\,e^{-in\theta}\,d\theta,$$

$$\overline{\hat{B}_\alpha(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{B_\alpha(e^{i\theta};\ z_k)}\, e^{in\theta}\, d\theta.$$

Но

$$B_\alpha(e^{i\theta};\ z_k) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{e^{i\theta}}{z_k}\right)e^{-W_0(e^{i\theta};\ z_k)}\cdot\prod_{k=1}^{\infty} e^{W_0(e^{i\theta};\ z_k)-W_\alpha(e^{i\theta};\ z_k)} =$$

$$= B_0(e^{i\theta};\ z_k)\cdot e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\{W_0(e^{i\theta};\ z_k)-W_\alpha(e^{i\theta};\ z_k)\}},$$

поэтому

$$\overline{\hat{B}_\alpha(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{B_0(e^{i\theta};\ z_k)}\cdot e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\{\overline{W_0(e^{i\theta};\ z_k)}-\overline{W_\alpha(e^{i\theta};\ z_k)}\}}\cdot e^{in\theta}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\{\overline{W_0(\bar{z};\ z_k)}-\overline{W_\alpha(\bar{z};\ z_k)}\}}\cdot z^{n-1}}{B_0(z;\ \bar{z}_k)}\, dz.$$

Вычисляя интеграл с помощью вычетов, получим

$$\overline{\hat{B}_\alpha(n)} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\{\overline{W_0(z_m;\ z_k)}-\overline{W_\alpha(z_m;\ z_k)}\}}}{B_0'(z_m;\ z_k)}\cdot z_m^{n-1}. \tag{8}$$

Имея в виду [7, 8] неравенство

$$\operatorname{Re}\{W_\alpha(z;\ \xi)-W_0(z;\ \xi)\}\geqslant 0,\quad -1<\alpha\leqslant 0,\ |z|<1,\ |\xi|<1, \tag{9}$$

оценим сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re}\{W_0(z_m;\ z_k)-W_\alpha(z_m;\ z_k)\}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Re}\{W_0(z_m;\ z_k)-W_\alpha(z_m;\ z_k)\}.$$

Имея в виду применяемое при доказательстве неравенства (9) разложение в тригонометрический ряд функции

$$\operatorname{Re}\{W_\alpha(z;\ \xi)-W_0(z;\ \xi)\} = \frac{a_0(\rho)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\rho)\,|\omega|^k\cos(k\cdot\arg\omega),$$

где $\rho=|\xi|$, $\omega=z\cdot\bar{\xi}$ и $a_k(\rho)\geqslant 0$, $k=0,1,\cdots$, а также условие (7), находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re}\{W_0(z_m;\ z_k)-W_\alpha(z_m;\ z_k)\}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Re}\{W_0(z_k;\ z_k)-W_\alpha(z_m;\ z_k)\}.$$

Используя лемму 1, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re}\{W_0(z_m;\ z_k)-W_\alpha(z_m;\ z_k)\}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\left\{\int_0^{|z_k|}\frac{1-(1-x)^\alpha}{x}\,dx+\right.$$

$$+\int\limits_{|z_k|}^{1}\left[\frac{1}{x\left(1-\frac{|z_k|^2}{x}\right)}-\frac{(1-x)^{\alpha}}{x\left(1-\frac{|z_k|^2}{x}\right)^{\alpha+1}}\right]dx\,\Bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{0}^{|z_k|}\frac{1-(1-x)^{\alpha}}{x}\,dx,$$

так как

$$\frac{1}{x\left(1-\frac{|z_k|^2}{x}\right)}-\frac{(1-x)^{\alpha}}{x\left(1-\frac{|z_k|^2}{x}\right)^{\alpha+1}}\leqslant 0,\ \alpha\in(-1;\,0],\ x\geqslant|z_k|.$$

Из равенства (7) и условия $-1<\alpha\leqslant 0$ получим

$$\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{0}^{|z_k|}\frac{1-(1-x)^{\alpha}}{x}\,dx\leqslant\sum_{k=1}^{m}\alpha|z_k|=\alpha\sum_{k=1}^{m}(1-a^k)=$$

$$=\alpha\left(m-\sum_{k=1}^{m}a^k\right)\leqslant\alpha\left(m-\frac{a}{1-a}\right).$$

Так как $\ln(1-|z_m|)=m\cdot\ln a$, то $m=\dfrac{\ln(1-|z_m|)}{\ln a}$, следовательно

$$\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Re}\{W_0(z_m;\ z_k)-W_\alpha(z_m;\ z_k)\}\leqslant\ln(1-|z_m|)^{\alpha/\ln a}-\frac{\alpha a}{1-a}.$$

Из (8), применив полученную оценку, а также лемму 3, находим

$$|\widehat{B}_\alpha(n)|\leqslant\text{const}\sum_{m=1}^{\infty}|z_m|^{n-1}(1-|z_m|)^{1+\alpha/\ln a}.$$

Использовав, наконец, лемму 2, находим

$$|\widehat{B}_\alpha(n)|\leqslant O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha/\ln a}}\right).$$

Теорема полностью доказана.

С л е д с т в и е 1. Если нули $\{z_k\}_1^{\infty}$ удовлетворяют условию (7), то, согласно доказанной теореме, при $-1<\alpha<0$ имеем $|\widehat{B}_\alpha(n)|=O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha/\ln a}}\right)$, где $1+\alpha/\ln a>1$, поэтому функция $B_\alpha(z;\ z_k)$ будет непрерывной и m раз дифференцируемой в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$, где m — наибольшее целое число, удовлетворяющее условию $m<\dfrac{\alpha}{\ln a}$.

С л е д с т в и е 2. Так как при $z_k=(1-a^k)\,e^{i\theta}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-|z_k|}{|e^{i\theta}-z_k|}\right)^{1+\alpha}=+\infty,$$

то из следствия 1 вытекает, что для существования в точке $e^{i\theta}$ радиального предела (6), условие (5) при $\alpha \in (-1; 0)$ является только достаточным.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 2. IV.1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., «Наука», 1966.
2. *В. С. Захарян*. Радиальные пределы и радиальные изменения произведения $B_\alpha(z; z_n)$, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", 3, № 1, 1968, 38—51.
3. *Э. Коллингвуд, А. Ловатер*. Теория предельных множеств. М., «Мир», 1971.
4. *D. J. Newman, H. S. Shapiro*. The Taylor coefficients of inner functions, Mich. Math. J., 1962, 9, 249—256.
5. *Н. Э. Вербицкий*. О коэффициентах Тейлора и L^p-модулях непрерывности произведений Бляшке, Зап. научн. семин. ЛОМИ, том. 107, 1982, 27—35.
6. *С. А. Виноградов, В. П. Хавин*. Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций, Зап. научн. семин. ЛОМИ, том. 47, 1974, 15—55.
7. *М. М. Джрбашян и В. С. Захарян*. О граничных свойствах мероморфных функций класса N_α, ДАН СССР, 173, № 6, 1967, 1247—1250.
8. *М. М. Джрбашян и В. С. Захарян*. Граничные свойства мероморфных функций класса N_α, Изв. АН АрмССР, «Математика», 2, № 5, 1967, 275—294.
9. *D. J. Newman*. Interpolation in H_∞, Trans. Amer. Math. Soc., 92, 1959, 501—507