ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIII, № 6, 1988 Математика

УДК 517.53

Ф. А. ШАМОЯН

ОПИСАНИЕ ЗАМКНУТЫХ ИДЕАЛОВ В АЛГЕБРАХ НЕВАНЛИННЫ-ДЖРБАШЯНА, И ХАРАКТЕРИСТИКА СЛАБОЦИКЛИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ АЛГЕБРЫ N^+

Пусть D-единичный круг на комплексной плоскости, Г— его граница, $\alpha > -1$, обозначим через A_α^* множество всех голоморфных в D функций f, для которых

$$\int_D (1-|\zeta|)^\alpha \log^+ |f(\zeta)|\, dm_2(\zeta) < +\infty,$$

где m_2—плоская мера Лебега на D. В работах [1], [2] М. М. Джрбашяном было построено каноническое представление классов A_α^*, а именно им было установлено, что каждая функция $f \in A_\alpha^*$ допускает представление

$$f(z) = C_\lambda z^\lambda \pi_\alpha^f(z, z_k) \exp g_\alpha^f(z), \quad z \in D,$$

где

$$g_\alpha^f(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_D \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha \log |f(\zeta)|\, dm_2}{(1-\bar\zeta z)^{\alpha+2}}(\zeta), \quad z \in D,$$

$$\pi_\alpha^f(z, z_k) = \prod_1^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\{-U_\alpha(z, z_k)\}, \quad z \in D,$$

$$U_\alpha(z, z_k) = \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_D \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha \log\left(1-\frac{\zeta}{z_k}\right)}{(1-\bar\zeta z)^{\alpha+2}}\, dm_2(\zeta), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

Произведение π_α^f равномерно сходится внутри D при условии сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+2} < +\infty. \tag{1}$$

Еще раньше в [3] Р. Неванлинной было доказано, что если $f \in A_\alpha^*$, $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \cdots, f(z) \not\equiv 0$, то выполняется (1).

В работе автора [4] установлено, что существуют функции $f \in A_\alpha^f$, для которых π_α^f, $\exp g_\alpha^f \overline{\in} A_\alpha^*$. В то же время, если $f \in A_\alpha^*$ и $\beta > \alpha$, то функции π_β^f, $\exp g_\beta^f \in A_\alpha^*$. На основе последнего утверждения и вышеуказанных результатов М. М. Джрбашяна было построено параметрическое представление класса A_α^* (см. [4], [5]), т. е. установлено следующее утверждение:

Класс A_α^* совпадает с классом голоморфных в D функций f, допускающих представление

$$f(z) = C_\lambda z^\lambda \pi_\beta(z, z_k) \exp\left\{ \int_D \frac{(1-|\zeta|^2)^\beta}{(1-\bar\zeta z)^{\beta+2}}\, d\mu(\zeta) \right\}, \quad z \in D. \qquad (2)$$

Здесь $\{z_k\}$—произвольная последовательность из D, удовлетворяющая условию (1), μ—любая комплекснозначная борелевская мера на D такая, что

$$\int_D (1-|\zeta|)^\alpha\, |d\mu(\zeta)| < +\infty. \qquad (3)$$

Нетрудно заметить, что относительно метрики

$$\rho(f, g) = \int_D (1-|\zeta|)^\alpha \log(1 + |f(\zeta) - g(\zeta)|)\, dm_2(\zeta) \qquad (4)$$

A_α^* превращается в F-алгебру, т. е. превращается в топологическое векторное пространство с полной инвариантной метрикой, в котором оператор умножения на функции из A_α^* является непрерывным оператором (см. [6]). Интересно отметить, что в классе функций ограниченного вида N невозможно ввести метрику, относительно которой N превращалось даже в топологическое векторное пространство (см. [7], [8]). В этой работе на основе представления (2) мы получим полное описание замкнутых идеалов алгебры A_α^*. Мы докажем, что идеалы этой алгебры определяются своими внутренними нулями и порождаются одной функцией. Для того чтобы привести остальные результаты, введем обозначение. Через N^+ обозначим множество всех голоморфных в D функций f, для которых

$$\lim_{\rho \to 1-0} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(\rho e^{i\varphi})|\, d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(e^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

В N^+ вводится метрика (см. [8],]9[)

$$\rho(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} \log(1 + |f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})|)\, d\ , \qquad (5)$$

относительно которой N^+ превращается в F-алегрбу. В [9] получено описание замкнутых идеалов алгебры N^+. В отличие от алгебры A_α^* для описания замкнутых идеалов алгебры N^+ существенны также «граничные» нули. Так что в этом случае идеалы не определяются только внутренними нулями. В § 2 мы докажем, что замыкание любого идеала в слабой топологии алгебры N^+ определяется внутренними нулями. Этим мы даем полный ответ на вопрос, поставленный в работе [9].

§ 1. Замкнутые идеалы алгебры A_α^*

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 1. *Пусть I—замкнутый идеал алгебры A_α^*, $Z(I) = \bigcap_{f \in I} Z(f)$, где*

$$Z(f) = \{z \in \mathrm{D} : f(z) = 0\}.$$

Тогда

$$I = \{f : Z(f) \supset Z(I)\}, \tag{6}$$

причем существует $f_I \in A_\alpha^*$ такая, что $I = f_I A_\alpha^*$.

В качестве f_I можно брать произведение Джрбашяна $\pi_\beta(z, z_k)$, $(\beta > \alpha)$ с нулями $Z(I) = \{z_k\}_1^\infty$. И обратно, каждое множество вида (6) представляет замкнутый идеал алгебры A_α^*.

Доказательство. Обратимся к представлению (2), из которого видно, что если $f \in A_\alpha^*$ и $f = \pi_\beta^f \exp g_\beta^f$, $(\beta > \alpha)$, то $\exp\{\pm g_\beta^f\} \in A_\alpha^*$. Пусть I — замкнутый идеал алгебры A_α^* и $I_0 = \{f \in A_\alpha^* : Z(f) \supset Z(I)\}$. Для доказательства первой части теоремы достаточно установить равенство $I = I_0$. Очевидно, что $I_0 \supset I$. Докажем обратное включение. Положим $I^* = \{f \in A_\alpha^* : f I_0 \subset I\}$. Легко видеть, что I^* — замкнутый идеал алгебры A_α^*. Докажем, что $I^* = A_\alpha^*$, откуда следует первая часть теоремы. С этой целью сначала докажем, что если $f \in I^*$ и $f(z_0) = 0$, то $f(z)(z - z_0)^{-1}$ принадлежит идеалу I^*. Предположим, что z_0 является нулем порядка k, $(k \geqslant 0)$ идеала I. По предположению существует функция $h \in I$ такая, что $h^{(k)}(z_0) \neq 0$, $h^{(j)}(z_0) = 0$, $0 \leqslant j < k-1$. Тогда если g — произвольная функция из I_0, то функция $f(z)\, g(z) \times \times [h(z) - h^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k](z - z_0)^{-k-1}$ принадлежит идеалу I, т. е. $f(z)\, g(z)\, h(z)\,(z - z_0)^{-k-1} - f(z)\, g(z)\, h^{(k)}(z_0)(z - z_0)^{-1}$ принадлежит I. Поскольку $f(z)\, g(z)\,(z - z_0)^{-k-1} \in A_\alpha^*$, то первая функция в последнем выражении принадлежит идеалу I. Следовательно, $f(z)\, g(z)\, h^{(k)}(z_0)(z - z_0)^{-1} \in I$. Но ввиду определения I^* и произвольности $g \in I_0$ получаем, что $f(z)(z - z_0)^{-1} \in I^*$. Таким образом, если $f \in I^*$ и $\{z_k\}$ — нули f, то исходя из вышеприведенных рассуждений и учитывая представление (2), получаем

$$\frac{f(z)}{\prod_1^n \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\{-U_\beta(z, z_k)\}} = \frac{\pi_\beta^f(z, z_k) \exp\{g_\beta^f(z)\}}{\prod_1^n \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\{-U_\beta(z, z_k)\}} \in I^* \; (\beta > \alpha).$$

Но поскольку $\exp(-g_\beta^f) \in A_\alpha^*$, то

$$\frac{\pi_\beta^f(z, z_k)}{\prod_1^n \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\{-U_\beta(z, z_k)\}} = \pi_{\beta, n}^f \in I^*.$$

Если мы докажем, что $\lim\limits_{n \to +\infty} \pi_{\beta, n}^f = 1$ в топологии алгебры A_α^*, то, используя замкнутость I^*, будем иметь $I^* = A_\alpha^*$.

Итак, остается доказать, что

$$\rho(\pi^{f}_{\beta, n}, 1) = \int\limits_{D} (1-|\zeta|)^{\alpha} \log(1+|\pi^{f}_{\beta, n}(\zeta)-1|)\, dm_2(\zeta) \to 0,$$

при $n \to +\infty$. Функцию $\pi^{f}_{\beta, n}$, чтобы не осложнять запись, будем обозначать через π_n. Далее, положим $I_n = \rho(\pi_n, 1)$. Пусть ε — фиксированное положительное число и $r_{\varepsilon} = 1 - \left(\dfrac{\varepsilon}{4\log 8}\right)^{\frac{1}{\alpha+2}}$. Положим

$$D_{r_{\varepsilon}} = \{\zeta : |\zeta| \leqslant r_{\varepsilon}\},\ CD_{\varepsilon} = D \setminus D_{r_{\varepsilon}},$$

$$\rho(\pi_n, 1) = \int\limits_{D_{r_{\varepsilon}}} (\ ) + \int\limits_{CD_{r_{\varepsilon}}} (\ ) \overset{\text{def}}{=} I_n^1 + I_n^2. \tag{7}$$

Сначала оценим I_n^2. Пусть

$$CD^1_{r_{\varepsilon}} = \{\zeta \in CD_{r_{\varepsilon}} : |\pi_n(\zeta)| \geqslant 2\},\ CD^2_{r_{\varepsilon}} = CD_{r_{\varepsilon}} \setminus CD^1_{r_{\varepsilon}}.$$

Ясно, что

$$I_n^2 = \int\limits_{CD^1_{r_{\varepsilon}}} (1-|\zeta|)^{\alpha} \log(1+|\pi_n(\zeta)-1|)\, dm_2(\zeta) +$$

$$+ \int\limits_{CD^2_{r_{\varepsilon}}} (1-|\zeta|)^{\alpha} \log(1+|\pi_n(\zeta)-1|)\, dm_2(\zeta) <$$

$$< \int\limits_{CD^1_{r_{\varepsilon}}} (1-|\zeta|)^{\alpha} \log(1+|\pi_n(\zeta)-1|)\, dm_2(\zeta) + (1-r_{\varepsilon})^{\alpha+2}\log 4. \tag{8}$$

Кроме того, нетрудно заметить, что

$$\int\limits_{CD^1_{r_{\varepsilon}}} (1-|\zeta|)^{\alpha} \log(1+|\pi_n(\zeta)-1|)\, dm_2(\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{CD^1_{r_{\varepsilon}}} (1-|\zeta|)^{\alpha} \log^{+}|\pi_n(\zeta)|\, dm_2(\zeta) + (1-r_{\varepsilon})^{\alpha+2}\log 2.$$

Следовательно, учитывая (8), получаем

$$I_n^2 \leqslant \text{const} \int\limits_{D} (1-|\zeta|)^{\alpha+2} \log^{+}|\pi_n(\zeta)|\, dm_2(\zeta) + (1-r_{\varepsilon})^{\alpha+2}\log 8.$$

Используя лемму 1.2 из [4], приходим к оценке

$$I_n^2 \leqslant \text{const} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+2} + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда, подбирая $n > n_1(\varepsilon)$, окончательно получаем

$$I_\gamma^2 < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (9)$$

Но поскольку на D_{r_ε} равномерно $\pi_n(z) \to 1$ при $n \to +\infty$, то существует $n_2(\varepsilon)$ такое, что

$$I_n^1 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n > n_2(\varepsilon). \qquad (10)$$

Объединяя оценки (9), (10), получим, что при $n > n_1 + n_2$

$$\rho(\pi_n, 1) < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Имеет место аналог этой теоремы в несколько более общих алгебрах. Чтобы привести этот результат сначала введем обозначение. Символом Ω обозначим класс положительных функций ω на $(0,1)$, удовлетворяющих также условиям $\omega \in L^1(0, 1)$, существуют числа m_ω, q_ω, M_ω, причем m_ω, $q_\omega \in (0, 1)$ такие, что

$$m_\omega < \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} < M_\omega, \; r \in (0, 1), \; \lambda \in [q_\omega, 1].$$

По аналогии с классом A_α^* символом A_ω^* обозначим класс голоморфных в D функций f, для которых

$$\int_D \omega(1-|\zeta|) \log^+ |f(\zeta)| \, dm_2(\zeta) < +\infty.$$

Введем в A_ω^* метрику

$$\rho(f, g) = \int_D \omega(1-|\zeta|) \log(1 + |f(\zeta) - g(\zeta)|) \, dm_2(\zeta),$$

относительно которой A_ω^* превращается в F-алгебру. Используя результаты [10], аналогично доказывается

Теорема 2. *Пусть I — замкнутый идеал алгебры A_ω^*, $\beta > \frac{\log m_\omega}{\log q_\omega}$. Тогда*

$$I = \pi_\beta(z, z_n) A_\omega^*, \qquad (11)$$

где $Z(I) = \{z_k\}$ — множество нулей I, т. е.

$$Z(I) = \bigcap_{f \in I} Z(f). \qquad (12)$$

И обратно, каждое множество вида (11) представляет замкнутый идеал алгебры A_ω^*.

§ 2. Характеристика слабоциклических элементов алгебры N^+

Как уже отмечалось выше, относительно метрики

$$\rho(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} \log(1 + |f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})|)\, d\theta \tag{13}$$

N^+ превращается в F-алгебру. В работе [9] получено описание замкнутых идеалов этой алгебры. Для формулировки основного результата этого параграфа приведем

Определение. Пусть $f \in N^+$, скажем, что f является слабоциклическим элементом алгебры N^+, если замкнутая линейная оболочка системы $\{z^k f\}_{k=0}^{+\infty}$ в слабой топологии алгебры N^+ совпадает с ней.

Поскольку множество всех многочленов P всюду плотно в N^+, то функция $f \in N^+$ будет слабоциклической тогда и только тогда, когда существует последовательность многочленов $\{P_n\}_1^\infty$ такая, что для произвольного линейно-непрерывного функционала $\Phi \in (N^+)^*$ выполняется соотношение

$$\lim_{n \to +\infty} \Phi(P_n f) = \Phi(1). \tag{13}$$

Для сингулярных внутренних функций в работе [9] установлено, что если их представляющая мера подчинена некоторым ограничениям, то эти функции являются слабоциклическими элементами алгебры N^+. Здесь же поставлена задача о характеристике тех представляющих мер, для которых соответствующая функция является слабоциклическим элементом алгебры N^+. Из теоремы 3, в частности, следует, что любая сингулярная внутренняя функция является слабоциклическим элементом алгебры N^+. Интересно отметить, что в случае пространств Харди H^p, $0<p<1$ сингулярная внутренняя функция S_μ является слабоциклическим элементом пространства H^p тогда и только тогда, когда $\mu(k)=0$ для произвольного карлесоновского множества $K \subset \Gamma$ (см. [11]), т. е. множества K, для которого $|K|=0$ и

$\sum_{k=1}^{+\infty} l_k \log \frac{1}{l_k} < +\infty$. Здесь μ — представляющая мера функции S_μ. $\{l_k\}_1^\infty$ —последовательность длин дополнительных интервалов замкнутого множества K.

Теорема 3. *Пусть $f \in N^+$. Тогда следующие утверждения равно-*
Имеет место следующее утверждение.
сильны:

1) $f(z) \neq 0$. $z \in \mathrm{D}$.

1) *f—слабоциклический элемент алгебры N^+.*

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений. Следующая лемма вытекает из результатов работы [8].

Лемма 1. *Пусть Φ—линейный непрерывный функционал на N^-, $b_k = \Phi(z^k)$, $k=0, 1, \cdots$. Тогда существуют положительные числа $A = A(\Phi)$ и $\delta = \delta(\Phi)$ такие, что*

$$|b_k| \leqslant A \exp\{-\delta\sqrt{k}\},\ k=0,\ 1, \cdots, \tag{14}$$

причем, если $g(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k$, $z \in \overline{\mathrm{D}}$, *то имеет место представление*

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\theta})\, g(e^{-i\theta})\, d\theta,\ f \in N^{+}. \tag{15}$$

И обратно, если g *—голоморфная в* D *функция, коэффициенты разложения которой при некоторых* $A>0$ *и* $\delta>0$ *удовлетворяют оценке* (14), *то по формуле* (15) g *порождает линейный непрерывный функционал на* N^+.

Пусть $P(r)=\left[(1-r)\log\frac{2}{1-r}\right]^{-1}$, $r\in(0,\ 1)$. Введем в рассмотрение пространство $\mathrm{E}(P)$ как множество всех голоморфных в D функций f, для которых

$$\|f\|_{\mathrm{E}(P)} = \int_{\mathrm{D}} |f(\zeta)| \exp\{-P(|\zeta|)\}\, dm_2(\zeta).$$

Очевидно, что относительно нормы $\|\ \|_{\mathrm{E}(P)}$ $\mathrm{E}(P)$ превращается в банахово пространство.

Лемма 2. *Пусть* $f\in\mathrm{E}(P)$, $M(r,\ f)=\max_{|z|<r}|f(z)|$. *Тогда справедлива оценка*

$$M(r,\ f) \leqslant C\exp\left\{\frac{6}{(1-r)\log\frac{2}{1-r}}\right\}\cdot\|f\|_{\mathrm{E}(P)}, \tag{16}$$

где C *—положительное число, не зависящее от* f.

Доказательство. Пусть $f\in\mathrm{E}(p)$, $\zeta_0\in\mathrm{D}$. Используя субгармоничность $|f(\zeta)|$, имеем

$$|f(\zeta_0)| \leqslant \frac{1}{\pi\rho^2(1-|\zeta_0|)^2}\int_{K_\rho(\zeta_0)} |f(\zeta)|\, dm_2(\zeta), \tag{17}$$

где $K_\rho(\zeta_0)=\{\zeta : |\zeta-\zeta_0|<\rho(1-|\zeta_0|)\}$. Поскольку при $\zeta\in K_\rho(\zeta_0)$

$$\frac{1}{(1+\rho)(1-|\zeta_0|)} \leqslant \frac{1}{1-|\zeta|} \leqslant \frac{1}{(1-\rho)(1-|\zeta_0|)},$$

то справедлива оценка

$$|f(\zeta_0)| \leqslant \frac{1}{\pi\rho^2(1-|\zeta_0|)^2}\exp\left\{\frac{1}{(1-\rho)(1-|\zeta_0|)\log\frac{1}{(1-\rho)(1-|\zeta_0|)}}\right\}\times$$

$$\times\int_{K_\rho(\zeta_0)} |f(\zeta)|\exp\{-P(|\zeta|)\}\, dm_2(\zeta).$$

Полагая $\rho=\frac{1}{2}$, получаем

$$|f(\zeta_0)| \leqslant C\|f\|_{E(p)} \exp\left\{\frac{6}{(1-|\zeta_0|)\log\frac{2}{1-|\zeta_0|}}\right\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $f \in E(p)$ *и* $f(z)=\sum_0^{+\infty} a_k z^k$, $z \in D$, *тогда имеет место оценка*

$$|a_n| \leqslant C\|f\|_{E(p)} \exp\left\{12\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right\}, \quad n=2, 3, \cdots . \tag{18}$$

Доказательство. Исходя из неравенства Коши и учитывая лемму 2, имеем

$$|a_n| \leqslant \inf_{r\in(0,1)} \frac{M(r, f)}{r^n} \leqslant C\|f\|_{E(p)} \inf_{r\in(0,1)} \frac{\exp\left\{\frac{6}{(1-r)\log\frac{2}{1-r}}\right\}}{r^n}.$$

Следовательно

$$|a_n| \leqslant C_1\|f\|_{E(p)} \exp\left\{\frac{6}{(1-r_n)\log\frac{2}{1-r_n}}\right\}, \quad n=2, 3, \cdots ,$$

где $r_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n\log n}}$.

Подставляя указанное значение r_n, сразу получим доказательство леммы.

Лемма 4. *Пусть* $g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ —*голоморфная в* D *функция, при этом коэффициенты* b_n, $n=0, 1, \cdots$ *при некоторых* $\delta>0$ *и* $A>0$ *удовлетворяют оценке* (14). *Тогда по формуле*

$$\Phi(f)=\lim_{\rho\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi})\, g(e^{-i\varphi})\, d\varphi, \quad f\in E(P) \tag{19}$$

порождается линейный непрерывный функционал на $\mathrm{E}(P)$.

Доказательство. Пусть

$$\Phi_\rho(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi})\, g(e^{-i\varphi})\, d\varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k \rho^k, \quad \rho\in(0, 1),$$

где $\{a_k\}$—коэффициенты разложения функции f. Тогда, учитывая оценки (14) и (18), получаем

$$|a_k|\,|b_k| \leqslant C_1\|f\|_{E(p)} \exp\{-\delta\sqrt{k}\} \exp\left\{12\sqrt{\frac{k}{\log k}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_2\|f\|_{E(p)} \exp\{-\delta_1\sqrt{k}\} \quad (\delta_1>0).$$

Отсюда немедленно следует представление

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \to 1-0} \Phi_\rho(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k$$

и оценка

$$|\Phi(f)| \leqslant C_3 \|f\|_{E(p)},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 5. *Пусть* $S_\mu(z) = \exp\left\{-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\mu(\theta)\right\}$ — *сингулярная внутренняя функция*

$$\Psi(z) = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\mu(\theta), \quad z \in \mathbf{D}.$$

Тогда для любого натурального m *существует последовательность многочленов* $\{Q_{m,n}\}_{n=1}^{+\infty}$ *такая, что* $\|Q_{m,n}S - S\Psi^m\|_{E(p)} \to 0$ *при* $n \to +\infty$.

Доказательство непосредственно следует из полноты системы многочленов в N^+. Действительно, очевидно, что $\psi^m \in \varepsilon(p)$ при любом $m = 0, 1, 2, \cdots$. Поэтому существует $\{Q_{m,n}\}_{n=1}^{+\infty}$ такая, что

$$\|Q_{m,n} \Psi^m\|_{E(p)} \to 0 \text{ при } n \to +\infty. \text{ Отсюда}$$

$$\|Q_{m,n} S - S\Psi^m\|_{E(p)} \leqslant \|Q_{m,n} - \Psi^m\|_{E(p)} \to 0$$

при $n \to +\infty$. Лемма доказана.

При доказательстве следующей леммы мы используем методику работы [14].

Лемма 6. *Пусть* S_μ — *сингулярная внутренняя функция. Тогда существует последовательность многочленов* $\{P_n\}_1^{+\infty}$ *такая, что*

$$\lim_{n \to +\infty} \|P_n S - 1\|_{E(p)} = 0.$$

Доказательство. Обозначим через $E(S)$ замыкание множества $\mathbf{P}S$ в $\mathbf{E}(p)$, здесь $\mathbf{P}$ — множество всех многочленов от z. Из леммы 5 следует, что $S\Psi^m \in E(S)$, $m = 0, 1, \cdots$, где $\Psi = \log S$, $\operatorname{Im}\Psi(0) = 0$. Пусть Φ — линейный непрерывный функционал: $\Phi \perp E(S)$. Докажем, что $\Phi(1) = 0$. После этого утверждение леммы будет следовать из теоремы Хана—Банаха. Пусть $t \in [0, 1]$, положим $\delta(t) = \Phi(S^t)$. Имеем $\delta^{(m)}(t) = \Phi(S^t \Psi^m)$. Учитывая лемму 5, имеем

$$\delta^{(m)}(1) = 0, \quad m = 0, 1, \cdots, \quad (*).$$

Используя теорему Ф. Рисса, получим представление

$$\Phi(f) = \int_{\mathbf{D}} f(\zeta)\, g(\zeta) \exp\{-P(|\zeta|)\}\, dm_2(\zeta), \quad f \in \mathbf{E}(p),$$

где $g \in L^\infty(\mathbf{D})$. Следовательно

$$|\delta^{(n)}(t)| < \int_{D} |S'(\zeta)|\, |\Psi^n(\zeta)|\, |g(\zeta)| \exp\{-\dot{P}(|\zeta|)\}\, dm_2(\zeta) <$$

$$\leqslant \|g\|_\infty (2\|\mu\|)^n \sup_{r\in(0,1)} \left\{\frac{\exp(-P(r))}{(1-r)^n}\right\} \stackrel{\text{def}}{=} \|g\|_\infty (2\|\mu\|)^n M_n.$$

Последняя оценка следует из неравенства

$$|\Psi(\zeta)| \leqslant \frac{2\|\mu\|}{(1-|\zeta|)}, \ \zeta\in D.$$

Отсюда легко видеть, что

$$M_n = \sup_{r>1} \left\{\exp\left(-\frac{r}{\log r}\right)\cdot r^n\right\}, \ n = 1, 2, \cdots.$$

Вычисляя указанный супремум и производя элементарные упрощения, убедимся, что

$$|\delta^{(n)}(t)| \leqslant C^n M_n \leqslant C_1^n n^n (\log n)^n, \ n = 2, 3, \cdots,$$

где C_1—некоторое положительное число, не зависящее от t.

Но поскольку $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{M_k}} = +\infty$, то по теореме Т. Карлемана (см. [12]), δ принадлежит некоторому квазианалитическому классу функций. По $(*)$ $\delta(t) = 0$, $t\in[0, 1]$. Поэтому $\Phi(1) = \delta(0) = 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Сначала докажем импликацию $2)\Rightarrow 1)$. Итак, пусть f—слабо циклический элемент алгебры N^+. Докажем, что $f(z)\neq 0$, $z\in D$. Пусть $l_z(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^k \zeta^k$. Очевидно, что при фиксированном $z\in D$ функция $\zeta\to l_z(\zeta)$ удовлетворяет всем условиям леммы 1. Следовательно, по формуле

$$\Phi_z(g) = \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\rho e^{i\theta})\, l_z(e^{-i\theta})\, d\theta = g(z), \ z\in D, \ g\in N^+,$$

порождается линейный непрерывный функционал на N^+. Поскольку f—слабоциклический элемент алгебры N^+, то существует последовательность многочленов $\{P_n\}_1^\infty$, такая, что для любого линейного функционала $\Phi\in(N^+)^*$ $\Phi(P_nf)\to\Phi(1)$, в частности

$$\Phi_z(P_nf)\to\Phi_z(1), \text{ т. е. } P_n(z) f(z)\to 1, \ z\in D.$$

Поэтому $f(z)\neq 0$, $z\in D$. Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $f\in N^+$ и $f(z)\neq 0$, $z\in D$. Обозначим через $L(f)$ замыкание множества $\mathbf{P}f$ в слабой топологии алгебры N^+. $\mathbf{P}$, как и прежде, множество всех многочленов от z. По теореме факторизации f допускает представление:

$$f(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log|f(e^{i\theta})|\, d\theta\right\} \exp\left\{-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\mu(\theta)\right\} \stackrel{\text{def}}{=} Q_f S_f.$$

Здесь μ—неотрицательная сингулярная мера на $[-\pi, \pi]$. Очевидно, что Q_f—обратимый элемент алгебры N^+. Поэтому существует последовательность многочленов $\{P_n\}_1^\infty$, так что $\rho(p_n, Q_f^{-1}) \to 0$ при $n \to +\infty$. Но поскольку оператор умножения на Q_f является непрерывным оператором в N^+, то $\rho(P_n Q_f, 1) \to 0$ при $n \to +\infty$. Таким образом, $L(f) = L(S_f)$. Учитывая лемму 6, можно подобрать последовательность многочленов $\{Q_n\}_1^\infty$ такую, что $Q_n S_f \to 1$ в сильной топологии пространства $\mathbf{F}(p)$. Следовательно, для любого линейного непрерывного функционала $\Phi \in (\mathbf{F}(p))^*$

$$\Phi(Q_n S_f) \to \Phi(1)\ (n \to +\infty). \tag{20}$$

Но поскольку каждый линейный функционал $\Phi \in (N^+)^*$ по лемме 1 порождается некоторой функцией g с условием (14), то по лемме 4 этот же функционал непрерывен в топологии пространства $\mathbf{F}(p)$. Поэтому равенство (20) выполняется при всех $\Phi \in (N^+)^*$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В работе [15] доказано, что если $f = S$—сингулярная внутренняя функция и $\Phi \in (N^+)^*$, то существует последовательность многочленов $\{P_n\}_1^\infty$, вообще говоря зависящая от Φ такая, что

$$\lim_{n \to +\infty} \Phi(P_n S) = \Phi(1). \tag{21}$$

Из теоремы 3 следует, что можно подобрать $\{P_n\}_1^\infty$ такую, чтобы (21) выполнялось одновременно при всех $\Phi \in (N^+)^*$.

Естественно возникает вопрос: существуют ли сингулярная внутренняя функция S и последовательность многочленов $\{P_n\}$ такие, что $P_n S \to 1\ (n \to +\infty)$ в сильной топологии алгебры N^+. Следующий результат дает ответ на указанный вопрос.

Т е о р е м а 4. *Для произвольной сингулярной внутренней функции имеет место соотношение*

$$\inf_{p \in \mathbf{P}} \rho(PS, 1) = q_s > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вопреки утверждению теоремы предположим, что существуют P_n такие, что $\rho(P_n S, 1) \to 0$, $n \to +\infty$. Тогда $\rho(P_n S, P_m S) \to 0$, $(n, m \to +\infty)$. Следовательно

$$\rho(P_n S, P_m S) = \int_{-\pi}^{\pi} \log(1 + |P_n(e^{i\theta}) S(e^{i\theta}) - P_m(e^{i\theta}) S(e^{i\theta})|\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \log(1 + |P_n(e^{i\theta}) - P_m(e^{i\theta})|)\, d\theta \to 0,$$

при $n, m \to +\infty$. Но ввиду полноты пространства N^+ получим, что существует функция $f \in N^+$ такая, что $\rho(P_n, f) \to 0$, $n \to +\infty$. И следовательно, по первой части теоремы 3, $P_n(z) \to \varphi(z)$, $z \in \mathbf{D}$ и одновременно $P_n(z) \to S^{-1}(z)$, $z \in \mathbf{D}$. Отсюда получаем. $S^{-1} = f \in N^+$, что очевидно не выполняется. Теорема доказана.

Из теорем 3 и 4 непосредственно вытекает

Следствие. Пусть S—произвольная сингулярная внутренняя функция. Тогда на фактор-пространстве N^+/SN^+ не существует линейных непрерывных функционалов, кроме тождественного нуля.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 21. XI. 1988.

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. Նևանլիննա-Ջրբաշյանի հանրահաշիվներում փակ իդեալների նկարագրու-թյան և N+ հանրահաշվի թույլ ցիկլիկ էլեմենտների բնութագիրը *(ամփոփում)*

Հոդվածում ստացված է միավոր շրջանում անալիտիկ այն f ֆունկցիաների հանրահաշվի իդեալների նկարագրությունը, որոնց համար

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1}(1-r)^{\alpha}\log^{+}|f(re^{i\varphi})|\,rd\,rd\varphi<+\infty:$$

Ստացված է նաև շրջանում անալիտիկ, սահմանափակ տեսք և հավասարաչափորեն բա-ցարձակ անընդհատ ինտեգրալներ ունեցող ֆունկցիաների հանրահաշվի թույլ ցիկլիկ էլեմենտ-ների նկարագրությունը։

F. A. SHAMOIAN. *Closed ideals of the Nevanlinna-Djrbashian algebras and weak cyclic functions in the algebra* N^+ (summary)

The paper gives a description of the closed ideals of the algebra of the functions f for which

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1}(1-r)^{\alpha}\log^{+}|f(re^{i\varphi})|\,rd\,rd\varphi<+\infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН Арм.ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. *М. М. Джрбашян*. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. ин-та математики и механики АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—55.
3. *Р. Неванлинна*. Однозначные аналитические функции, М., 1941.
4. *Ф. А. Шамоян*. Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 13, №№ 5—6, 1978, 405—423.
5. *A. E. Djrbashian, F. A. Shamoian*. Topics in theory of A^p_α spaces, Teubner-Texte Math., 105, Leipzig., Teubner, 1988.
6. *Ф. А. Шамоян, П. А. Матевосян*. Об одной алгебре аналитических в круге функций, Всесоюз. школа по теор. функций, Ереван, 1987. Тезисы докладов.
7. *J. H. Shapiro, A. Shields*. Unusual topological properties of the Nevanlinna class, Amer. Journ. Math., 97, № 4. 915—936.
8. *N. Yanaagthara*.Multipliers and linear functionals on N+, Trans. Amer. Math. Soc., 180, 1973, 449—461.
9. *J. W. Roberts., M. Stool*. Prime and principial Ideals in the algebra N+, Arch. Math., XVII. 1976. 387—393.
10. *Ф. А. Шамоян*. Параметрическое представление классов голоморфных в круге функций, допускающих рост вблизи его границы, Материалы республиканской конференции по методике преподавания математики и механики в вузе, Ереван, 1986.

11. *J. W. Roberts.* Cuclic inner functions in the Bergman spaces and weak outher functions in H^p, $0<p<1$, Illin. Journ. Math., 29 № 1, 1985, 23—37.

12. *С. Мандельбройт.* Примыкающие ряды. Регуляризации последовательностей. Применения, М., ИЛ, 1955, 268 с.

13. *H. S. Shapiro.* Weakly invertible elements in certain function spaces and generators on l_1, Mich. Math. Journ., 11, 1964. 161—165.

14. *Н. К. Никольский.* Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 120, 1974.

15. *J. H. Shapiro.* Remarks on F-spaces of analytic functions, Lecture Notes Matq., 604, 1976. 103—123.