ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXIII, № 6, 1988 Математика

УДК 517.53

А. Е. АВЕТИСЯН

О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ ПОРЯДКА ρ $(1<\rho<2)$

Введение

Известно, что целая функция экспоненциального типа, которая имеет «много» вещественных нулей, не может быть «малой» на мнимой оси. Одним из первых результатов в этом направлении можно считать теорему Карлесона о том, что функция экспоненциального типа $f(z)$ не может обращаться в нуль во всех положительных целых точках и одновременно удовлетворять на мнимой оси неравенству $|f(iy)|<\exp\{a|y|\}$, если $a<\pi$. Известны результаты, которые довольно точно отражают связь между количеством действительных нулей такой функции (или поведением на действительной оси) и ее ростом на мнимой оси. Приведем теорему, которую Винер и Пэли [1] сформулировали и доказали для четных целых функций. А. Пфлюгер ([12], см. также [3]) заметил, что общий случай легко приводится к случаю четной функции.

Пусть, как обычно, $n_f(r)$ означает число нулей функции $f(z)$ в круге $|z|<r$.

Теорема А. *Если $f(z)$—каноническое произведение порядка 1 с действительными нулями, то следующие условия эквиваленты:*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\ln|f(x)|}{x^2}dx=-\pi^2B, \tag{1}$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_f(r)}{r}=2B, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to\pm\infty}\frac{\ln|f(iy)|}{|y|}=\pi B. \tag{3}$$

В (1) берется главное значение интеграла в точке $z=0$, которое существует, так как $f(0)=1$.

Аналогичные результаты имеют место в случае, когда нули функции $f(z)$ не обязательно действительны, но лежат близко к действительной оси.

Целая функция называется функцией класса A, если ее корни $z_k=r_k e^{i\theta_k}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\sin\theta_k|}{r_k}<+\infty.$$

Функции этого класса являются естественным обобщением функций, все корни которых вещественны.

Теорема В. (Пфлюгер [2]). *Пусть*

$$f(z) = e^{cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n}$$

—целая функция экспоненциального типа. Тогда условия

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n_f(r)}{r} = D, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin \theta_n|}{r_n} = \pi C < \infty$$

и

$$\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} \frac{\ln |f(x)|}{x^2} dx = -\pi^2 J \neq \pm \infty$$

эквивалентны и $D = 2C + 2J$.

Теорема С. (Нобль [4]). *Пусть*

$$f(z) = e^{cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}}$$

—целая функция экспоненциального типа и класса A. *Тогда предел*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n_f(r)}{r}$$

существует тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{y \to \infty} \frac{\ln |f(iy)|}{y},$$

где y *стремится к бесконечности, не принимая значений из множества конечной логарифмической длины.* Исключительное множество пусто, если существует угол* $\left|\arg z - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon \ (\varepsilon > 0)$, *не содержащий точек* z_n.

Настоящая работа состоит из трех параграфов. В первых двух параграфах доказываются теоремы типа теорем А, В, С для целых функций порядка $\rho (1 < \rho < 2)$. В третьем параграфе приводятся теоремы об условиях, при которых целые функции порядка ρ и конечного типа принадлежат классу $A\rho$ и имеют вполне регулярный рост.

Доказательства этих теорем основываются на систематическом применении методов теории функций вполне регулярного роста Б. Я. Левина— А. Пфлюгера. Мы неоднократно пользуемся результатами работ [2] и [5]. В то же время, при рассмотрении целых функций порядка выше первого, возникают новые ситуации, появляются новые условия, в связи с чем привлекаются новые методы или различные модификации ранее известных методов.

---

* Множество E имеет конечную логарифмическую длину, если $\int_E \frac{dx}{x} < \infty$.

Обозначим через Γ совокупность лучей $\arg z = \varphi_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, где $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\rho}$, $\varphi_3 = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}$, $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\rho}$.

§ 1. Целые функции с нулями на Г

В этом параграфе мы рассмотрим целые функции порядка $\rho (1 < \rho < 2)$, все нули котоpых лежат на Γ. Этот класс функций аналогичен классу целых функций конечной степени с вещественными нулями. Для функций этого класса справедливы теоремы типа теоремы А.

Теорема 1.1. *Пусть $f(z)$—каноническое произведение порядка ρ $(1<\rho<2)$, конечного типа, с нулями, лежащими на Γ. Тогда условия*

$$(D_\rho) \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{n_f(r)}{r^\rho} = 2\Delta$$

и

$$(B_\rho) \quad \text{а)} \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln |f(iy) f(-iy)|}{y^\rho} = 2\pi\Delta, \quad \text{б)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln |f(x) f(-x)|}{x^\rho} = 0$$

эквивалентны.

Доказательство. Пусть выполнено условие $(D\rho)$. Составим функцию

$$\varphi(z) = f(z) f(-z) \overline{f}(z) \overline{f}(-z) \qquad (1.1)$$

$(\overline{f}(z) = \overline{f(\overline{z})})$. Ясно, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_\varphi(r)}{r^\rho} = 8\Delta.$$

Нули функции $\varphi(z)$ также лежат на Γ, при этом они симметричны относительно действительной и мнимой осей. На каждом из лучей φ_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ плотность нулей функции $\varphi(z)$ равна 2Δ. Согласно известным результатам Б. Я. Левина и А. Пфлюгера (см. [5], гл. II) отсюда следует, что $\varphi(z)$—целая функция вполне регулярного роста с индикатором

$$h_\varphi(\theta) = \begin{cases} 4\pi\Delta\cos\rho\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), & \text{при } \left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} \\ 4\pi\Delta\cos\rho\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), & \text{при } \left|\theta + \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} \\ 0, \text{ при } |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} & \text{и } |\theta - \pi| \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Отсюда имеем

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\ln |\varphi(iy)|}{y^\rho} = 4\pi\Delta, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln|\varphi(x)|}{x^\rho} = 0 \qquad (1.3)$$

и поскольку

$$|\varphi(iy)| = |f(iy) f(-iy)|^2, \quad |\varphi(x)| = |f(x) f(-x)|^2,$$

то (1.3) равносильно условию (B_ρ)

Предположим теперь, что выполнено условие (B_ρ). В терминах функции $\varphi(z)$ это означает, что имеет место (1.3). Но на мнимой оси $\varphi(z)$ принимает действительные значения. Для $y>0$ $\varphi(iy)=|f(iy)f(-iy)|^2$ и поэтому при $y\to+\infty$

$$\ln\varphi(iy)\sim 4\pi\Delta y^\rho$$

или

$$\ln\varphi(re^{i\frac{\pi}{2}})\sim 4\Delta e^{-i\frac{\pi\rho}{2}}(re^{i\frac{\pi}{2}})^\rho.$$

Функция $\dfrac{\ln\varphi(z)}{z^\rho}$ голоморфна в угловой области

$$\Delta_\rho^{(+)}=\left\{0<|z|<\infty,\ \left|\arg z-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{2\rho}\right\}$$

и ограничена в области

$$\Delta_\rho^{(+)}(\delta)=\left\{\delta<|z|<\infty,\ \left|\arg z-\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\frac{\pi}{2\rho}-\delta\right\}\left(0<\delta<\frac{\pi}{2\rho}\right).$$

Действительно, $\varphi(z)$—целая функция порядка ρ и конечного типа, поэтому в $\Delta_\rho^{(+)}(\delta)$ ограничена величина $\dfrac{\ln|\varphi(z)|}{|z|^\rho}$ и, кроме того, $n_\varphi(r)<cr^\rho(r\geqslant r_0)$.

Отсюда следует, что в этой области ограничена также $\dfrac{|\arg\varphi(z)|}{|z|^\rho}$ (см. [5], стр. 87). При этом на луче $\arg z=\dfrac{\pi}{2}$ $\dfrac{\ln\varphi(z)}{z^\rho}$ стремится к конечному пределу $4\pi\Delta e^{-i\frac{\pi\rho}{2}}$. По теореме Монтеля она равномерно стремится к этому же пределу на любом луче из $\Delta_\rho^{(+)}(\delta)$. Так как $\delta>0$ —произвольное, то отсюда заключаем, что $\varphi(z)$ вполне регулярного роста внутри угла $\Delta_\rho^{(+)}$ и ее индикатор выражается формулой

$$h_\varphi(\theta)=4\pi\Delta\cos\rho\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\ \left|\theta-\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\frac{\pi}{2\rho}. \tag{1.4}$$

Аналогично убеждаемся, что $\varphi(z)$ вполне регулярного роста внутри области

$$\Delta_\rho^{(-)}=\left\{0<|z|<\infty,\ \left|\arg z+\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{2\rho}\right\}$$

и имеет там индикатор

$$h_\varphi(\theta)=4\pi\Delta\cos\rho\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\ \left|\theta+\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\frac{\pi}{2\rho}. \tag{1.5}$$

Из (1.4) и (1.5) следует, что $h(\varphi_k)=0$, $k=1, 2, 3, 4$. Но по предположению $1<\rho<2$ и значит растворы угловых областей

$$D_\rho^{(+)}=\left\{0<|z|<\infty,\ |\arg z|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}\right\}$$

и

$$D_\rho^{(-)} = \left\{ 0 < |z| < \infty, |\arg z - \pi| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} \right\}$$

меньше чем $\frac{\pi}{\rho}$, и поэтому

$$h_\varphi(\theta) < 0 \text{ при } |\theta| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} \text{ и } |\theta - \pi| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}. \tag{1.6}$$

Так как из условия $(B\rho)$ б) следуют равенства

$$h_\varphi(0) = h_\varphi(\pi) = 0,$$

то в силу (1.6) получим

$$h(\varphi) = 0 \text{ при } |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} \text{ и } |\theta - \pi| \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}.$$

Поскольку $\varphi(z)$ имеет вполне регулярный рост на лучах $\arg z = 0$ и $\arg z = \pi$, то она вполне регулярного роста в областях $D_\rho^{(+)}$ и $D_\rho^{(-)}$ (см. [5], теорема 6, стр. 213). Таким образом, $\varphi(z)$—вполне регулярного роста на всей плоскости (множество лучей вполне регулярного роста замкнуто). Поэтому

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_\varphi(\varphi)}{r^\rho} = \frac{\rho}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_\varphi(\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{\rho}{2\pi} \left\{ \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\rho}} 4\pi\Delta \cos\rho\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) d\theta + \right.$$

$$\left. + \int_{-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}}^{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\rho}} 4\pi\Delta \cos\rho\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) d\theta \right\} = 8\Delta.$$

Отсюда, имея в виду (1.1), получаем

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_f(r)}{r^\rho} = 2\Delta,$$

т. е. утверждение $(D\rho)$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 1.1 справедлива не только для канонического произведения, но и для любой целой функции $F(z)$, удовлетворяющей условию $F(0) = 1$. Действительно, множитель типа e^{az} при каноническом произведении в представлении Адамара (факторизационная теорема) никак не влияет на условия (D_ρ) и (B_ρ).

Теорема 1.2. *Пусть $f(z)$—каноническое произведение порядка $\rho (1 < \rho < 2)$ и конечного типа с нулями, лежащими на* Г. *Тогда условия*

$$(I_\rho)\ \text{а)}\ \int\limits_0^\infty \frac{\ln\left|\prod\limits_{k=1}^4 f(te^{i\varphi_k})\right|}{t^{\rho+1}}\,dt = -\frac{2\pi^2\Delta}{\rho},$$

$$\text{б)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln|f(x)f(-x)|}{x^\rho}=0$$

и

$$(D_\rho)\quad \lim_{r\to\infty}\frac{n_f(r)}{r^\rho}=2\Delta$$

эквиваленты.

Доказательство. Пусть имеет место (D_ρ). Снова рассмотрим функцию $\varphi(z)$ (см. (1.1)). Ясно, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_\varphi(r)}{r^\rho}=8\Delta$$

и $\varphi(z)$—целая функция порядка ρ, конечного типа и вполне регулярного роста. Напишем для нее формулу Карлемана (см., например, [6]) для области

$$\Delta_\rho^{(+)}(\lambda,\ R)=\left\{0<\lambda\leqslant|z|\leqslant R,\ \left|\arg z-\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\frac{\pi}{2\rho}\right\},$$

$$\sum_{\lambda<r_k<R}\left(\frac{1}{r_k^\rho}-\frac{r_k^\rho}{R^{2\rho}}\right)\cos\rho\left(\theta_k-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{\rho}{\pi R^\rho}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\ln|\varphi(Re^{i\theta})|\cos\rho\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)d\theta+$$

$$+\frac{\rho}{2\pi}\int\limits_\lambda^R\left(\frac{1}{t^{\rho+1}}-\frac{t^{\rho-1}}{R^{2\rho}}\right)\ln|\varphi(te^{i\varphi_1})\,\varphi(te^{i\varphi_2})|\,dt+$$

$$+Re\,\frac{\rho}{2\pi}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\frac{1}{\lambda^\rho e^{i\rho\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}}+\frac{\lambda^\rho e^{i\rho\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}}{R^{2\rho}}\right)\ln\varphi(\lambda e^{i\theta})\,d\theta. \tag{1.6'}$$

Функция $\varphi(z)$ не имеет нулей внутри области $\Delta_\rho^{(+)}$, так что левая часть (1.6′) равняется нулю. С другой стороны $\varphi(z)$—четная функция и $\varphi(0)=1$, поэтому при $\lambda\to0$ $\ln\varphi(\lambda e^{i\theta})=O(\lambda^2)$. Значит, при $\lambda\to0$ последний член правой части стремится к нулю. Переходя к пределу в (1.6′) при $\lambda\to0$, получим

$$0=\frac{\rho}{\pi R^\rho}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\ln|\varphi(Re^{i\theta})|\cos\rho\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)d\theta+\frac{\rho}{2\pi}\int\limits_0^R\frac{\ln|\varphi(te^{i\varphi_1})\,\varphi(te^{i\varphi_2})|}{t^{\rho+1}}\,dt-$$

$$-\frac{\rho}{2\pi R^{2\rho}}\int\limits_0^R t^{\rho-1}\ln|\varphi(te^{i\varphi_1})\,\varphi(te^{i\varphi_2})|\,dt=I_1(R)+I_2(R)-I_3(R). \tag{1.7}$$

Заметим теперь, что поскольку $1<\rho<2$, то второй интеграл справа вблизи точки $t=0$ сходится. Далее, ввиду равенства $|\varphi(t^{i\varphi_1})| = |\varphi(te^{i\varphi_1})|$ имеем

$$I_3(R) = \frac{\rho}{\pi}\frac{1}{R^{2\rho}}\int_0^R t^\rho \frac{\ln|\varphi(te^{i\varphi_1})|}{t}\,dt = \frac{\rho}{\pi}\frac{1}{R^{2\rho}}\int_0^R t^\rho d\left(\int_0^t \frac{\ln|\varphi(xe^{i\varphi_1})|}{x}\,dx\right) =$$

$$= \frac{\rho}{\pi}\left[\frac{t^\rho}{R^{2\rho}}\int_0^t \frac{\ln|\varphi(xe^{i\varphi_1})|}{x}\,dx\right]_0^R - \frac{\rho^2}{\pi R^{2\rho}}\int_0^R t^{\rho-1}\left(\int_0^t \frac{\ln|\varphi(xe^{i\varphi_1})|}{x}\,dx\right)dt =$$

$$= \frac{\rho}{\pi}\frac{1}{R^\rho}\int_0^R \frac{\ln|\varphi(xe^{i\varphi_1})|}{x}\,dx - \frac{\rho^2}{\pi R^{2\rho}}\int_0^R \frac{J_u^t(\varphi_1)}{t^{1-\rho}}\,dt,$$

где

$$I_\varphi^t(\varphi_1) = \int_0^t \frac{\ln|\varphi(xe^{i\varphi_1})|}{x}\,dx.$$

Функция $\varphi(z)$—вполне регулярного роста на луче $\arg z=\varphi_1$ и поэтому (см. [5], стр. 188) существует предел

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{2\rho}}\int_0^R \frac{\ln|\varphi(xe^{i\varphi_1})|}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} R^{-\rho}\, I_\varphi^R(\varphi_1) = \frac{1}{\rho}h_\varphi(\varphi_1) = 0.$$

Отсюда, в свою очередь, следует (см. [5], стр. 52), что

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{2\rho}}\int_0^R \frac{I_\varphi^t(\varphi_1)}{t^{1-\rho}}\,dt = \frac{1}{2\rho^2}h_\varphi(\varphi_1) = 0.$$

Таким образом

$$\lim_{R\to\infty} I_3(R) = 0. \tag{1.8}$$

Так как $\varphi(z)$ не имеет нулей внутри области $\Delta_\rho^{(+)}$, то $\dfrac{\ln|\varphi(Re^{i\theta})|}{R^\rho}$ равномерно стремится к $h_\varphi(\theta)$ в любом замкнутом промежутке интервала (φ_1, φ_2). Поэтому перейдя к пределу под знаком интеграла и учитывая (1.2), получим

$$\lim_{R\to\infty} I_1(R) = \frac{\rho}{\pi}\int_{\varphi_2}^{\varphi_2} h_\varphi(\theta)\cos\rho\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)d\theta =$$

$$= \frac{\rho}{\pi}4\pi\Delta\int_{\varphi'}^{\varphi_2}\cos^2\rho\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)d\theta = \frac{\rho}{\pi}4\pi\,\Delta\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\rho} = 2\pi\,\Delta. \tag{1.9}$$

Имея в виду (1.8) и (1.9) и переходя к пределу при $R\to\infty$ в (1.), получим

$$\frac{\rho}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\ln|\varphi(te^{i\varphi_1})\,\varphi(te^{i\varphi_2})|}{t^{\rho+1}}\,dt = -2\pi\Delta. \tag{1.10}$$

Замечая теперь, что $|\varphi(te^{i\varphi_1})| = |\varphi(te^{i\varphi_2})|$ и $|\varphi(te^{i\varphi_1})| = \left|\prod_{k=1}^{4} f(te^{i\varphi_k})\right|$, получим, что (1.10) эквивалентно условию (I_ρ) а). Условие же (I_ρ) б) следует из (B_ρ), что следует из (D_ρ).

Допустим теперь, что имеет место (I_ρ). Из (I_ρ) а) следует, что

$$\int_0^\infty \frac{\ln|\varphi(te^{i\varphi_k})|}{t^{\rho+1}}\,dt = -\frac{2\pi^2\Delta}{\rho}\ (k=1, 2, 3, 4) \tag{1.11}$$

Для функции $\varphi(z)$ справедлива формула (1.7). Докажем, что при $R\to\infty$ $J_3(R)\to 0$. Действительно, обозначим

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{\ln|\varphi(xe^{i\varphi_1})\,\varphi(xe^{i\varphi_2})|}{x^{\rho+1}}\,dx = 2\int_0^t \frac{\ln|\varphi(xe^{i\varphi_1})|}{x^{\rho+1}}\,dx.$$

Тогда

$$\frac{1}{R^{2\rho}}\int_0^R t^{\rho-1}\ln|\varphi(te^{i\varphi_1})\,\varphi(te^{i\varphi_2})|\,dt = \frac{1}{R^{2\rho}}\int_0^R t^{2\rho}d\,\Phi(t) =$$

$$= \frac{1}{R^{2\rho}}\left\{[t^{2\rho}\,\Phi(t)]\Big|_0^R - 2\rho\int_0^R t^{2\rho-1}\,\Phi(t)\,dt\right\} =$$

$$= \Phi(R) - \frac{2\rho}{R^{2\rho}}\int_0^R t^{2\rho-1}\,\Phi(t)\,dt.$$

При $R\to\infty$ это выражение стремится к нулю, так как по условию $\Phi(R)\to -\frac{4\pi^2\Delta}{\rho}$ и к такому же пределу стремится выражение $\frac{2\rho}{R^{2\rho}}\times$ $\times\int_0^R t^{2\rho-1}\cdot\Phi(t)\,dt$ (см. [5], стр. 52). Таким образом, из (1.7) получаем

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^\rho}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\ln|\varphi(Re^{i\theta})|\cos\rho\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)d\theta = \frac{2\pi^2\Delta}{\rho}. \tag{1.12}$$

Но с другой стороны, при условии (I_ρ) а) в области $\Delta_\rho^{(L)}$ функция $\varphi(z)$ вполне регулярного роста и

$$h_\varphi(\theta) = k\cos\rho\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\ \varphi_1\leqslant\theta\leqslant\varphi_2. \tag{1.13}$$

Это утверждение получается из соответствующей теоремы Б. Я. Левина (см. [5], теорема 6, гл. V) конформным отображением полуплоскости на угол $\Delta_\rho^{(+)}$ раствора $\frac{\pi}{2}$. Переходя к пределу при $R \to \infty$ под знаком интеграла в (1.12) и имея в виду (1.13), получим

$$k \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) d\theta = 2\pi^2 \Delta/\rho,$$

т. е. $k = 4\pi\Delta$. Из (1.13) имеем

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln |\varphi(iy)|}{y^\rho} = 4\pi \Delta.$$

Снова замечая, что $|\varphi(iy)| = |f(iy) f(-iy)|^2$, получим

$$\lim_{y \to \infty} \frac{\ln |f(iy) f(-iy)|}{y^\rho} = 2\pi \Delta,$$

т. е. условие (B_ρ) а). Таким образом, из условия (I_ρ) следует (B_ρ), из которого, в свою очередь, по теореме 1.1 следует (D_ρ). Теорема полностью доказана.

И здесь можно сделать замечание, аналогичное замечанию 1 после теоремы 1.1. Сопоставляя теоремы 1.1 и 1.2 и имея в виду эти замечания, получим следующий результат.

Теорема 1.3. Пусть $f(z)$—*целая функция порядка* $\rho(1<\rho<2)$, *конечного типа с нулями, лежащими на* Γ *и* $f(0)=1$. *Тогда условия* (I_ρ), (D_ρ) *и* (B_ρ) *эквивалентны.*

§ 2. Целые функции класса A_ρ

1° Определение. Целая функция порядка $\rho(1<\rho<2)$ и конечного типа принадлежит классу A_ρ, если ее нули $z_k = r_k e^{i\theta_k}$, лежащие в в областях $\Delta_\rho^{(+)}$, соответственно, удовлетворяют условиям

$$\sum_{\left|\theta_k \mp \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2\rho}} \frac{\cos \rho \left(\theta_k \mp \frac{\pi}{2}\right)}{r_k^\rho} < +\infty \tag{2.1}$$

и для любого $\delta \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}\right)$ множество нулей, лежащих в угловых областях

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} - \delta \text{ и } |\arg z - \pi| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} - \delta$$

нули которых лежат на Γ.

Легко убедиться, что для функций класса A_ρ множество нулей, лежащих вне маленьких углов $|\varphi_k - \theta| < \delta$, $k = 1, 2, 3, 4$, имеет нулевую плотность. Таким образом, функции класса A^ρ являются обобщением функций, нули которых лежат на Γ.

Классу A_ρ принадлежат, например, функции $E_\rho(iz; \mu) = \sum_0^\infty \frac{(iz)^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})}$,

$S_\rho(z; \mu) = \frac{1}{2i}[E_\rho(iz; \mu) - E_\rho(-iz; \mu)]$. Это следует из асимптотики нулей этих функций (см. [7], [8]).

В этом параграфе для функций класса A_ρ мы докажем теоремы типа теорем B и C.

Теорема 2.1. *Если $f(z)$—целая функция порядка $\rho(1<\rho<2)$, конечного типа, класса A_ρ и $f(0)=1$, то следующие условия эквивалентны:*

$$(I_\rho^*)\quad \text{а) } \textit{интеграл} \int_0^\infty \frac{\ln\left|\prod_{k=1}^{4} f(te^{i\varphi_k})\right|}{t^{\rho+1}}\,dt$$

сходится:

$$\text{б) } \lim_{x\to\infty}{}^{*} \frac{\ln|f(x)f(-x)|}{x^\rho}=0$$

и

$$(D_\rho^*)\quad \textit{существует предел } \lim_{r\to\infty}\frac{n_f(r)}{r^\rho}$$

($\lim\limits_{x\to\infty}{}^{*}F(x)$ *обозначает предел функции $F(x)$, который существует при условии, что $x\to\infty$ не принимая значений из некоторого множества нулевой относительной меры**).

Доказательство. Предположим сначала, что имеет место условие (D_ρ^*). Пусть $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{n_f(r)}{r^\rho}=2\Delta$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z)=f(z)f(-z)\overline{f}(z)\overline{f}(-z).$$

Очевидно будем иметь

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_\varphi(r)}{r^\rho}=8\Delta.$$

Ясно, что $\varphi(z)\in A_\rho$ и нули ее расположены симметрично относительно осей x и $y(z=x+iy)$. Множестно нулей функции $\varphi(z)$ имеет угловую плотность $\Delta(\vartheta,\theta)$ при показателе ρ, т. е. для всех ϑ и θ, за исключением, быть может, счетного множества, существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_\varphi(r,\vartheta,\theta)}{r^\rho}=\Delta(\vartheta,\theta)$$

($n_\varphi(r,\vartheta,\theta)$ — число нулей $\varphi(z)$ в секторе $\vartheta<\arg z\leqslant\theta$, $|z|<r$). Равенство

$$\Delta(\theta)-\Delta(\vartheta)=\Delta(\vartheta,\theta)$$

определяет с точностью до аддитивного слагаемого некоторую неубывающую функцию $\Delta(\theta)$.

---

* Множество E_0 точек интервала $(0,\infty)$ называется множеством нулевой относительной мере, если при любом $r>0$ множество $E_0\cap[0,r]$ измеримо и

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\operatorname{mes} E_0\cap[0,r]}{r}=0.$$

Для функции $\varphi(z)$ $\Delta(\theta)$—кусочно-постоянная функция с четырьмя равными 2Δ скачками в точках φ_k ($k=1, 2, 3, 4$). Значит $\varphi(z)$—целая функция вполне регулярного роста с индикатором

$$h_\varphi(\theta) = \begin{cases} 4\pi\Delta\cos\rho\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right), \text{ при } \left|\theta-\frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2\rho} \\ 4\pi\Delta\cos\rho\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), \text{ при } \left|\theta+\frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} \\ 0, \text{ при } |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho} \text{ и } |\theta-\pi| \leqslant \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Отсюда сразу следует пункт б) условия (I_ρ^*) (надо иметь в виду $|\varphi(x)|=|f(x)f(-x)|^2$). Чтобы доказать пункт а) воспользуемся формулой (1.6′). Устремляя λ к нулю, получим (ср. с. (1.7))

$$\sum_{0<r_k<R}\left(\frac{1}{r_k^\rho}-\frac{r_k^\rho}{R^{2\rho}}\right)\cos\rho\left(\varphi_k-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{\rho}{\pi R^\rho}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\ln|\varphi(Re^{i\theta})|\cos\rho\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)d\theta+$$

$$+\frac{\rho}{2\pi}\int_0^R\left(\frac{1}{t^{\rho+1}}-\frac{t^{\rho-1}}{R^{2\rho}}\right)\ln|\varphi(te^{i\varphi_1})\varphi(te^{i\varphi_2})|\,dt. \tag{2.3}$$

Докажем, что

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{2\rho}}\sum_{\substack{r_k<R \\ \left|\varphi_k-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{2\rho}}} r_k^\rho\cos\rho\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=0. \tag{2.4}$$

Действительно, это следует из (2.1) и из оценки

$$\frac{1}{R^{2\rho}}\sum_{r_0<r_k<R} r_k^\rho\cos\rho\left(\varphi_k-\frac{\pi}{2}\right)<\sum_{r_k>r_0}\frac{\cos\rho\left(\varphi_k-\frac{\pi}{2}\right)}{r_k^\rho}<\varepsilon,$$

которая верна при достаточно большом r_0. Таким образом, предел левой части при $R\to\infty$ конечен и равняется

$$\sum_{\left|\varphi_k-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{2\rho}}\frac{\cos\rho\left(\varphi_k-\frac{\pi}{2}\right)}{r_k^\rho}.$$

Рассмотрим первый член правой части (2.3). Пользуясь тем, что $\varphi(z)$ вполне регулярного роста, можно вычислить предел этого члена, перейдя к пределу под знаком интеграла (см. [5], стр. 320)

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\rho}{\pi R^\rho}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\ln|\varphi(Re^{i\theta})|\cos\rho\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)d\theta=$$

$$= \frac{\rho}{\pi} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} h_\varphi(\theta) \cos\rho\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) d\theta =$$

$$= \frac{\rho}{\pi} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} 4\pi\,\Delta \cos^2\rho\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) d\theta = \frac{\rho}{\pi}\, 4\pi\Delta \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\rho} = 2\pi\Delta. \qquad (2.5)$$

Из (2.3), (2.4) и (2.5) следует, что существует предел выражения

$$\frac{\rho}{2\pi}\int\limits_0^R \left(\frac{1}{t^{\rho+1}} - \frac{t^{\rho-1}}{R^{2\rho}}\right) \ln|\varphi(te^{i\varphi_1})\,\varphi(te^{i\varphi_2})|\, dt = J_1(R) - J_2(R). \qquad (2.6)$$

В § 1 (теорема 1.2) доказано, что

$$\lim_{R\to\infty} J_2(R) = 0$$

Отсюда и из (2.6) следует, что существует конечный предел $\lim\limits_{R\to\infty} J_1(R)$, т. е. сходится интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\ln|\varphi(te^{i\varphi_1})\,\varphi(te^{i\varphi_2})|}{t^{\rho+1}}\, dt = 2\int\limits_0^\infty \frac{\ln|\varphi(te^{i\varphi_1})|}{t^{\rho+1}}\, dt,$$

что равносильно утверждению $(\overset{*}{I}_\rho)$ а).

Допустим теперь, что имеет место $(\overset{*}{I}_\rho)$. Условие $(\overset{*}{I}_\rho)$ а) означает, что сходятся интегралы

$$\int\limits_0^\infty \frac{\ln|\varphi(te^{i\varphi_k})|}{t^{\rho+1}}\, dt \quad (k = 1, 2).$$

Отсюда, как и раньше (см. (1.13)) следует, что в угловой области $\Delta_\rho^{(+)}$ $\varphi(z)$ вполне регулярного роста и ее индикатор выражается формулой

$$h_\varphi(\theta) = K_1 \cos\rho\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \quad \varphi_1 \leqslant \theta < \varphi_2. \qquad (2.7)$$

В частности

$$h_\varphi(\varphi_1) = h_\varphi(\varphi_2) = 0. \qquad (2.8)$$

Аналогично доказывается, что $\varphi(z)$ вполне регулярного роста в области $\Delta_\rho^{(-)}$ и имеет там индикатор

$$h_\varphi(\theta) = K_2 \cos\rho\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \quad \varphi_3 \leqslant \theta < \varphi_4.$$

В частности

$$h_\varphi(\varphi_3) = h_\varphi(\varphi_4) = 0. \qquad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.9) следует, что $h_\varphi(\theta) \leqslant 0$ при $|\theta| \leqslant \varphi_1$ и $|\theta - \pi| \leqslant \varphi_1$. Но из $(\overset{*}{I}_\rho)$ б) имеем

$$h_\varphi(0) = h_\varphi(\pi) = 0.$$

Значит

$$h_*(\theta)=0 \text{ при } |\theta|<\varphi_1,\ |\theta-\pi|\leqslant\varphi_1.$$

По условию (I_ρ^*) б) $\varphi(z)$ имеет вполне регулярный рост на лучах $\arg z=0$ и $\arg z=\pi$, поэтому она имеет вполне регулярной рост в угловых областях $D_\rho^{(+)}$ и $D_\rho^{(-)}$. Таким образом, $\varphi(z)$ имеет вполне регулярный рост во всей плоскости. Это означает, что множество ее нулей имеет плотность, т. е. существует предел $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{n_\varphi(r)}{r^\rho}$.

Но очевидно, $n_f(r)=\dfrac{1}{4}n_\varphi(r)$. Значит выполняется условие (D_ρ^*).

Теорема доказана.

Теорема 22. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho\,(1<\rho<2)$, конечного типа, класса A_ρ и $f(0)=1$. Пусть далее для некоторого $\delta>0$ имеет только конечное число нулей в угловых областях*

$\left|\arg z\mp\dfrac{\pi}{2}\right|<\delta$. *Тогда следующие условия эквивалентны.* (D_ρ^*) *существует предел* $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{n_f(r)}{r^\rho}$

и

(B_ρ^*) а) *существует предел*

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln|f(iy)f(-iy)|}{y^\rho};$$

$$\text{б) } \lim_{x\to\infty}{}^{*}\frac{\ln|f(x)f(-x)|}{x^\rho}=0.$$

Доказательство. Пусть сначала выполняется (D_ρ^*). Отсюда, как в теореме 2.1 следует, что функция $\varphi(z)$ вполне регулярного роста, откуда и вытекает (B_ρ^*). Здесь учитывается, что

$$|\varphi(iy)|=|f(iy)f(-iy)|^2,\quad |\varphi(x)|=|f(x)f(-x)|^2$$

и что $\varphi(z)$ также имеет конечное число нулей в угловых областях $\left|\arg z\pm\dfrac{\pi}{2}\right|<\delta$, содержащих мнимую ось.

Предположим теперь, что выполняется (B_ρ^*). Из (B_ρ^*) а) вытекает существование конечного предела

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\ln|\varphi(iy)|}{y^\rho}=K. \tag{2.10}$$

Ясно, что $\varphi(z)\in A_\rho$ и поэтому для нулей $\varphi(z)$, лежащих в области $\Delta_\rho^{(+)}$ существует произведение Бляшке $B_\rho^{(+)}(z)$. Функцию $\varphi(z)$ в области $\Delta_\rho^{(+)}$ можно представить в виде

$$\varphi(z)=B_\rho^{(+)}(z)\,G(z),$$

где $G(z)$ не имеет нулей в $\Delta_\rho^{(+)}$. Так как (см. [3], [5])

$$\lim_{r\to\infty}{}^* \frac{\ln |B_\rho^{(+)}(re^{i\theta})|}{r^\rho} = 0, \quad \varphi_1 \leqslant \theta \leqslant \varphi_2,$$

то $G(z)$ в области $\Delta_\rho^{(+)}$ порядка ρ, конечного типа, с тем же индикатором, что и $\varphi(z)$. С другой стороны, нули $\varphi(z)$ симметрично расположены относительно оси y. Значит $\varphi(iy)$ и $B_\rho^{(+)}(iy)$ действительны и неотрицательны, откуда следует, что $G(iy) > 0$. Из (2.10) имеем

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln G(iy)}{y^\rho} = K.$$

Отсюда, как при доказательстве теоремы 1.1 получается, что $G(z)$ вполне регулярного роста в области $\Delta_\rho^{(+)}$ и имеет там индикатор

$$h_G(\theta) = K \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \quad \varphi_1 < \theta < \varphi_2.$$

Очевидно, $\varphi(z)$ также имеет вполне регулярный рост в $\Delta_\rho^{(+)}$ и

$$h_\varphi(\theta) = K \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \quad \varphi_1 \leqslant \theta \leqslant \varphi_2.$$

В частности

$$h_\varphi(\varphi_1) = h_\varphi(\varphi_2) = 0. \tag{2.11}$$

Аналогично доказывается, что $\varphi(z)$ вполне регулярного роста в области $\Delta_\rho^{(-)}$ и

$$h_\varphi(\theta) = K_1 \cos \rho \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \quad \varphi_3 \leqslant \theta < \varphi_4$$

и значит

$$h_\varphi(\varphi_3) = h_\varphi(\varphi_4) = 0. \tag{2.12}$$

Ив (2.11), (2.12) и ($\overset{*}{B}_\rho$) б), как и раньше, легко выводим, что $\varphi(z)$ вполне регулярного роста в угловых областях $D_\rho^{(+)}$ и $D_\rho^{(-)}$.

Таким образом, $\varphi(z)$ имеет вполне регулярный рост во всей плоскости. Значит множество ее нулей имеет плотность. Очевидно то же самое верно и для функции $f(z)$. Теорема доказана.

2°. Условия ($\overset{*}{I}_\rho$), ($\overset{*}{D}_\rho$) и ($\overset{*}{B}_\rho$) в теоремах 2.1 и 2.2 можно несколько видоизменить.

Обозначим через $n^{(\pm)}(r)$ число нулей функции $f(z)$ в верхнем, соответственно, нижнем полукруге радиуса r. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть $f(z)$—целая функция порядка $\rho(1<\rho<2)$ конечного типа и класса A_ρ. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(I) а) *сходятся интегралы*

$$\int_1^\infty \frac{\ln |f(re^{i\varphi_1}) f(re^{i\varphi_2})|}{r^{\rho+1}}\,dr, \quad \int_1^\infty \frac{\ln |f(re^{i\varphi_3}) f(re^{i\varphi_4})|}{r^{\rho+1}}\,dr,$$

б) $$\lim_{x\to\infty}{}^{*}\frac{\ln|f(x)f(-x)|}{x^{\rho}}=0;$$

(II) существуют пределы

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_f^{(\pm)}(r)}{r^{\rho}}.$$

Теорема 2.4. *Пусть $f(z)$—целая функция порядка $\rho(1<\rho<2)$ конечного типа и класса A_ρ. Пусть далее для некоторого $\delta>0$ она имеет только конечное число нулей в угловых областях $\left|\arg z\pm\frac{\pi}{2}\right|<\delta$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(II) существуют пределы

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_f^{(\pm)}(r)}{r^{\rho}};$$

(III) а) существуют пределы

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\ln|f(\pm iy)|}{y^{\rho}},$$

$$\text{б) }\lim_{x\to\infty}{}^{*}\frac{\ln|f(x)f(-x)|}{x^{\rho}}=0.$$

Доказательства этих теорем мало отличаются от доказательств теорем 2.1 и 2.2, поэтому мы их опускаем. Заметим только, что вместо функции $\varphi(z)$ здесь надо рассматривать функцию $\psi(z)=f(z)\overline{f}(-z)$, которая также принадлежит классу A_ρ и нули которой симметрично расположены относительно мнимой оси.

§ 3. Целые функции класса A_ρ и вполне регулярного роста

1° В этом параграфе с помощью предыдущих результатов мы укажем условия, при которых целые функции порядка ρ и конечного типа принадлежат классу A_ρ и имеют вполне регулярный рост.

Теорема 3.1. *Если $f(z)$—целая функция порядка $\rho(1<\rho<2)$, конечного типа и удовлетворяет условиям*

(α) сходятся интегралы

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln|f(te^{i\varphi_k})|}{t^{\rho+1}}\,dt\ (k=1,2,3,4),$$

$$(\beta)\ \lim_{x\to\infty}{}^{*}\frac{\ln|f(\pm x)|}{x^{\rho}}=0,$$

то она принадлежит классу A^ρ и вполне регулярного роста.

Доказательство. Из условия (α), как и раньше (см. (1.13), (2.7)) следует, что $f(z)$ вполне регулярного роста в областях $\Delta_\varphi^{(+)}$ и

$$h_f(\theta)=\begin{cases} k_1\cos\rho\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right), & \text{при } \left|\theta-\dfrac{\pi}{2}\right|\leqslant\dfrac{\pi}{2\rho} \\ k_2\cos\rho\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right), & \text{при } \left|\theta+\dfrac{\pi}{2}\right|\leqslant\dfrac{\pi}{2\rho}\end{cases}.$$

В частности

$$h_\varphi(\varphi_k)=0 \ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{3.1}$$

Условие (β) означает, что на лучах $\arg z=0$ и $\arg z=\pi$ $f(z)$ имеет вполне регулярный рост, при этом

$$h_f(0)=h_f(\pi)=0. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что

$$h_f(\theta)=0, \text{ при } |\theta|\leqslant\frac{\pi}{2\rho} \text{ и } |\theta-\pi|\leqslant\frac{\pi}{2\rho} \tag{3.3}$$

и что $f(z)$ вполне регулярного роста в областях $D_\rho^{(\pm)}$. Таким образом, $f(z)$ имеет вполне регулярный рост во всей плоскости. Кроме того из (3.3) по теореме А. Пфлюгера (см. [5], стр. 199) имеем, что для любого $\delta\left(0<\delta<\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2\rho}\right)$ множество нулей функции $f(z)$ в областях

$$D_\rho^{(+)}(\delta)=\left\{0<|z|<\infty,\ |\arg z|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}-\delta\right\},$$

$$D_\rho^{(-)}(\delta)=\left\{0<|z|<\infty,\ |\arg z-\pi|<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}-\delta\right\}$$

имеет нулевую плотность. Для завершения доказательства остается показать сходимость рядов

$$\sum_{\left|\theta_k\mp\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{2\rho}}\frac{\cos\rho\left(\theta_k\mp\dfrac{\pi}{2}\right)}{r_k^\rho}, \tag{3.4}$$

где $r_k e^{i\varphi_k}$ — нули функции $f(z)$. Напишем формулу Карлемана для функции $f(z)$ в области $\Delta_\rho^{(+)}(\lambda,\ R)$ (см. (1.6))

$$\sum_{\lambda<r_k<R}\left(\frac{1}{r_k^\rho}-\frac{r_k^\rho}{R^{2\rho}}\right)\cos\rho\left(\theta_k-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\rho}{\pi R^\rho}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\ln|f(Re^{i\theta})|\cos\rho\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)d\theta+$$

$$+\frac{\rho}{2\pi}\int_\lambda^R\left(\frac{1}{t^{\rho+1}}-\frac{t^{\rho-1}}{R^{2\rho}}\right)\ln|f(te^{i\varphi_1})f(te^{i\varphi_2})|\,dt+O(1)=$$

$$=J_1(R)+J_2(R)+O(1). \tag{3.5}$$

Обозначим

$$\Psi(x)=\int_\lambda^x\frac{\ln|f(te^{i\varphi_1})f(te^{i\varphi_2})|}{t^{\rho+1}}dt.$$

По условию (α) функция $\psi(x)$ ограничена. Значит ограничен и интеграл

$$\frac{2\rho}{R^{2\rho}}\int\limits_{\lambda}^{R}\Psi(t)\,t^{2\rho-1}dt.$$

С другой стороны

$$\frac{2\rho}{R^{2\rho}}\int\limits_{\lambda}^{R}\Psi(t)\,t^{2\rho-1}dt=\frac{1}{R^{2\rho}}\Psi(t)\,t^{2\rho}\Big|_{\lambda}^{R}-\frac{1}{R^{2\rho}}\int\limits_{\lambda}^{R}t^{2\rho}\frac{\ln|f(te^{i\varphi_1})f(te^{i\varphi_2})|}{t^{\rho+1}}\,dt=$$

$$=\int\limits_{\lambda}^{R}\left(\frac{1}{t^{\rho+1}}-\frac{t^{\rho-1}}{R^{2\rho}}\right)\ln|f(te^{i\varphi_1})\,f(te^{i\varphi_2})|\,dt+O(1),$$

так что $J_2(R)$ в правой части (3.5) ограничен. $f(z)$ имеет порядок ρ и конечный тип, поэтому $J_1(R)$ также ограничен. Таким образом, правая часть равенства (3.5), а с ней и левая часть ограничены. Теперь сходимость одного из рядов (3.4) следует из неравенства

$$\sum_{\lambda<r_k<\frac{R}{2^{1/2\rho}}}\frac{\cos\rho\left(\theta_k-\frac{\pi}{2}\right)}{r_k^{\rho}}<2\sum_{\lambda<r_k<\frac{R}{2^{1/2\rho}}}\left(\frac{1}{r_k^{\rho}}-\frac{r_k^{\rho}}{R^{2\rho}}\right)\cos\rho\left(\theta_k-\frac{\pi}{2}\right)<$$

$$<2\sum_{\lambda<r_k<R}\left(\frac{1}{r_k^{\rho}}-\frac{r_k^{\rho}}{R^{2\rho}}\right)\cos\rho\left(\theta_k-\frac{\pi}{2\rho}\right).$$

Аналогично доказывается сходимость другого ряда. Теорема доказана.

2°. В следующей теореме условие (α) заменено другими условиями.

Теорема 3.2. *Если $f(z)$—целая функция порядка $\rho(1<\rho<2)$, конечного типа и удовлетворяет условиям*

(γ) 1) *сходятся интегралы*

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\ln|f(te^{i\varphi_k})\,f(te^{i\varphi_{k+1}})|}{t^{\rho+1}}\,dt\ (k=1,3),$$

$$2)\ h_f(\varphi_k)=0\ (k=1,2,3,4),$$

$$(\delta)\ \lim_{x\to\infty}{}^{*}\frac{\ln|f(\pm x)|}{x^{\rho}}=0,$$

то и $f(z)$—класса A_ρ и вполне регулярного роста.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(z)=f(z)\,\overline{f}(-z)$. Она удовлетворяет условиям теоремы 3.1 и, следовательно, имеет вполне регулярный рост и принадлежит классу A_ρ. Очевидно и $f(z)\in A_\rho$ Индикатор $F(z)$ при $\theta\in[\varphi_1,\varphi_2]$ выражается формулой

$$h_F(\theta)=2k_1\cos\rho\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\quad\left|\theta-\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\frac{\pi}{2\rho},\tag{3.6}$$

где, как легко видеть, $k_1=h_f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. С другой стороны, по условию теоремы $h(\varphi_1)=h(\varphi_2)=0$. Из этих двух условий вытекает, что

$$h_f(\theta) = k_1 \cos\rho\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \text{ при } \left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2\rho}, \tag{3.7}$$

Имея в виду, что при $\theta \in [\varphi_1, \varphi_2]$, $h_f(\theta) = h_f(\pi - \theta)$, из (2.1) и (2.2) получаем

$$\underset{\substack{r\to\infty \\ r\overline{\in} E^0}}{\underline{\lim}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\rho} = \underset{\substack{r\to\infty \\ r\overline{\in} E^0}}{\lim} \frac{\ln|F(re^{i\theta})|}{r^\rho} - \underset{\substack{r\to\infty \\ r\overline{\in} E^0}}{\overline{\lim}} \frac{\ln|f(re^{i(\pi-\theta)})|}{r^\rho} =$$

$$= k_1 \cos\rho\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

(E^0—множество нулевой относительной меры). Это означает, что $f(z)$ вполне регулярного роста в области $\Delta_\rho^{(+)}$. Аналогичное утверждение верно для области $\Delta_\rho^{(-)}$. Регулярность роста $f(z)$ в областях $D_\rho^{(+)}$ и $D_\rho^{(-)}$ доказывается как в теореме 3.1. Таким образом, $f(z)$ вполне регулярного роста во всей плоскости. Теореме доказана.

Ереванский институт
народного хозяйства

Поступила 20. II. 1987

Ա. Ե. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ. $\rho\,(1<\rho<2)$ կարգի ամբողջ ֆունկցիաների մասին *(ամփոփում)*

Դիցուք Γ-ն $\arg z = \pm\left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2\rho}\right)$ *ճառագայթների համախումբն է։ Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում են* $\rho\,(1<\rho<2)$ *կարգի ամբողջ ֆունկցիաներ, որոնց զրոները ընկած են* Γ*-ի վրա կամ նրա մոտ։ Այդպիսի ֆունկցիաների համար քանակական կապ է հաստատվում նրա զրոների բազմության խտության, կեղծ և իրական առանցքներով աճի և* Γ*-ի վրա ֆունկցիայի վարքի միջև։ Վերջում բերվում են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում ամբողջ ֆունկցիաները պատկանում են* A_ρ *դասին և ունեն լիովին ռեգուլյար աճ։*

A. E. AVETICIAN. *On entire functions of order* $\rho\,(1<\rho<2)$ (summary)

Let Γ be a set of rays $\arg z = \pm\left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2\rho}\right)$. This paper investigates entire functions of order $\rho\,(1<\rho<2)$ with zeros on or „close" to Γ. For such functions Connectons are established between the density of sets zeros, its growth on real and imaginary axis and behavior on Γ. At the end sufficent conditions are given which imply the functions belong to class A_ρ^* and have regular asymptotic behavior.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Винер, Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области, М., «Наука»,
2. *A. Pfluger.* Uber gewisse ganze Funktionen vom-Exponentialtypus. Comment. Math. Helv., 16, 1944, 1—18.
3. *R. Boas.* Entire functions, New-York, 1954.
4. *M. E. Noble.* Extensions and applications of a Tauberian theorem du to Valiron. Proc. Cambridge Philos. Soc., 47. 1951, 22—37.
5. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., 1956.
6. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский.* Распределение значений мероморфных функций, М., «Наука», 1970.
7. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
8. *С. Г. Рафаэлян.* Кандидатская диссертация, Ереван, 1981.